مقایسه تقریب T_N با P_N در حل معادله ترابرد نوترونها در یک تیغه بحرانی

گودرزی، مریم* [۱]– مرادی، محمود [۲] – اکملی، مسعود [۲]

[۱] دانشگاه آزاد اسلامی واحد بروجرد، گروه فیزیک

[۲] سازمان انرژی اتمی‌ایران، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، انتهای خیابان کارگر شمالی، تهران

چکیده:

هدف از این تحقیق حل معادله ترابرد نوترونها در حالت پراکندگی همســـانگرد با اســـتفاده از تقریب T_N برای یک تیغه بحرانی می‌باشد. در این تقریب وابستگی زاویه‌ای معادله ترابرد نوترونها بر اساس چند جمله‌ای‌های چبیشو بسط داده می‌شود. با بکارگیری شرط مرزی خلاء و ا ستفاده از شرایط مرزی مارک و مار شاک ضخامت بحرانی یک تیغه در حالت یک بعدی محا سبه گردید. همچنین برای ارزیابی این تحقیق نتایج حاصل با تقریب P_N نیز مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: *معادله ترابرد نوترونها، تقریب T_N و P_N، چند جمله‌ای‌های چبیشو، ضخامت بحرانی، تیغه یک بعدی.*

مقدمه :

رفتار یک رآکتور هسته‌ای وابسته به توزیع فضایی، انرژی و زمانی نوترونها در سیستم است و مسئله اصلی تئوری رآکتور ا شاره به این توزیع می‌با شد. ا صولاً می‌توان این توزیع را با حل معادله ترابرد نوترونها بد ست آورد. رو شهای بســـیاری جهت حل معادلات ترابرد نوترونها وجود دارد و یکی از روشـــهای قوی جهت حل معادلات ترابرد نوترونها اســـتفاده از روش هارمونیک‌های کروی می‌باشـــد که وابســـتگی زاویه‌ای شـــار نوترونها را براســـاس یک ســـری از توابع مقدماتی از جمله چند جمله‌ای‌های لژاندر ب سط می‌دهند. این روش دارای مزیت های خا صی بوده به طوریکه برای هر نوع هند سه‌ای، محا سبات به سادگی انجام گرفته و اغلب تقریبهای مراتب پائین دارای نتایج مطلوبی می‌با شند. در مقابل این مزیت‌ها، این روش دارای معایبی برای حالتهای پراکندگی ناهمســانگرد می‌باشــد که با اســتفاده این روش جوابها به کُندی همگرا شده و نیاز به تقریب‌های مراتب بالاتر می‌با شد. جهت برطرف نمودن آن می‌توان چند جمله‌ای‌های به غیر

از چند جمله‌ای لژاندر را برای بررسی چنین حالتهایی انتخاب نمود. به عنوان نمونه؛ در کند شدن با جذب بالا، چند جمله‌ای‌های چبیشو جهت محاسبه طول برون یابی شده دارای نتایج بهتری نسبت به تقریب P_N یا تقریب چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌باشد[۱]. هدف از این مقاله، ارائه روش تقریب چند جمله‌ای‌های چبیشو و محاسبه ضخامت بحرانی در یک تیغه یک بعدی می‌باشد.

روش کار :

۱- تقریب T_N

شکل کلی معادله ترابرد نوترون برای شار زاویه‌ای نوترونها درحالت مستقل از زمان یعنی هنگامیکه $\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0$ است به صورت زیر می‌باشد[۲]:

$$\begin{aligned}&\Omega.\nabla\Phi(r,\Omega,E)+\sigma_t(r,E)\Phi(r,\Omega,E)=\\&\iint\sigma_t(r,E')f(r;\Omega',E'\to\Omega,E)\Phi(r,\Omega',E')d\Omega'dE'+Q(r,\Omega,E)\end{aligned} \quad (۱)$$

حال اگر فرض شود که سطح مقطع نوترونها مستقل از انرژی باشد خواهیم داشت: $\sigma(r,E)=\sigma(r,E')=\sigma(r,E)$. به علاوه اگر توزیع زاویه‌ای نوترونهای ظاهر شده در اثر پراکندگی در نظر گرفته شود، یعنی $\int f(r,\Omega',E'\to\Omega,E)dE$ باید مستقل از انرژی E' گردد، که این معادل است با: $\int f(r;\Omega',E'\to\Omega,E)dE=c(r)f(r;\Omega'\to\Omega)$. که اگر $f(r;\Omega'\to\Omega)$ به یک نرمالیزه باشد داریم: $\int f(r;\Omega'\to\Omega)d\Omega=1$ که c(r) میانگین نوترونهای ظاهر شده در اثر برخورد در مکان r می‌باشد. حال اگر معادله (۱) را در $\int dE$ ضرب و از طرفین انتگرال گرفته شود می‌توان نوشت:

$$\Omega.\nabla\Phi(r,\Omega)+\sigma_t(r)\Phi(r,\Omega)=\sigma_t(r)c(r)\int f(r;\Omega'\to\Omega)\Phi(r,\Omega')d\Omega'+Q(r,\Omega) \quad (۲)$$

در هندسه یک تیغه، شار نوترون فقط تابع x و μ می‌باشد به طوریکه:

$$\Omega.\nabla\Phi=(\Omega.\hat{x})\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$\mu=\Omega.\hat{x}$$

حال پراکندگی فقط تابع زاویه پراکندگی قبل و بعد از برخورد در نظر گرفته می‌شود بنابراین می‌توان نوشت: $\sigma_s(x;\Omega'.\Omega)=\sigma_t(x)c(x)f(x;\Omega'\to\Omega)$. اگر فرض کنیم که پراکندگی همسانگرد باشد می‌توان نوشت:

$\sigma_s(x,\Omega'.\Omega)=\frac{1}{4\pi}\sigma_s(x)$. در نتیجه معادله ترابرد نوترونها در حالت پراکندگی همسانگرد و سطح آزاد (Q=0) به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&-a\le x\le a\\
&-1\le\mu\le1\\
&\mu\frac{d\Phi(x,\mu)}{dx}+\sigma_t\Phi(x,\mu)=\frac{\sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(x,\mu')d\mu'
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

که در عبارت فوق $\Phi(x,\mu)$ شار زاویه‌ای نوترونها یا چگالی نوترونها، x حرکت در جهت μ، σ_t سطح مقطع کل و σ_s سطح مقطع پراکندگی می‌باشد. حال اگر وابستگی زاویه‌ای شار نوترونها را با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبیشو نوع یک یا تقریب T_N بسط می‌دهیم. داریم [۳] [۴] [۵]:

$$\Phi(x,\mu)=\frac{T_0}{\pi\sqrt{1-\mu^2}}\varphi_0(x)+\frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}}\sum_{n=1}^{N}T_n(\mu)\varphi_n(x) \qquad (۴)$$

چند جمله‌ای‌های چبیشو نوع یک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n(\mu)=\cos(n\arccos(\mu)) \qquad -1\le\mu\le1 \qquad (۵)$$

که خاصیت تعامد و رابطه بازگشتی آن به ترتیب عبارتست از[۲]:

$$orthogonality\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1}\frac{T_n(\mu)T_m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}d\mu=\begin{cases}\pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & n=m\neq0\\ 0 & n\neq m\end{cases} \qquad (۶)$$

$$recurrent\quad relation\Rightarrow \quad 2\mu T_n(\mu)=T_{n+1}(\mu)+T_{n-1}(\mu) \qquad (۷)$$

اگر معادله (۴) در معادله (۳) قرار دهیم و طرفین معادله را در $T_m(\mu)$ ضرب نموده واز طرفین نسبت به μ انتگرال‌گیری شود با استفاده از معادلات (۶) و (۷) می‌توان معادلات مربوط به تقریب T_N را بدست آورد.

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx}+\sigma_t\varphi_0(x)=\sigma_s\varphi_0(x) \qquad (۸a)$$

$$\frac{d\varphi_2(x)}{dx}+\frac{d\varphi_0(x)}{dx}+2\sigma_t\varphi_1(x)=0 \qquad (۸b)$$

$$\frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx}+\frac{d\varphi_{n-1}(x)}{dx}+2\sigma_t\varphi_n(x)=\frac{(1+(-1)^n)}{1-n^2}\sigma_s\varphi_0(x) \qquad (۸c)$$

برای مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت که در معادلات (۸) ارائه شده است حل کلی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\varphi_n(x) = A_n(\nu)\exp(\frac{\sigma_t x}{\nu}) \qquad (۹)$$

با جایگذاری آن در معادله (۸) می‌توان عبارتی را برای مقادیر $A_n(\nu)$ تعیین نمود.

$$A_0(\nu) = 1 \qquad (۱۰a)$$

$$A_1(\nu) = -\nu(1-c)A_0(\nu), \quad c = \frac{\sigma_s}{\sigma_t}$$

$$A_1(\nu) + \nu(1-c)A_0(\nu) = 0 \qquad (۱۰b)$$

$$A_2(\nu) = \left(2\nu^2(1-c)-1\right)A_0(\nu)$$

$$A_2(\nu) + (2\nu)A_1(\nu) + A_0(\nu) = 0 \qquad (۱۰c)$$

$$A_{n+1}(\nu) + 2\nu A_n(\nu) + A_{n-1}(\nu) = -\frac{(1+(-1)^n)}{n^2-1}\nu c A_0(\nu), \quad n \ge 2 \qquad (۱۰d)$$

که ν یک مقدار ویژه می‌باشد. در روش P_N و T_N نیاز به محاسبه مقادیر مجزای ν می‌باشد. یک روش جهت محاسبه مقادیر معین ν استفاده از دترمینان ماتریس ضرایب $A_n(\nu)$ می‌باشد.

$$|M(\nu)|A = 0 \qquad (۱۱)$$

که در آن $M(\nu)$ یک ماتریس مربعی $N \times N$ است.

روش دیگر محاسبه مقادیر معین ν مجموعه $A_{n+1}(\nu) = 0$ می‌باشد که از $\varphi_{n+1}(x) = 0$ مشابه تقریب P_N می‌آید. نتایج محاسباتی برای مقادیر مجزای ν از هر دو روش یکسان است. به طور خلاصه می‌توان گفت که مقادیر مجزای ν با استفاده از تقریب T_N دارای ویژگیها و مقادیر مشابه‌ای با مقادیر مجزای ν در تقریب P_N دارند در نتیجه ضرایب فرد شار نوترون را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{(\frac{N+1}{2})} \beta_k A_n(\nu)\left[\exp\left(\frac{\sigma_t x}{\nu_k}\right) + (-1)^n \exp\left(-\frac{\sigma_t x}{\nu_k}\right)\right] \qquad (۱۲)$$

که از خاصیت $A_n(-\nu) = (-1)^n A_n(\nu)$ استفاده نموده و β_k ضرایب ثابتی بوده که از شرایط مرزی بدست می‌آیند. بنابراین حل کلی شار زاویه‌ای نوترونها براستفاده از تقریب T_N به صورت زیر می‌باشد.

$$\Phi(x,\mu) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} \sum_{k=1}^{\left(\frac{N+1}{2}\right)} \left\{ \begin{array}{l} \beta_k A_0(\nu_k) T_0(\nu_k)\cosh(\frac{\sigma_t x}{\nu_k}) + \sum_{n=1}^{N} \beta_k A_n(\nu_k) T_n(\nu_k)[(1+(-1)^n)\cosh(\frac{\sigma_t x}{\nu_k}) \\ +(1-(-1)^n)\sinh(\frac{\sigma_t x}{\nu_k})] \end{array} \right\} \qquad (۱۳)$$

۲- شرایط مرزی و کاربرد آن:

حل دقیق معادله ترابرد نوترونها با در نظر گرفتن شــرایط فیزیکی خاص در مرزها تعیین می‌گردد. به طور فیزیکی انتظار می‌رود که شار زاویه‌ای نوترونها در حالت سطح آزاد و حالت تقارن به صورت زیر باشد:

$$\Phi(a,-\mu)=\Phi(0,\mu)=0 \qquad \mu>0$$
$$\Phi(x,\mu)=\Phi(-x,\mu) \qquad (۱۴)$$

اما بیان شرایط مرزی دقیق (صفر شدن شار زاویه‌ای نوترون در مرزها) ممکن نیست. این مشکل از آنجا ناشی می شود که شــرایط مرزی در هر کدام از مرزها بیان کننده نصــف زاویه فضــایی یعنی $\mu>0$ یا $\mu<0$ می‌باشــد در حالیکه ضــرایب بســط $\varphi_n(x)$ بکار رفته در تقریب شــامل کلیه مقادیر $-1<\mu<1$ می‌باشــند. بنابراین روش واحدی جهت انتخاب شرایط مرزی در حالت سطح آزاد وجود ندارد. بر این ا ساس دو شیوه انتخاب می‌گردد. یکی برا ساس صفر شدن ضرایب بسط فرد در مرزها می‌باشد که به شرط مرزی مارشاک [۲] معروف است و دیگری شامل جایگزینی محیط خلأ خارج تیغه با یک محیط کاملاً جاذب می‌با شد که امکان بازگ‌شت نوترون ها وجود ندارد که به شرط مرزی مارک [۲] معروف است. برای محاسبه ضخامت بحرانی تیغه با استفاده از شرط مرزی مارک می‌توان نوشت:

$$\Phi(a,\mu_k)=0 \qquad ,\frac{N+1}{2}<k\leq N+1 \qquad (۱۵)$$

که μ_k، kامین ریشه $T_{N+1}(\mu_k)=0$ بوده که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(N+1)}\right) \qquad ,\frac{N+1}{2}<k\leq N+1 \qquad (۱۶)$$

با استفاده از معادلات (۱۳) و (۱۵) می‌توان معادله بحرانی زیر را تعیین نمود.

$$\sum_{m=1}^{(\frac{N+1}{2})}\left\{2T_0(\mu_k)A_0(\nu_m)\beta_m\cosh(\frac{\sigma_t a}{\nu_m})+2\sum_{n=1}^{N}\beta_m A_n(\nu_m)\left(e^{\left(\frac{\sigma_t a}{\nu_m}\right)}+(-1)^n e^{-\left(\frac{\sigma_t a}{\nu_m}\right)}\right)T_n(\mu_k)\right\}=0 \qquad (۱۷)$$

براساس تقریب T_1 می‌توان عبارتی تحلیلی برای ضخامت بحرانی ارائه نمود.

اگر در معادله (۱۷)، N را برابر ۱ قرار دهیم داریم:

$$2T_0(\mu_1)A_0(\nu_1)\beta_1\cosh(\frac{\sigma_t a}{\nu_1})+2\beta_1 A_1(\nu_1)\left(e^{\left(\frac{\sigma_t a}{\nu_1}\right)}-e^{-\left(\frac{\sigma_t a}{\nu_1}\right)}\right)T_1(\mu_1)=0 \qquad (۱۸)$$

$$2A_0(\nu_1)\beta_1\cosh(\frac{\sigma_t a}{\nu_1})=-4\beta_1 A_0(\nu_1)(\nu(1-c))\sinh(\frac{\sigma_t a}{\nu_1})\mu_1=0 \qquad (۱۹)$$

مطابق معادله (۵) $T_0(\mu_1)=1$ و $T_1(\mu_1)=\mu_1$ و بر ا ساس معادله (۱۶)، $\mu_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ همچنین ν_1 را می‌توان با صفر قرار دادن دترمینان معادله (۱۱) بدست آورد.

$$\begin{vmatrix} \nu(1-c) & 1 \\ 1 & 2\nu \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\nu_1^{\,2}(1-c)-1=0 \quad \Rightarrow \quad \nu_1=\frac{1}{\sqrt{2(1-c)}}$$

با قرار دادن این پارامترها در معادله (۱۹) داریم:

$$\tanh(a\sigma_t\sqrt{2(1-c)})=-\frac{1}{\sqrt{2(1-c)}}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{(1-c)}}$$

در نتیجه ضخامت بحرانی تیغه با استفاده از تقریب T_1 عبارتست از:

$$(a)_{Mark}=\frac{1}{\sigma_t\sqrt{2(1-c)}}\tanh^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-c}}\right) \qquad (۲۰)$$

شرط مرزی مارشاک براساس صفر شدن جریان فرودی نوترونها در شرط مرزی خلأ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\int_0^1 T_k(\mu)\Phi(0,\mu)d\mu=\int_0^1 T_k(-\mu)\Phi(a,-\mu)d\mu=0 \qquad \mu>0 \qquad (۲۱)$$

با اســـتفاده از معادله (۱۳) و شـــرط مرزی $\int_0^1 T_k(-\mu)\Phi(a,-\mu)d\mu=0$ می‌توان معادله بحرانی زیر را تعیین نمود. حل تحلیلی برای ضخامت بحرانی با استفاده از تقریب T_1 برای N=1 می‌توان نوشت:

$$(a)_{Marshak}=\frac{1}{\sigma_t\sqrt{2(1-c)}}\tanh^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{1-c}}\right) \qquad (۲۲)$$

نتایج:

در جدول شماره ۱ مقادیر ضخامت تیغه بحرانی بر حسب (cm) برای $\sigma_t=1cm^{-1}$ با ا ستفاده از ۲ شرط مرزی مارک و مارشاک با تقریب T_1 ارائه و با نتایج تقریب P_1 مقایسه گردیده است.

جدول شماره۱: مقایسه ضخامت بحرانی تیغه با استفاده از شرط مرزی مارک و مارشاک برای cهای مختلف.

Boundary Type	Mark		Marshak	
1/c	ضخامت(cm) در T_1	ضخامت(cm) در P_1	ضخامت(cm) در T_1	ضخامت(cm) در P_1
۱,۰۱	۱۰,۴۰۲	-	۱۰,۳۲۵	-
۱,۰۲	۷,۱۵۱۵	۵,۸۳۹۲	۷,۰۷۴۹	۵,۷۵۱۹
۱,۰۵	۴,۲۷۱۶	۳,۴۸۷۸	۴,۱۹۷۵	۳,۴۰۳۴
۱,۱۰	۲,۸۲۷۶	۲,۳۰۸۷	۲,۷۵۷۱	۲,۲۲۸۷
۱,۲۰	۱,۸۱۸۷	۱,۴۸۵۰	۱,۷۵۴۷	۱,۴۱۲۵
۱,۳۰	۱,۳۸۱۰	۱,۱۲۷۶	۱,۳۲۲۳	۱,۰۶۱۳
۱,۴۰	۱,۱۲۵۷	۰,۹۱۹۱	۱,۰۷۱۵	۰,۸۵۸۱
۱,۶۰	۰,۸۳۲۳	۰,۶۷۹۶	۰,۷۸۵۴	۰,۶۲۶۹
۱,۸۰	۰,۶۶۴۹	۰,۵۴۲۹	۰,۶۲۳۵	۰,۴۹۶۶
۲,۰۰	۰,۵۵۵۴	۰,۴۵۳۵	۰,۵۱۸۳	۰,۴۱۲۱

نتیجه گیری:

هدف از ارائه این مقاله، حل معادله ترابرد نوترونها در حالت پراکندگی همسانگرد جهت محاسبه ضخامت یک تیغه بحرانی با استفاده از تقریب های P_N و T_N با بکارگیری شرایط مرزی مارک و مارشاک می‌باشد. با بررسی نتایج حاصل می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقدار $\frac{1}{c}=\frac{\sigma_t}{\sigma_s}$ یعنی افزایش میزان جذب تقریب T_1 نسبت به تقریب P_1 نتایج متفاوتی را ایجاد می‌نماید. دلیل این تغییرات بدان علت است که طبق بررسی های انجام شده نشان داده شده است [۲] [۱] که برای نواحی با جذب کم، تقریب P_N مقادیر صحیح تری نسبت به تقریب T_N ارائه می‌کند در حالیکه در نواحی با جذب بالا تقریب T_N بهتر از تقریب P_N می‌باشد.

مرجع ها:

[۱] Conkie. W. R.; "Polynomial approximations in neutron transport theory". Nucl Sci Eng. (1959) 6, 260–266.

[۲] Anli. F, Yasa. F. Güngör. S. and Öztürk. H. ; "T_N approximation to reflected slab and computation of the critical half thickness." J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.(2006) 101 (1), 135–140.

[۳] Bell. G. I. and Glasstone. S.; Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold Company". New York. (1970).

[۴] Bülbül. A. and Anli. F.; "Chebyshev polynomial (T_N) approximation to neutron *transport* theory and application to the critical slab problem" Kerntechnik. (2008) 73, 163–166.

[۵] Yilmazer. A.; "Solution of one-speed neutron transport equation for strongly anisotropic scattering by T_N approximation". Slab criticality problem. J. Quant Spectrosc Radiat Transfer .(2007) 34, 743–751.