



اعتبار سنجی روش گسترش موج در تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت شرایط مرزی مختلف

عباس هادی^۱، سعید شاخصی^۲، حمید رضا اویسی^۳، جمشید فضیلتی^۴

۱- پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

۲- پژوهشگاه فضایی ایران، پژوهشکده سامانه‌های حمل و نقل فضایی، تهران، ایران

۳- دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی هوافضا، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش گسترش موج بررسی شده است. به این منظور ابتدا معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای مبتنی بر تئوری مرتبه اول برشی سندرز-کوپتر با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده‌اند. سپس معادلات حاکم با فرض میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج حل شده‌اند. خواص مواد هدفمند مطابق قانون توانی در جهت ضخامت تغییر می‌کند. فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف، بدست آمده و با نتایج مراجع موجود مقایسه شده‌اند. مشخص می‌شود که استفاده از میدان تغییر مکان به فرم گسترش موج به صورت یک روش مؤثر و قابل اطمینان عمل نموده و به ازای شرایط مرزی مختلف نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد. البته به ازای شرایط مرزی مختلف و ابعاد هندسی پوسته، دقت روش گسترش موج نیز متفاوت است.

واژه های کلیدی: فرکانس طبیعی، پوسته استوانه‌ای هدفمند، گسترش موج، شرایط مرزی مختلف

۱- مقدمه

پوسته‌ها یکی از مهمترین و پرکاربردترین اجزای سازه‌های هستند. پوسته‌ها در شکلها و کاربردهای متنوعی معرفی شده اند که به عنوان مثال می توان به استفاده از آنها در بدنه، بال و موتور هواپیماها و فضاپیماها، لوله‌های انتقال نفت، گاز و مواد شیمیایی، مخازن ذخیره آب و سوخت، بدنه زیردریایی و بسیاری از کاربردهای مشابه اشاره نمود. گسترده‌گی کاربرد پوسته‌های استوانه‌ای، علت رشد چشمگیر مطالعات انجام یافته در این حوزه است.

مطالعه فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ها جهت بررسی رفتار دینامیکی آنها از اهمیت کاربردی بالایی برخوردار است. به همین منظور از تئوری الاستیسیته برای بررسی رفتار پوسته‌ها استفاده می‌شود. روابط بین تنش و کرنش بر حسب تغییر مکان‌های ناشی از تغییر شکل در جهات محوری، محیطی و شعاعی بدست آمده و عبارتهای مربوط به انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای انجام شده (در صورت وجود نیروهای

خارجی) پوسته استوانه‌ای به فرم انتگرالی بیان می‌شوند. این عبارت‌ها بر حسب نوع تئوری پوسته به کار رفته، متفاوت خواهد بود. مسأله با استفاده از روش تغییرات به صورت دستگاهی از معادلات مشتق جزئی در خواهد آمد. سپس با استفاده از روش‌های متفاوت، دستگاه معادلات مشتق جزئی حل می‌شود.

بررسی و مطالعه فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای در تحقیقات متعددی مورد توجه قرار گرفته است. تحقیق جامعی توسط لیسا [۱] انجام یافته که شامل بررسی تحقیقات در زمینه ارتعاشات پوسته‌ها می‌شود. ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای هدفمند (Functionally graded) دو بعدی روی بستر الاستیک توسط ابراهیمی و نجفی‌زاده [۲] بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها بررسی گردید. فارسبرگ [۳] اثرات شرایط مرزی بر خواص ارتعاشی پوسته‌های نازک استوانه‌ای را بررسی نمود. خمش، کمناش و ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به ازای شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد توسط شادمهری و همکاران [۴] مورد بررسی قرار گرفت. شرما [۵] با استفاده از تئوری پوسته سندرز خواص ارتعاشی پوسته‌های نازک استوانه‌ای را تحت بعضی از شرایط مرزی بررسی نمود. سودل [۶] فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای را با فرض تغییر شکل‌های عرضی غالب تحت شرایط مرزی مختلف بررسی نمود. اثر شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های نازک استوانه‌ای کامپوزیتی با استفاده از توابع تیر برای تغییر شکل محوری، توسط لم و لوی [۷] بررسی شد. مسینا و سولدلتو [۸] با استفاده از روش ریتز فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت شرایط مرزی مختلف را تعیین نمودند.

اخیراً روش جدیدی برای توصیف میدان تغییر مکان به فرم گسترش موج (Wave propagation) توسط ژانگ و همکاران [۹، ۱۰] توسعه داده شده است که به کمک آن می‌توان به ازای شرایط مرزی مختلف فرکانسهای طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای را با انجام سریعتر محاسبات و بدون پیچیدگی‌های روش‌های معمول دیگر محاسبه نمود. در روش گسترش موج، پارامتر مودال محوری با فرمول مشخصه عدد موج تخمین زده می‌شود. این اعداد موج محوری، همان مقادیر ویژه تقریبی توابع تیر هستند. این روش توسط ژوبین [۱۱] نیز برای بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای همسانگرد (Isotropic) مورد استفاده قرار گرفت.

۱- دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا و سرطراح سازه مرکز طراحی بالگرد، هسا، a_hadi307@yahoo.com (نویسنده مخاطب)

۲- استادیار، مهندسی مکانیک

۳- استاد، مهندسی هوافضا

۴- استادیار، مهندسی هوافضا

کرنش‌های متناظر با میدان تغییر مکان (۲) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{x,0} + zk_x \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta,0} + zk_\theta \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta,0} + zk_{x\theta} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz,0} \quad , \quad \gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z,0} \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $\varepsilon_{i,0} (i = x, \theta)$ و $\gamma_{i,0} (i = x\theta, xz, \theta z)$ کرنش‌های عمودی و برشی سطح میانی و $k_i (i = x, \theta, x\theta)$ معرف انحناهای سطح میانی می‌باشند. روابط بین کرنش‌های میانی، انحناها و تغییر مکان (روابط سینماتیک) مطابق با تئوری سندرز-کویتز به صورت زیر می‌باشند [۱۲]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{\theta,0} = \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta,0} &= \frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xz,0} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z,0} &= \psi_\theta + \frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R} \\ k_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad , \quad k_\theta = \frac{\partial \psi_\theta}{R\partial\theta} \\ k_{x\theta} &= \frac{\partial \psi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن R شعاع استوانه می‌باشد.

۲-۳- روابط متشکله

ماتریس سختی ماده هدفمند تشکیل شده از دو ماده ایزوتروپ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (5)$$

که ضرایب آن به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-v^2(z)} \\ Q_{12} &= \frac{v(z)E(z)}{1-v^2(z)} \\ Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+v(z))} \\ Q_{44} &= Q_{55} = K \frac{E(z)}{2(1+v(z))} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن K ضریب تصحیح برش و برابر $5/6$ در نظر گرفته می‌شود [۱۳].

روابط متشکله برای پوسته مورد بررسی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{\theta z,0} \end{Bmatrix}$$

که در آن:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad , \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (8)$$

با بررسی منابع موجود مشخص می‌شود که تاکنون تحقیق جامعی در خصوص بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای نسبتاً ضخیم از جنس مواد هدفمند تحت شرایط مرزی مختلف با بهره‌گیری از روش گسترش موج انجام نشده است. بنابراین تحقیق حاضر به منظور بررسی کارایی و دقت روش گسترش موج در بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف انجام می‌شود. به این منظور ابتدا معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای بر اساس تئوری مرتبه اول برشی سندرز-کویتز با استفاده از اصل همبالتون استخراج می‌شوند. سپس با استفاده از میدان تغییر مکان به فرم گسترش موج، فرکانس‌های طبیعی پوسته به ازای شرایط مرزی مختلف بدست آمده و با نتایج مراجع موجود مقایسه می‌شوند. شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ساده-ساده، گیردار-گیردار، گیردار-ساده و گیردار-آزاد می‌باشد. با مقایسه‌های انجام شده کارایی، دقت و محدوده کاربرد روش گسترش موج به ازای شرایط مرزی مختلف در دو انتهای پوسته ارزیابی می‌شوند. همچنین با تکیه بر تئوری توسعه داده شده اثرات ترکیب ماده هدفمند و شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات آزاد پوسته بررسی خواهد شد.

۲- روابط تئوری

۲-۱- الگوی ماده هدفمند

ماده هدفمند مورد بررسی در این تحقیق به گونه‌ای از ترکیب دو ماده تشکیل شده است که در آن خواص ماده در طول ضخامت پوسته با توجه به رابطه توانی زیر تغییر می‌کند:

$$P(z) = (P_0 - P_i) V_0 + P_i \quad (1)$$

$$V_0 = \left(\frac{z + 0.5h}{h} \right)^N \quad , \quad 0 \leq N \leq \infty$$

که در آن P_0 و P_i به ترتیب معرف خاصیت ماده در سطوح بیرونی و داخلی پوسته و N شاخص کسر حجمی ماده می‌باشند. در این تحقیق فرض می‌شود که خواص ماده شامل مدول الاستیسیته $E(z)$ ، چگالی $\rho(z)$ و ضریب پواسون $\nu(z)$ مطابق رابطه (۱) تغییر می‌کنند.

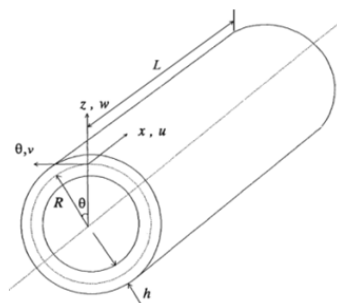
۲-۲- سینماتیک مسأله

پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت h و طول L را تحت بستر الاستیک پسترناک مطابق شکل ۱ در نظر بگیرد.

مطابق تئوری مرتبه اول برشی، تغییر مکان هر نقطه دلخواه پوسته با رابطه زیر قابل توصیف است:

$$\begin{aligned} U(x, \theta, t) &= u(x, \theta, t) + z\psi_x(x, \theta, t) \\ V(x, \theta, t) &= v(x, \theta, t) + z\psi_\theta(x, \theta, t) \\ W(x, \theta, t) &= w(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن u, v و w به ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان سطح میانی در جهات x, θ و z و همچنین ψ_x و ψ_θ به ترتیب چرخش حول محورهای x و θ می‌باشند.



شکل ۱- مشخصات هندسی پوسته استوانه‌ای

$$-\frac{N_{\theta\theta}}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R\partial\theta} = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R\partial\theta} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{R\partial\theta} - Q_\theta = I_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \quad (18)$$

معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان را می‌توان با

جایگذاری روابط (۴) و (۷) در معادلات (۱۸-۱۴) استخراج نمود:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_\theta \end{Bmatrix} = 0 \quad (19)$$

که در آن عملگرهای دیفرانسیلی خطی می‌باشند.

روش حل

میدان تغییر مکان پوسته به فرم گسترش موج به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۰، ۱۱]:

$$\begin{aligned} u &= A \cos(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ v &= B \sin(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ w &= C \cos(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ \psi_x &= D \cos(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ \psi_\theta &= E \sin(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن k_m و n به ترتیب پارامتر مودال محوری و عدد موج محیطی و A, B, C, D, E ضرایب ثابت مجهول می‌باشند که معرف دامنه ارتعاشات

هستند. همچنین ω فرکانس طبیعی حرکت و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشند.

به منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت

شرایط مرزی مختلف، لازم است مقدار پارامتر مودال محوری (k_m) مناسب را تعیین نمود. از آنجا که بررسی ارتعاشات خمشی پوسته مورد نظر است، در این تحلیل فرض می‌شود که انتشار موج در جهت محوری پوسته استوانه‌ای با مطالعه انتشار موج در یک تیر با شرایط مرزی مشابه، بدست می‌آید. به عبارت دیگر در این شیوه فرض می‌شود که شکل موده‌های خمشی پوسته استوانه‌ای در جهت طولی یکسان و به فرم ارتعاشات عرضی تیری است که همان شرایط مرزی را دارد. مقادیر پارامتر مودال محوری به ازای شرایط مرزی مختلف در جدول ۱ آورده شده است [۱۰]. عدد طول موج محوری با m نشان داده می‌شود.

جدول ۱- پارامتر مودال محوری به ازای شرایط مرزی مختلف

پارامتر مودال	شرایط مرزی
$k_m = m\pi/L$	ساده-ساده
$k_m = (2m+1)\pi/2L$	گیردار-گیردار
$k_m = (4m+1)\pi/4L$	گیردار-ساده
$k_m = (2m-1)\pi/2L$	گیردار-آزاد

با توجه به پارامتر مودال محوری متناسب با شرایط مرزی مورد نظر

(جدول ۱) و با جایگذاری میدان تغییر مکان معرفی شده (رابطه ۲۰) در

معادلات حاکم و ساده سازی، دستگاه معادلات جبری خطی زیر حاصل

می‌شود:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix} = 0 \quad (21)$$

$$C_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ii} dz, \quad (i = 4, 5)$$

۴-۲- معادلات حرکت

معادلات حرکت حاکم بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) dt = 0 \quad (9)$$

U و T به ترتیب انرژی‌های جنبشی و کرنشی پوسته و W کار انجام شده توسط نیروهای خارجی هستند. t_1 و t_2 معرف زمان دلخواه هستند. از آنجا که هدف مقاله بررسی ارتعاشات آزاد پوسته است، بنابراین کار نیروهای خارجی برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

با تعریف بردار کرنش و همچنین بردار نیروها و ممان‌ها به صورت

زیر:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \\ \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{\theta z,0} \end{Bmatrix}, \quad \{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \\ Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} \quad (10)$$

انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای تحت بستر الاستیک به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{N\}^T \{e\} R d\theta dx \quad (11)$$

با در نظر گرفتن تمامی مؤلفه‌های اینرسی شامل اینرسی چرخشی،

انرژی جنبشی پوسته استوانه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[I_1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + 2I_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + I_3 \left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right)^2 \right) \right] R d\theta dx \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن عبارت‌های اینرسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz, \quad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz, \\ I_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در رابطه (۹) و انجام محاسبات

طولانی ریاضی، معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای تحت بستر الاستیک بر پایه تئوری سندرز-کویتز مرتبه اول برشی به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial\theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{2R^2\partial\theta} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R\partial\theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{2R\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \quad (15)$$

همانگونه که از مقایسه ارائه شده در جدول‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود، همخوانی بسیار مناسبی بین نتایج بدست آمده از تئوری توسعه داده شده با نتایج مراجع وجود دارد. بنابراین روش گسترش موج با دقت بسیار بالا فرکانس‌های طبیعی پوسته با شرایط مرزی ساده را تخمین می‌زند.

۳-۲- شرایط مرزی گیردار-گیردار

با انتخاب پارامتر مودال محوری مناسب، مطالعه فرکانس‌های طبیعی چند استوانه با مشخصات هندسی و مواد متفاوت برای مقایسه در این شرایط مرزی صورت گرفته است. مقایسه نتایج تحقیق حاضر با مراجع موجود در ادامه آمده است. لازم به توضیح است که مدل‌سازی اجزای محدود استوانه‌های مورد بررسی در نرم افزار نستر به منظور تحلیل مودال، انجام گردیده است که نتایج آنها در جدول‌ها آمده است.

جدول ۴- فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط

مرزی گیردار-گیردار
($L=20\text{ m}$, $h=0.01\text{ m}$, $R=1\text{ m}$, $E=2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$, $\nu=0.3$, $\rho=7850\text{ kg/m}^3$)

(m,n)	ژانگ [۹]	ژوبین [۱۱]	نرم افزار نستر	مقاله حاضر
1,2	12.25	12.13	12.00	12.12
1,3	19.64	19.61	19.59	19.60
2,3	23.18	23.28	23.14	23.27
2,2	27.69	28.06	27.17	28.06
1,1	-	30.09	28.28	30.10
3,3	31.60	31.97	31.55	31.96
1,4	36.70	36.48	36.48	36.46
2,4	37.55	37.38	37.34	37.36
3,4	39.87	39.77	39.68	39.75

جدول ۵- فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط

مرزی گیردار-گیردار
($L=0.8\text{ m}$, $h=0.0011016\text{ m}$, $R=0.1529508\text{ m}$, $E=6.473 \times 10^{10}\text{ Pa}$, $\nu=0.3285$, $\rho=2700\text{ kg/m}^3$)

n	ویسنیوسکی [۱۸]	سانتیگو و ویسنیوسکی	نرم افزار نستر	مقاله حاضر
$m=1$				
1	1206.8	1206.9	1206.9	1643.7
2	632.2	631.6	631.6	759.9
3	368.1	369.3	369.3	408.6
4	272.7	280.0	280.0	293.3
5	291.0	308.5	308.5	314.2
6	378.5	406.8	406.8	410.8
7	504.1	543.8	543.8	547.6
8	656.2	708.5	708.5	712.3
9	831.1	897.5	897.5	901.3
10	1027.7	1109.5	1109.5	1113.4
$m=3$				
1	3423.0	3420.6	3420.6	3802.0
2	2136.2	2134.2	2134.2	2464.2
3	1397.9	1397.4	1397.4	1596.0
4	976.6	979.0	979.0	1086.7
5	744.5	753.0	753.0	810.5
6	648.7	668.1	668.1	699.7
7	661.4	695.0	695.0	714.5
8	753.2	802.0	802.0	816.7
9	897.8	961.8	961.8	975.1
10	1078.9	1158.7	1158.7	1172.0
$m=5$				
1	-	4443.4	4443.4	4568.0
2	3384.7	3379.1	3379.1	3598.0
3	2490.7	2488.9	2488.9	2704.5
4	1861.7	1863.8	1863.8	2029.8
5	1442.9	1449.8	1449.8	1564.4
6	1181.7	1196.2	1196.2	1272.2
7	1048.3	1074.3	1074.3	1125.4
8	1023.8	1064.6	1064.6	1101.7
9	1088.1	1145.2	1145.2	1175.8
10	1219.2	1292.9	1292.9	1321.3

که در آن T_{ij} ها عبارت‌های جبری بر حسب ثوابت ماده و مشخصات هندسی پوسته هستند. معیار بحث ارتعاشات پوسته، داشتن جواب غیر بدیهی دستگاه معادلات (۲۱) است که با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[T_{ij}]$ حاصل می‌شود:

$$\det([T_{ij}]) = 0 \quad (22)$$

۳-۳- بحث و بررسی نتایج عددی

در این بخش ضمن انجام صحت سنجی نتایج روش گسترش موج به ازای شرایط مرزی مختلف، کارایی و تعیین دقت این روش نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۳-۳-۱- شرایط مرزی ساده

در اولین مقایسه فرکانس‌های طبیعی دو پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده در هر دو انتها مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج مقایسه در جدول-های ۲ و ۳ ارائه شده است. به منظور مقایسه کامل‌تر، مدل اجزای محدود دو استوانه مورد بررسی در نرم افزار تجاری نستر (Nastran) تهیه و تحلیل مودال جهت استخراج فرکانس‌های طبیعی بر روی آنها انجام گرفته است که نتایج آن در جدول‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌گردد. لازم به توضیح است که نتایج مراجع [۱۴-۱۷] به ترتیب بر پایه ۱- تئوری پوسته نازک سندرز و به روش اجزای محدود، ۲- نتایج آزمایش، ۳- تئوری پوسته نازک سندرز و به روش ریتز و ۴- تئوری مرتبه سوم برشی و به روش ریلی-ریتز می‌باشند.

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط

مرزی ساده
($m=1$, $L=0.41\text{ m}$, $h=0.001\text{ m}$, $R=0.3015\text{ m}$, $E=2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$, $\nu=0.3$, $\rho=7850\text{ kg/m}^3$)

n	مرجع [۱۴]	مرجع [۱۵]	نرم افزار نستر	مقاله حاضر
2	-	-	1453.20	1453.23
3	-	-	967.52	967.42
4	-	-	663.30	663.19
5	-	-	476.55	476.46
6	-	-	363.82	363.77
7	305.22	318	301.94	301.93
8	281.31	278	278.94	278.99
9	288.24	290	286.24	286.35
10	317.49	334	315.62	315.78
11	362.20	362	360.34	360.56
12	417.94	418	416.06	416.32
13	482.22	478	480.28	480.58
14	553.67	550	551.65	552.00
15	631.58	626	629.46	629.85

جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط

مرزی ساده
($L=0.2032\text{ m}$, $h=0.00254\text{ m}$, $R=0.0508\text{ m}$, $E=2.068427 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$, $\nu=0.3$, $\rho=7850\text{ kg/m}^3$)

m	n	مرجع [۱۶]	مرجع [۱۷]	نرم افزار نستر	مقاله حاضر
1	2	2043.8	2043.6	2043.1	2042.8
2	2	5635.4	5635.2	5635.1	5632.6
3	3	8932.5	8932.1	8929.8	8924.6
4	4	11407.5	11407.2	11395.0	11389.9
5	5	13253.2	13252.8	13220.0	13219.2
6	6	14790.0	14789.8	14724.0	14729.7
1	3	2195.1	2195.0	2188.2	2187.5
2	2	4035.5	4035.3	4027.2	4026.3
3	3	6614.6	6614.3	6603.4	6599.4
4	4	9121.0	9120.7	9100.1	9093.5
5	5	11359.0	11358.7	11317.0	11310.7
6	6	13392.3	13392.1	13313.0	13310.9

استوانه‌های تعیین می‌گردند. در جدول ۷ مقایسه انجام شده بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع موجود، آورده شده است. لازم به توضیح است که مدل‌سازی اجزای محدود استوانه مورد بررسی در نرم افزار نستر ن منظر تحلیل مودال، انجام گردیده است که نتایج آنها در جدول آمده است.

جدول ۷- فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌های همسانگرد با شرایط مرزی گیردار-آزاد
 $(m=1, L=0.502 \text{ m}, h=0.00163 \text{ m}, R=0.0635 \text{ m}, E=2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \nu=0.28, \rho=7800 \text{ kg/m}^3)$

مقاله حاضر	نرم افزار نستر	گیل (آزمایش [۲۰])	n
294.3	315.2	293.0	2
766.0	768.2	760.0	3
1461.7	1462.5	1451.0	4
2359.0	2359.8	2336.0	5
3454.5	3455.9	3429.0	6

با بررسی جدول ۷ مشاهده می‌گردد که همخوانی مناسبی بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع دیگر وجود دارد.

با بررسی نتایج ارائه شده به ازای شرایط مرزی مختلف، مشخص می‌شود که استفاده از میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج در بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای، به صورت یک روش مؤثر و قابل اطمینان عمل نموده و در محدوده فرکانس‌های متناظر با تعداد طول موج محیطی بالاتر و تعداد طول موج محوری پایین‌تر به ازای شرایط مرزی مختلف نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد. البته در حالت شرایط مرزی ساده در دو انتها، نتایج این روش در تمامی محدوده‌های فرکانسی کاملاً دقیق می‌باشد.

۳-۵- ارتعاش آزاد استوانه هدفمند

به منظور اعتبار سنجی نتایج تئوری توسعه داده شده برای بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هدفمند، استوانه‌ای با مشخصات ذکر شده در جدول ۸ که سطح درونی و بیرونی آن به ترتیب از جنس نیکل و فولاد تشکیل شده است، در نظر گرفته می‌شود. جدول ۸ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته با عدد موج محیطی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که همخوانی مناسبی بین نتایج حاضر و نتایج لوی و همکاران [۲۱] که از تئوری پوسته لای استفاده نموده‌اند، وجود دارد.

جدول ۸- فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط

مرزی ساده
 $E_o=2.07788 \times 10^{11} \text{ Pa}, \nu_o=0.317756, \rho_o=8166 \text{ kg/m}^3,$
 $E_i=2.05098 \times 10^{11} \text{ Pa}, \nu_i=0.31, \rho_i=8900 \text{ kg/m}^3$
 $(m=1, h/R=0.002, L/R=20)$

مقاله حاضر	N=5		N=1		N=0.5		n
	لوی و همکاران [۲۱]	مقاله حاضر	لوی و همکاران [۲۱]	مقاله حاضر	لوی و همکاران [۲۱]	مقاله حاضر	
12.9977	12.998	13.2111	13.211	13.3211	13.321	1	
4.4062	4.4068	4.4794	4.48	4.5162	4.5168	2	
4.0884	4.0891	4.1561	4.1569	4.1902	4.1911	3	
6.9245	6.9251	7.0377	7.0384	7.0966	7.0972	4	
11.0603	11.061	11.2403	11.241	11.3349	11.336	5	
16.1910	16.192	16.4542	16.455	16.5929	16.594	6	
22.2720	22.273	22.6338	22.635	22.8247	22.826	7	
29.2939	29.296	29.7695	29.771	30.0208	30.023	8	
37.2539	37.257	37.8587	37.862	38.1784	38.181	9	
46.1513	46.155	46.9005	46.905	47.2965	47.301	10	

لازم به توضیح است که نتایج تحقیقات ژوبین [۱۱] بر پایه تئوری پوسته نازک فلوگه، نتایج ژانگ [۹] و سانتیاگو و ویسنیوسکی [۱۸] هر دو با استفاده از روش اجزای محدود می‌باشد. همانگونه که از نتایج ارائه شده مشاهده می‌شود برای استوانه مورد بررسی در جدول ۴ همخوانی مناسبی بین نتایج حاضر با نتایج مراجع وجود دارد. همچنین از بررسی جدول ۵ مشاهده می‌شود به ازای تمامی اعداد طول موج محوری (m)، با افزایش عدد طول موج محیطی (n) اختلاف بین نتایج بدست آمده از تحقیق حاضر با نتایج مرجع [۱۸] و نتایج نستر ن کمتر می‌شود، به گونه‌ای که به ازای عدد طول موج محوری برابر با ۱ و اعداد طول موج محیطی بالاتر از ۳، تفاوت ناچیزی بین نتایج بدست آمده با نتایج مرجع و نتایج نستر ن وجود دارد. همچنین به ازای اعداد طول موج محوری برابر با ۳ و ۵ و اعداد طول موج محیطی بالاتر از ۵ تفاوت ناچیزی بین نتایج بدست آمده با نتایج مرجع و نتایج نستر ن وجود دارد. با بررسی جدول ۵ که استوانه مورد بررسی آن دارای طول نسبتاً کوتاهی می‌باشد، می‌توان چنین بیان نمود که استفاده از میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج در محدوده فرکانس‌های پایین (محدوده فرکانسی مورد توجه در طراحی سازه) دارای دقت مناسب می‌باشد. همچنین با بررسی مشخصات هندسی استوانه‌های اشاره شده در جدول‌های ۴ و ۵ مشخص می‌شود که برای پوسته‌های با طول کوتاه‌تر به دلیل صرفنظر کردن از تداخل (کوپلینگ) بین مودهای محوری و محیطی در روش گسترش موج، تفاوت بین نتایج حاضر با نتایج نستر ن بیشتر است. اثر این تداخل برای پوسته‌های نازک طولانی و به ازای مودهای بالاتر کمتر می‌شود.

۳-۳- شرایط مرزی گیردار-ساده

در این بخش شرایط مرزی در یک انتهای استوانه گیردار و در انتهای دیگر از نوع ساده می‌باشد. با انتخاب پارامتر مودال محوری مناسب در این شرایط و اعمال آن در تئوری توسعه داده شده، پارامتر فرکانس گیردار-ساده، تعیین می‌گردد. در جدول ۶ مقایسه انجام شده بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع موجود، آورده شده است.

جدول ۶- پارامتر فرکانس Ω پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی گیردار-ساده

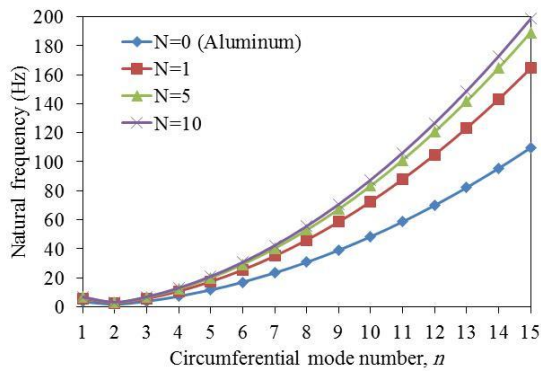
$(m=1, L/R=20, h/R=0.01, E=2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \nu=0.3, \rho=7850 \text{ kg/m}^3)$

n	لوی و همکاران [۱۹]	ژانگ [۹]	ژوبین [۱۱]	مقاله حاضر
1	0.023974	0.024721	0.024722	0.024721
2	0.011225	0.011281	0.011281	0.011275
3	0.022310	0.022335	0.022335	0.022328
4	0.042139	0.042166	0.042166	0.042151
5	0.068024	0.068054	0.068054	0.068022
6	0.099738	0.099771	0.099772	0.099704
7	0.137244	0.137279	0.137280	0.137155
8	0.180531	0.180569	0.180569	0.180356
9	0.229596	0.229636	0.229636	0.229293
10	0.284437	0.284478	0.284478	0.283955

با بررسی جدول ۶ مشاهده می‌گردد که همخوانی مناسبی بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع دیگر وجود دارد.

۳-۴- شرایط مرزی گیردار-آزاد

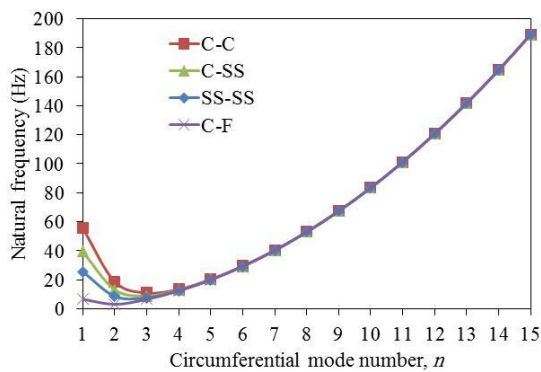
در این حالت شرایط مرزی در یک انتهای استوانه گیردار و در انتهای دیگر از نوع ساده می‌باشد. با انتخاب پارامتر مودال محوری مناسب در این شرایط و اعمال آن در تئوری توسعه داده شده، فرکانس‌های طبیعی پوسته



شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی گیردار- آزاد

از بررسی نمودارهای ارائه شده مشخص می‌شود که با افزایش عدد کسر حجمی، فرکانس طبیعی پوسته نیز به ازای تمامی اعداد طول موج محیطی افزایش می‌یابد. دلیل این افزایش مربوط به زیادتر شدن درصد آلومینا در ترکیب ماده هدفمند می‌شود. از آنجا که میزان سفتی این ماده از آلومینیوم بسیار بیشتر است، این موضوع باعث افزایش فرکانس طبیعی پوسته می‌شود. البته این میزان افزایش به ازای برخی از اعداد طول موج محیطی کمتر است. همچنین با افزایش عدد طول موج محیطی، تغییرات فرکانس طبیعی با عدد کسر حجمی بیشتر می‌شود.

شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با عدد موج محیطی شرایط مرزی مختلف و عدد کسر حجمی ۵ ($N=5$) را نشان می‌دهد. این بررسی به ازای عدد موج محوری برابر ۱ ($m=1$) صورت گرفته است. همانگونه که مشاهده می‌گردد اثر شرایط مرزی به ازای اعداد موج محیطی کمتر از ۴ قابل مشاهده بوده و در این محدوده فرکانس طبیعی پوسته در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار نسبت به بقیه شرایط مرزی بالاتر قرار می‌گیرد و بعد از آن به ترتیب فرکانس‌های طبیعی به ازای شرایط مرزی گیردار-ساده، ساده-ساده و گیردار-آزاد قرار می‌گیرند.

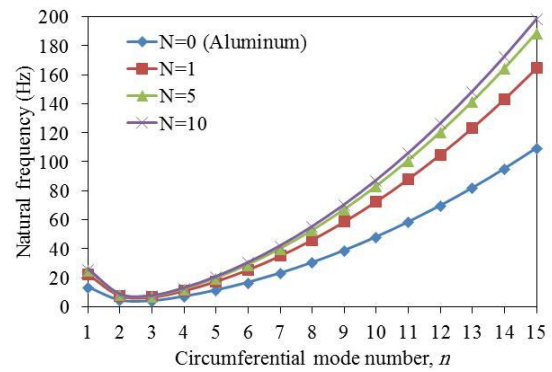


شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند به ازای شرایط مرزی مختلف

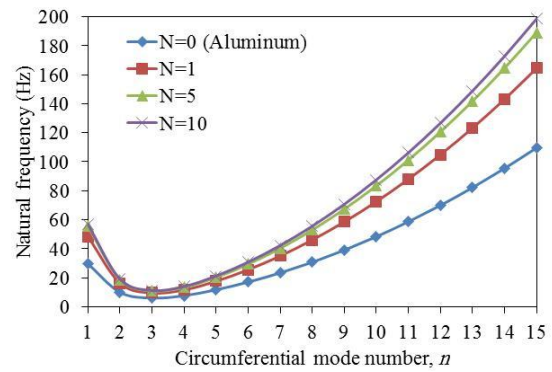
۴- نتیجه گیری

با توجه به سرعت پردازش و سهولت استفاده از روش گسترش موج، هدف عمده این تحقیق بررسی اعتبار و کارایی آن در تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف و همچنین بررسی اثرات ترکیب مواد هدفمند و شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات آزاد پوسته می-

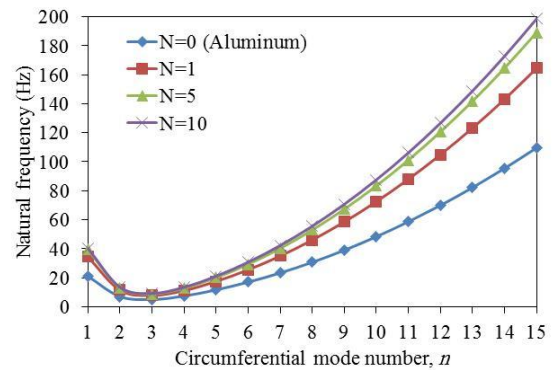
در ادامه اثر ترکیب ماده هدفمند بر خواص ارتعاشی پوسته استوانه‌ای به ازای شرایط مرزی مختلف بررسی می‌شود. سطح داخلی پوسته استوانه-ای مورد نظر از آلومینا و سطح خارجی آن از آلومینیوم تشکیل یافته است. خواص مواد شامل مدول الاستیسیته و چگالی برای آلومینا برابر $E_i = 380 \text{ GPa}, \rho_i = 3800 \text{ kg/m}^3$ و برای آلومینیوم برابر $E_o = 70 \text{ GPa}, \rho_o = 2700 \text{ kg/m}^3$ می‌باشند. ضریب پواسون هر دو ماده برابر $\nu_i = \nu_o = 0.3$ در نظر گرفته شده است. شکل‌های ۲ تا ۵ به ترتیب تغییرات فرکانس طبیعی پوسته با عدد موج محیطی (n) و عدد کسر حجمی را به ازای شرایط مرزی ساده-ساده (SS-SS)، گیردار-گیردار (C-C)، گیردار-ساده (C-SS) و گیردار-آزاد (C-F) را نشان می‌دهند. نتایج حاصل شده به ازای عدد موج محوری $m=1$ بدست آمده‌اند.



شکل ۲- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی ساده-ساده



شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی گیردار-گیردار



شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی گیردار- ساده

- [6] W. Soedel, "A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions," *Journal of sound and vibration*, vol. 70, pp. 309-317, 1980.
- [7] K. Y. Lam and C. T. Loy, "Effects of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell," *Journal of sound and vibration*, vol. 188, pp. 363-384, 1995.
- [8] A. Messina and K. P. Soldatos, "Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 227, pp. 749-768, 1999.
- [9] X. M. Zhang, G. R. Liu, and K. Y. Lam, "Vibration analysis of thin cylindrical shells using the wave propagation approach," *Journal of sound and vibration*, vol. 239(3), pp. 397-403, 2001.
- [10] X. M. Zhang, G. R. Liu, and K. Y. Lam, "Coupled vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells using the wave propagation approach," *Applied Acoustics*, vol. 62, pp. 229-243, 2001.
- [11] L. Xuebin, "Study on free vibration analysis of circular cylindrical shells using wave propagation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 311, pp. 667-682, 2008.
- [12] S. Wang and D. J. Dawe, "Buckling of composite shell structures using the spline finite strip method," *Composites: Part B*, vol. 30, pp. 351-364, 1999.
- [13] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, second ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2004.
- [14] P. B. Goncalves and R. S. S. Ramos, "Numerical Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells," *Journal of Engineering Mechanics*, pp. 544-550, 1997.
- [15] L. F. F. Gasser, "Free Vibrations of thin cylindrical shells containing liquid," MSc, Federal Univ. of Rio de Janeiro, 1987.
- [16] C. T. Loy and K. Y. Lam, "Vibration of cylindrical shells with ring support," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 39, pp. 455-471, 1997.
- [17] M. M. Najafzadeh and M. R. Isvandzibaei, "Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support," *Acta Mechanica*, vol. 191, pp. 75-91, 2007.
- [18] J. M. Santiago and H. L. Wisniewski, "Convergence of finite element frequency prediction for a thin walled cylinder," *Computers and Structures*, vol. 32, pp. 745-759, 1989.
- [19] C. T. Loy, K. Y. Lam, and C. Shu, "Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature method," *Shock and vibration*, vol. 4, pp. 193-198, 1997.
- [20] P. A. T. Gill, "Vibrations of clamped-free circular cylindrical shells," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 25, pp. 501-502, 1972.
- [21] C. T. Loy, K. Y. Lam, and J. N. Reddy, "Vibration of functionally graded cylindrical shells," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, pp. 309-324, 1999.

باشد. به این منظور در تحقیق حاضر با استفاده از میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف مبتنی بر تئوری مرتبه اول برشی سنדרز-کوپتر بررسی و با نتایج مراجع مقایسه گردید. سپس با تکیه بر تئوری توسعه داده شده اثرات مواد هدفمند و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های طبیعی پوسته مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج عمده قابل اشاره به صورت زیر ارائه می‌گردد:

- استفاده از میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج در مسأله ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای، به صورت یک روش مؤثر و قابل اطمینان عمل نموده و در محدوده فرکانس‌های متناظر با تعداد طول موج محیطی بالاتر و تعداد طول موج محوری پایین‌تر به ازای شرایط مرزی مختلف نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد.
- روش گسترش موج با دقت بسیار بالا فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای را به ازای شرایط مرزی ساده در دو انتهای استوانه تخمین می‌زند.
- استفاده از روش گسترش موج برای تخمین فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای در سایر شرایط مرزی (گیردار-گیردار، گیردار-ساده و گیردار-آزاد) برای استوانه‌های با نسبت طول به شعاع بالاتر، نتایج کاملاً مناسب در تمامی محدوده فرکانسی و برای استوانه‌های با طول محدودتر در محدوده فرکانس‌های پایین (محدوده فرکانسی مورد توجه در طراحی سازه‌ها) پیش‌بینی دقیق‌تری را ارائه می‌دهد. بنابراین با توسعه این روش می‌توان از آن در شرایط مرزی پیچیده‌تر نیز استفاده نمود.
- برای پوسته استوانه‌ای با ترکیب ماده هدفمند مورد مطالعه، ملاحظه شد که با افزایش عدد کسر حجمی که منجر به افزایش درصد ماده‌ی با سفتی بالاتر در ساختار پوسته می‌شود، فرکانس طبیعی پوسته نیز افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد طول موج محیطی، میزان تغییرات فرکانس طبیعی با عدد کسر حجمی بیشتر می‌شود.
- برای یک پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند، اثر شرایط مرزی مختلف به ازای اعداد موج محیطی کمتر از ۴ قابل مشاهده است و در این محدوده، فرکانس طبیعی پوسته در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار نسبت به بقیه شرایط مرزی بالاتر قرار می‌گیرد و بعد از آن به ترتیب فرکانس‌های طبیعی به ازای شرایط مرزی گیردار-ساده، ساده-ساده و گیردار-آزاد قرار می‌گیرند.

۵- مراجع

- [1] A. W. Leissa, *Vibration of Shells: The Acoustical Society of America*, 1973.
- [2] M. J. Ebrahimi and M. M. Najafzadeh, "Free vibration of twodimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 13, pp. 27-38, 2013.
- [3] K. Forsberg, "Influence of boundary conditions on modal characteristics of cylindrical shells," *Journal of American institute of aeronautics and astronautics*, vol. 2, pp. 182-189, 1964.
- [4] F. Shadmehri, S. Hoa, and M. Hojjati, "The Effect of Displacement Field on Bending, Buckling, and Vibration of Cross-Ply Circular Cylindrical Shells," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 21, pp. 14-22, 2014.
- [5] C. B. Sharma, "Vibration characteristics of thin circular cylinders," *Journal of sound and vibration*, vol. 63, pp. 581-592, 1979.