

SID



ابزارهای
پژوهش



سرویس ترجمه
تخصصی



کارگاه های
آموزشی



بلاگ
مرکز اطلاعات علمی



سامانه ویراستاری
STES



فیلم های
آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی



آموزش مهارت های کاربردی در تدوین و چاپ مقالات ISI

آموزش مهارت های کاربردی
در تدوین و چاپ مقالات ISI



روش تحقیق کمی

روش تحقیق کمی



آموزش نرم افزار Word برای پژوهشگران

آموزش نرم افزار Word
برای پژوهشگران



چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

یک نامساوی انتگرالی جدید نوع هیلبرت با هسته همگن

رحمت ... لشکری پور^۱ و مونا نارویی ایرانی^۲ *

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی
laskhaki@hamoon.usb.ac.ir^۱
mona-naroooyi@yahoo.com^۲

چکیده. در این مقاله، با استفاده از توابع وزن دار و روش‌هایی از آنالیز حقیقی یک نامساوی انتگرالی جدید با هسته همگن در صفحه کامل با بهترین ضریب ثابت به دست آمده است. و به عنوان کاربرد شکل معادل نامساوی با بهترین ضریب ثابت و حالت معکوس بعلاوه، آنها را نیز با بهترین ضریب ثابت ارایه می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

صد سال قبل هیلبرت نامساوی کلاسیک زیر را اثبات کرد:

$$\sum_n \sum_m \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_n a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

نامساوی (۱.۱) در آنالیز کاربردهای زیادی دارد. طی سال‌های اخیر تعداد زیادی از ریاضیدانان تحقیق روی نامساوی نوع هیلبرت از درجه صفر با هسته همگن و بدون هسته همگن را شروع کردند و نامساوی‌هایی در \mathbb{R}^2 به دست آوردند.

در سال ۲۰۰۸ یانگ نامساوی را به شکل زیر اصلاح کرد [۱]:

اگر $p, r > 1$ و $0 < \lambda < 1$ ، $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و انتگرال‌های سمت راست همگرا باشند، آنگاه

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 26D15.

واژگان کلیدی. توابع وزن دار، نامساوی هولدر، فرم معادل.
* سخنران

۱.۰. لشکری پور و م. نارویی ایرانی

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(y)}{|x+y|^\lambda} dx dy$$

$$< k_\lambda(r) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p(1-\frac{\lambda}{r})} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q(1-\frac{\lambda}{s})} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.1)$$

که مقدار ثابت $k_\lambda(r) = B(\frac{\lambda}{r}, \frac{\lambda}{s}) + B(1-\lambda, \frac{\lambda}{r}) + B(1-\lambda, \frac{\lambda}{s})$ بهترین ثابت ممکن است. با استفاده از (۲.۱) و روش‌هایی در آنالیز حقیقی یک نامساوی جدید در \mathbb{R}^2 با هسته همگن از درجه \circ به دست می‌آوریم [۲]. به علاوه شکل معادل و متناظر عکس نامساوی را نیز معرفی می‌کنیم.

۲. گزاره‌های مورد نیاز

گزاره ۱.۰.۲. اگر α_1, α_2 اعداد حقیقی باشد [۴]. به طوری که $\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ ، آنگاه تابع وزن

$$\omega(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1,2\}} \frac{\min\{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy \cos \alpha_i + y^2} \cdot \frac{1}{|y|} dy \quad (1.2)$$

$$x \in (-\infty, \infty)$$

و α_1, α_2 اعداد حقیقی باشد [۴]. به طوری که $\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ ، آنگاه

$$\forall x \in (-\infty, \circ) \cup (\circ, \infty), \quad \omega(x) = k. \quad (2.2)$$

گزاره ۲.۰.۲. اگر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ و $f(x)$ تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $(-\infty, \infty)$ باشد [۳]. آنگاه به ازای هر x متعلق به $(-\infty, \circ) \cup (\circ, \infty)$ ،

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1,2\}} \frac{\min\{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy \cos \alpha_i + y^2} f(x) dx \right)^p dy$$

$$\leq k^p \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x) dx. \quad (3.2)$$

گزاره ۳.۰.۲. اگر $\circ < p < 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $g(x)$ یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $(-\infty, \infty)$ باشد [۳]، آنگاه به ازای هر x متعلق به $(-\infty, \circ) \cup (\circ, \infty)$ ،

نامساوی انتگرالی هیلبرت، هسته همگن

$$L := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1, 2\}} \frac{\min \{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy \cos \alpha_i + y^2} g(y) dy \right)^q dx$$

$$\leq k^p \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{q-1} g^q(y) dy,$$

که

$$k = 2 \ln \left(2 \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} \right) - \alpha_1 \cot \alpha_1 + (\pi - \alpha_2) \cot \alpha_2.$$

۳. قضایای اصلی

قضیه ۱.۳. اگر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، $p < 1$ ، $f(x), g(x) \geq 0$ به طوری که $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x) dx < \infty$ و $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-1} g^q(x) dx < \infty$ ، آنگاه نامساوی‌های هم‌ارز زیر را داریم:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1, 2\}} \frac{\min \{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy \cos \alpha_i + y^2} f(x) g(y) dx dy$$

$$< k \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1, 2\}} \frac{\min \{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy \cos \alpha_i + y^2} f(x) dx \right)^p dy$$

$$\leq k^p \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x) dx,$$

که مقدار ثابت $k = 2 \ln \left(2 \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} \right) - \alpha_1 \cot \alpha_1 + (\pi - \alpha_2) \cot \alpha_2$ بهترین ثابت ممکن است [۳، ۵].

قضیه ۲.۳. اگر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، $0 < p < 1$ ، $f(x), g(x) \geq 0$ به طوری که

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x) dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-1} g^q(x) dx < \infty$$

آنگاه نامساوی‌های هم‌ارز زیر را داریم:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1, 2\}} \frac{\min\{x^r, y^r\}}{x^r + rxy \cos \alpha_i + y^r} f(x)g(y) dx dy$$

$$> k \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3.3)$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1, 2\}} \frac{\min\{x^r, y^r\}}{x^r + rxy \cos \alpha_i + y^r} f(x) dx \right)^p dy$$

$$> k^p \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x) dx, \quad (4.3)$$

$$L := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i \in \{1, 2\}} \frac{\min\{x^r, y^r\}}{x^r + rxy \cos \alpha_i + y^r} g(y) dy \right)^q dx$$

$$< k^q \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{q-1} g^q(y) dy, \quad (5.3)$$

که ضرایب ثابت $\alpha_1 + (\pi - \alpha_2) \cot \alpha_2$ و $k = r \ln(r \cos \frac{\alpha_1}{r} \sin \frac{\alpha_2}{r}) - \alpha_1 \cot \alpha_1 + (\pi - \alpha_2) \cot \alpha_2$ بهترین ثابت‌های ممکن هستند [۵].

مراجع

1. Hardy, GH, Littlewood, JE, Polya, G: *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, UK. (1934).
2. He, B, Yang, B: *On a Hilbert-Type integral inequality With the Homogeneous kernel of 0-Degree and the Hypergeometric Function*, Math. Practice. Theory. **40** (2010), no. 18, 203-211.
3. Li, Y, Wang, Z, He, B: *Hilbert's Type Linear Operator and Some Extensions of Hilbert's inequality*, Journal of Inequalities and Applications 2007, **10** (2007). Article ID 82138.
4. Li, Y, He, B: *On Inequalities of Hilbert's type*, Bull. Aust. Math. soc. **76** (2007), no. 1, 1-13.
5. Pachpatte, BG: *On Some new inequalities Similar to Hilbert's inequality*, Journal of Mathematics Analysis and Applications. **226** (1998), no. 3, 166-179.

SID



ابزارهای
پژوهش



سرویس ترجمه
تخصصی



کارگاه های
آموزشی



بلاگ
مرکز اطلاعات علمی



سامانه ویراستاری
STES



فیلم های
آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی



تازه های آموزش
آموزش مهارت های کاربردی در تدوین و چاپ مقالات ISI

آموزش مهارت های کاربردی
در تدوین و چاپ مقالات ISI



تازه های آموزش
روش تحقیق کمی

روش تحقیق کمی



تازه های آموزش
آموزش نرم افزار Word برای پژوهشگران

آموزش نرم افزار Word
برای پژوهشگران