۲۱ امین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن
۶-۵ آذر ۱۳۹۳، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، ایران، صفحه ۴۸۱-۴۷۹

برآورد خطای مسائل مقادیر مرزی ، کراندار خطی در فضای هسته بازتولید

ناهید خانلری
دانشجوی دکتری، واحد علوم تحقیقات همدان $iauh.ac.ir$

چکیده
در این مقاله روش هسته بازتولید (RKM) را برای حل مسائل مقدار مرزی کراندار ارائه داده و علاوه بر آن در مورد برآورد خطای موثر برای این روش که تا به حال در مورد آن بحث نشده گفتگو خواهیم کرد. همچنین با استفاده از روش هسته بازتولید ، تخمینی برای خطای مسائل مقدار مرزی کراندار ارائه می‌دهیم.

واژگان کلیدی: روش هسته بازتولید، برآورد خطا، مسائل مقدار مرزی کراندار خطی.

۱. مقدمه

معادله مرتبه دوم، با دو نقطه مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x)\ , \ 0 < x < 1 \\ u(0) = 0\ ,\ u(1) = 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

به طوریکه $p(x)$ و $q(x)$ توابع پیوسته‌ای هستند و f داده شده در معادله (۱.۱) در وجود و یکتایی حل معادله صدق می‌کند.

روش هسته بازتولید برای معادله

در این قسمت RKM را برای حل مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای خطی معرفی می‌کنیم. برای حل معادله داده شده، فضاهای هسته بازتولید $(m \geq 3)$ و $W^m[0,1]$ را برای هر تابعی که در شرایط مرزی معادله صدق می‌کند، در نظر می‌گیریم.

تعریف: فضای هسته بازتولید $W^m[0,1]$

$W^m[0,1] = \{u(x)|$ تابعی پیوسته با مقدارحقیقی است $u^{(m-1)}(x), u^{(m)}(x) \in L^2[0,1], u(0) = 0$
$, u(1) = 0\}$

و ضرب داخلی و نرم در این فضا را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\langle u, m\rangle_m = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(m)}(x)v^{(m)}(x)dx$$

$$\| u \|_m = \sqrt{\langle u, u\rangle_m}\ ,\ u, v \in W^m[0,1]$$

فضای $W^m[0,1]$ یک فضای هسته بازتولید می باشد. اگر $m=1$ باشد ، هسته آن را می‌توان به صورت زیر بدست آورد

$$\overline{K}(x,y)=\begin{cases}1+y & y\leq x\\ 1+x & y>x\end{cases}$$

عملگر خطی: اگر $L:W^m[0,1]\to W^1[0,1]$ یک عملگر خطی کراندار باشد شکل عملگری معادله را به صورت زیر می‌توانیم نمایش دهیم

$$Lu(x)=u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)$$

قرار می‌دهیم $\varphi_i(x)=\overline{K}(x_i,x)$ و $\psi_i(x)=L^*\varphi_i(x)$ به طوریکه L^* عملگری مزدوج از L می‌باشد، با اعمال فرآیند گرام اشمیت ، سیستم متعامد نرمال $\{\overline{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ را خواهیم داشت، به طوریکه

$$\overline{\psi}_i(x)=\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\psi_k(x)\ (\beta_{ik}>0\ ,\ i=1,2,...)$$

قضیه ۱.۱: برای معادله (۱.۱) اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[0,1]$ چگال باشد، آنگاه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل از $W^m[0,1]$ است و $\psi_i(x)=L_sk(x,s)|_{s=x_i}$.

قضیه ۱.۲: اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[0,1]$ چگال باشد، آنگاه تنها جواب معادله $u(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\overline{\psi}_j(x)$ می‌باشد به طوریکه $A_j=\sum_{L=1}^{j}\beta_{jL}f(x_L)$

جواب تقریبی معادله $u_N(x)=\sum_{j=1}^{N}A_j\overline{\psi}_j(x)$ می باشد . توجه داشته باشید که $W^m[0,1]$ یک فضای هیلبرت است و مشخص است که $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(x_k))^2<\infty$، بنابراین دنباله $u_N(x)$ تحت نرم $\|.\|_m$ همگرا می‌باشد.

لم ۱: اگر $u(x)\in W^m[0,1]$ باشد، سپس وجود دارد یک ثابتی مانند l به طوریکه

$$|u^{(k)}|\leq c\parallel u(x)\parallel_m,(1\leq k\leq m-1)\ ,\ |u(x)|\leq c\parallel u(x)\parallel_m$$

قضیه ۱.۳ : دنباله تقریبی $u_N(x)$ و مشتق $k-$ ام آن یعنی $u_N^{(k)}(x)$ به طوریکه $1\leq k\leq m-1$ به طور یکنواخت همگرا می‌باشند.

۲. نتایج اصلی

قضیه ۲.۱: فرض کنید $u_N(x)$ جواب تقریبی معادله (۱.۱) در فضای $W^4[0,1]$ باشد و $u(x)$ جواب دقیق آن، بطوریکه $0=x_1<x_2<...<x_N=1$ و $p(x),q(x),f(x)\in c^2[0,1]$ باشند، آنگاه

$$\parallel u(x)-u_N(x)\parallel_\infty\leq d_1h\ ,\ \parallel u^{(k)}(x)-u_N^{(k)}(x)\parallel_\infty\leq d_1h\ ,\ 1\leq k\leq 2$$

بطوریکه $\parallel u(x)\parallel_\infty=\max_{x\in[0,1]}|u(x)|$ و d_1 مقداریست ثابت و $h=\max_{1\leq i\leq N-1}|x_{i+1}-x_i|$

قضیه ۲.۲: اگر $u_N(x)$ جواب تقریبی معادله (۱.۱) باشد در فضای $W^5[0,1]$ باشد و $u(x)$ جواب دقیق معادله، بطوریکه $0=x_1<x_2<...<x_N=1$ و $p(x),q(x),f(x)\in c^4[0,1]$ آنگاه

$$\parallel u(x)-u_N(x)\parallel_\infty\leq d_2h^3\ ,\ \parallel u^{(k)}(x)-u_N^{(k)}(x)\parallel_\infty\leq d_2h^3\ ,\ 1\leq k\leq 2$$

در جائیکه d_2 مقداریست ثابت و $h=\max_{1\leq i\leq N-1}|x_{i+1}-x_i|$

قضیه ۲.۳: اگر $u_N(x)$ جواب تقریبی معادله (۱.۱) در فضای $W^6[0,1]$ باشد و $u(x)$ جواب دقیق آن بطوریکه $0=x_1<x_2<...<x_N=1$ و اگر $p(x),q(x),f(x)\in c^6[0,1]$ باشند، آنگاه

$$\parallel u(x)-u_N(x)\parallel_\infty\leq d_3h^5\ ,\ \parallel u^{(k)}(x)-u_N^{(k)}(x)\parallel_\infty\leq d_3h^5\ ,\ 1\leq k\leq 2$$

بطوریکه $\parallel u(x)\parallel_\infty=\max_{x\in[0,1]}|u(x)|$ و d_3 مقداریست ثابت و $h=\max_{1\leq i\leq N-1}|x_{i+1}-x_i|$
.

۳. نتیجه گیری و پیشنهادات

نتیجه گیری: در این مقاله یک برآورد خطا برای مسئله مقدار مرزی کراندار خطی دو نقطه‌ای با استفاده از روش هسته بازتولید ارائه دادیم که برآورد خطای پیشنهاد شده در این مقاله می‌تواند در حالت کلی برای مقادیر کراندار خطی بسط داده شود.

پیشنهادات: می‌توانیم برای معادلاتی که مرتبه آنها بالاتر از دو می‌باشد و همچنین معادلات با شرایط انتگرال مرزی نیز در فضای هسته بازتولید خطاها را محاسبه نماییم.

مراجع

1. Cui, M.G., and Geng, F.Z., Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space, J. Comput. Appl. math 205 (2007) 6-15.
2. Geng, F.Z., and Cui, M.G., Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, J.Math. Appl 327 (2007) 1167-1181.
3. Li, X.Y., and da Wu, B. Y., Error estimation for the reproducing kernel method to solve linear boundary value problems , Compat. Appl. Math 243 (2013) 10-15.