

## تحلیل ارتعاشات نانو ورق میندیلین مدرج تابعی با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی

مهدی محمدی مهر<sup>۱</sup>، محمد سالمی<sup>۲</sup>

گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

### چکیده

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد نانو ورق مستطیلی مدرج تابعی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با استفاده از تئوری میندیلین مورد بررسی قرار می‌گیرد. به دلیل اینکه ورق مورد تحلیل دارای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده می‌باشد از روش ناویر برای تخمین جواب‌ها استفاده می‌شود که بر این اساس جهت ارضا نمودن معادلات حاکم حرکت و شرایط مرزی، حل بصورت مثلثاتی فرض می‌شود. برای بررسی اثرات مقیاس کوچک از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی استفاده می‌شود. ابتدا روابط کرنش-تغییر مکان با بکار بردن تئوری میندیلین استخراج می‌شوند، سپس معادلات تعادل با استفاده از روش انرژی و اصل همپلتون بدست می‌آیند. برای حل این دستگاه معادلات و بدست آوردن فرکانس طبیعی از روش تحلیلی استفاده می‌شود. در نهایت تاثیر تغییر شکل برشی عرضی، پارامتر مقیاس طول ماده و نمای قانون توانی بر فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین مقایسه‌ای بین تئوری‌های کلاسیک، تنش کوپل اصلاح شده و الاستیسیته گرادیان کرنشی انجام می‌شود. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که فرکانسهای طبیعی حاصل از تئوری گرادیان کرنشی بزرگتر از مقادیر بدست آمده از تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده می‌باشند. همچنین افزایش مقادیر پارامتر مقیاس طول ماده و تغییر شکل برشی عرضی باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. درحالی‌که افزایش نمای قانون توانی موجب کاهش فرکانس طبیعی ورق می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** نانو ورق - ارتعاشات آزاد - مدرج تابعی - تئوری میندیلین - تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی

### مقدمه

با پیشرفت روزافزون علم نانو و دستاوردهای جدیدی که در این خصوص بدست آمدند استفاده از نانو تیر، نانو ورق و نانو پوسته رشد چشمگیری داشته است. در این بین، کاربرد نانو ورق‌ها در صنایع مختلف از جمله کشتی سازی و هوا فضا غیرقابل انکار است. به دلیل اینکه یکی از مهمترین تحلیل‌ها در صنایع هوایی تحلیل ارتعاشات بال هواپیما می‌باشد بررسی ارتعاشات نانو ورق لازم می‌باشد. برای تحلیل در مقیاس نانو تئوری کلاسیک دیگر جوابگو نبوده و یکی از مهمترین تئوریها که به بررسی اثر پارامتر مقیاس طول ماده (Material Length Scale Parameter) در مقیاس میکرو و نانو می‌پردازد تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی می‌باشد. بین و همکارانش [۱] تحلیل دینامیکی میکرو ورق غیرکلاسیک کرشهف را براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده (Modified Couple Stress Theory) انجام دادند. آنها دریافتند که فرکانس طبیعی که این مدل پیش بینی می‌کند زمانی که ضخامت ورق قابل مقایسه با پارامتر مقیاس طول ماده است وابسته به اندازه (Size-dependent) است. حسنی بافرانی و همکارانش [۲] ارتعاشات ورق مدرج تابعی (Functionally Graded) مستطیلی بر بستر الاستیک بصورت تحلیلی حل کردند. آنها با در نظر

گرفتن میدان جابجایی براساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی مشاهده کردند که با افزایش نمای قانون توانی (Power Law Index) تاثیر بستر الاستیک بر فرکانس نیز افزایش می‌یابد. وانگ و همکارانش [۳] میکرو ورق کرشهف را براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی (Strain Gradient elasticity Theory) بررسی کردند. آنها تحلیل استاتیکی و ارتعاشاتی میکرو ورق مستطیلی را مطالعه نمودند و دریافتند که سفتی، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی میکرو وابستگی زیادی به اثر اندازه دارند. جمعه زاده و همکارانش [۴] ارتعاشات میکرو ورق را بر پایه تئوری تنش کوپل اصلاح شده تحلیل کردند. آنها با بکار بردن اصل همپلتون معادلات حرکت را بدست آوردند. آنها همچنین اثر پارامتر مقیاس طول را بر فرکانس طبیعی میکرو ورق مطالعه نمودند و دریافتند که در نظر گرفتن اثر اندازه مواد موجب افزایش سختی و فرکانس طبیعی می‌شود. رضانی [۵] میکرو ورق مرتبه اول تغییر شکل برشی را براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی بسط داد و معادلات حاکمه حرکت و همچنین شرایط مرزی را از روش اختلاف تغییرات استخراج کرد. وی نشان داد زمانی که ضخامت ورق قابل مقایسه با پارامتر مقیاس طول ماده باشد کمانش ورق افزایش می‌یابد درحالی‌که فرکانس طبیعی آن کم می‌شود. همچنین ثابت کرد که اثر تغییر شکل برشی در مقیاس میکرو محسوس است. کی و همکارانش [۶] در مقاله خود ارتعاشات میکرو ورق میندیلین را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بررسی کرده و دریافتند زمانیکه ضخامت میکرو ورق به پارامتر مقیاس طول ماده نزدیک می‌شود اثر اندازه مهم می‌شود. تای و چوی [۷] با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و اصل همپلتون اثر اندازه را برای خمش، کمانش و ارتعاشات ورق مدرج تابعی کرشهف و میندیلین بسط دادند. آنها با تحلیل نتایج عددی دریافتند که گنجاندن اثر مقیاس کوچک (Small Scale Effect) منجر به کاهش میزان خمش و افزایش بار کمانش و فرکانس می‌شود. سهمانی و انصاری [۸] ارتعاشات میکرو ورق مدرج تابعی را با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی ارائه دادند. آنها نشان دادند که با نزدیک شدن ضخامت میکرو ورق به اندازه پارامتر مقیاس طول ماده، فرکانس طبیعی بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. تای و کیم [۹] خمش و ارتعاشات آزاد ورق ردی مدرج تابعی را تحلیل کردند. آنها دریافتند که اثر مقیاس کوچک زمانی که ضخامت ورق کوچک است مهم است اما با افزایش ضخامت ورق قابل نظر خواهند شد.

براساس اطلاعات حاصل از بررسی مقالات مختلف نویسندگان دریافتند که تاکنون تحلیل ارتعاشی نانو ورق مدرج تابعی با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی صورت نگرفته است. در این تحقیق ارتعاشات نانو ورق میندیلین مدرج تابعی با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی مورد مطالعه قرار گرفت.

## تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی

طبق تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی چگالی انرژی کرنشی ذخیره شده  $U$  در ماده الاستیک خطی که فضای را اشغال کرده از رابطه (۱) بدست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dV = 0 \quad (۱)$$

$$(i, j, k = x, y, z)$$

که در آن  $\varepsilon_{ij}$  تنسور کرنش متقارن،  $\gamma_i$  بردار گرادیان اتساع،  $\eta_{ijk}^{(1)}$  تنسور انحرافی گرادیان کشش و  $\chi_{ij}^s$  تنسور گرادیان چرخش متقارن می‌باشند و به شکل روابط (۲) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{الف})$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (\text{ب})$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15} [\delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) + \delta_{jk} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] \quad (\text{ج})$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{4} (e_{imn} u_{n,mj} + e_{jmn} u_{n,mi}) \quad (\text{د})$$

تنسور تنش  $\sigma_{ij}$  و تنش‌های مراتب بالاتر  $p_i$ ،  $\tau_{ijk}^{(1)}$  و  $m_{ij}^s$  را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{الف})$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (\text{ب})$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (\text{ج})$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (\text{د})$$

در روابط فوق  $(l_0, l_1, l_2)$  پارامترهای مقیاس طول ماده و  $\lambda$  و  $\mu$

ضرایب لامه می‌باشند که به صورت تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۴)$$

که در اینجا  $E$  و  $\nu$  به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون می‌باشند.

## معادلات حاکم بر ورق میندلین

با توجه به تئوری ورق میندلین میدان جابجایی در جهات  $x$ ،  $y$  و  $z$  را که به ترتیب با  $u_1(x, y, z, t)$ ،  $u_2(x, y, z, t)$  و  $u_3(x, y, z, t)$  نشان می‌دهند، به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$u_1(x, y, z, t) = z \psi_x(x, y, t)$$

$$u_2(x, y, z, t) = z \psi_y(x, y, t) \quad (۵)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

که در آن  $w$  جابجایی عرضی نانو ورق و  $\psi_x$  و  $\psi_y$  به ترتیب

جابجایی زاویه ای در جهات  $x$  و  $y$  می‌باشند.

با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (الف) روابط کرنش-جابجایی به

صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z \psi_{x,x} \\ \varepsilon_y &= z \psi_{y,y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{z}{2} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} (\psi_x + w_{,x}) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{z}{2} (\psi_{x,y} + w_{,y}) \end{aligned} \quad (۶)$$

با جایگذاری روابط (۵) و (۶) در رابطه (۲) معادلات زیر را می‌توان بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \eta_{xxx}^{(1)} &= \frac{z}{5} (2\psi_{x,xx} - 2\psi_{y,xy} - \psi_{x,yy}) \\ \eta_{yyy}^{(1)} &= \frac{z}{5} (2\psi_{y,yy} - 2\psi_{x,xy} - \psi_{y,xx}) \\ \eta_{zzz}^{(1)} &= \frac{1}{5} (2\psi_{x,x} + 2\psi_{y,y} + w_{,xx} + w_{,yy}) \\ \eta_{xyz}^{(1)} &= \eta_{yzx}^{(1)} = \eta_{zxy}^{(1)} = \eta_{zyx}^{(1)} = \eta_{xzy}^{(1)} = \eta_{zxy}^{(1)} \\ &= \frac{1}{3} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x} + w_{,xy}) \\ \eta_{xxy}^{(1)} &= \eta_{yxx}^{(1)} = \eta_{yxx}^{(1)} \\ &= \frac{z}{15} (8\psi_{x,xy} + 4\psi_{y,xx} - 3\psi_{y,yy}) \\ \eta_{xxz}^{(1)} &= \eta_{zxx}^{(1)} = \eta_{zxx}^{(1)} \\ &= \frac{1}{15} (8\psi_{x,x} + 4w_{,xx} - 2\psi_{y,y} - w_{,yy}) \\ \eta_{xxy}^{(1)} &= \eta_{yxx}^{(1)} = \eta_{yxx}^{(1)} \\ &= \frac{z}{15} (4\psi_{x,yy} + 8\psi_{y,xy} - 3\psi_{x,xx}) \\ \eta_{xxy}^{(1)} &= \eta_{yxx}^{(1)} = \eta_{yxx}^{(1)} \\ &= \frac{1}{15} (8\psi_{y,y} + 4w_{,yy} - 2\psi_{x,x} - w_{,xx}) \\ \eta_{xxy}^{(1)} &= \eta_{yxx}^{(1)} = \eta_{yxx}^{(1)} \\ &= -\frac{z}{15} (3\psi_{x,xx} + \psi_{x,yy} + 2\psi_{y,xy}) \\ \eta_{xxy}^{(1)} &= \eta_{yxx}^{(1)} = \eta_{yxx}^{(1)} \\ &= -\frac{z}{15} (\psi_{y,xx} + 3\psi_{y,yy} + 2\psi_{x,xy}) \\ \chi_{xx}^s &= \frac{1}{2} (w_{,xy} - \psi_{y,x}) \\ \chi_{yy}^s &= \frac{1}{2} (\psi_{x,y} - w_{,xy}) \\ \chi_{zz}^s &= \frac{1}{2} (\psi_{y,x} - \psi_{x,y}) \\ \chi_{xy}^s &= \chi_{yx}^s = \frac{1}{4} (w_{,yy} - \psi_{y,y} + \psi_{x,x} - w_{,xx}) \\ \chi_{xy}^s &= \chi_{yx}^s = \frac{z}{4} (\psi_{y,xx} + \psi_{x,xy}) \\ \chi_{xy}^s &= \chi_{yx}^s = \frac{z}{4} (\psi_{y,xy} + \psi_{x,yy}) \\ \gamma_x &= z (\psi_{x,xx} + \psi_{y,xy}) \\ \gamma_y &= z (\psi_{x,xy} + \psi_{y,yy}) \\ \gamma_z &= \psi_{x,x} + \psi_{y,y} \end{aligned} \quad (۷)$$

(۸)

(۹)

$$\begin{aligned} \delta\psi_x : & D \left( \psi_{x,xx} + \frac{1-\nu}{2} \psi_{x,yy} + \frac{1+\nu}{2} \psi_{y,xy} \right) \\ & - k_s A \frac{1-\nu}{2} (\psi_x + w_x) - D_1 [\nabla^2 (\psi_{x,xx} + \psi_{y,xy})] \\ & + A_t (\psi_{x,xx} + \psi_{y,xy}) + \frac{A_n}{4} \left[ 2\nabla^2 \psi_x - \frac{3}{2} (\psi_{x,xx} + \psi_{y,xy}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \nabla^2 w_x \right] + \frac{D_n}{8} [\nabla^2 (\psi_{y,xy} - \psi_{x,yy})] + \frac{2A_m}{15} [5\nabla^2 \psi_x \\ & + 3 \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{x,x} + \psi_{y,y}) + 4\nabla^2 w_x] - \frac{2D_m}{15} [2\nabla^4 \psi_x \\ & + \nabla^2 \psi_{x,xx} + \nabla^2 \psi_{y,xy}] = I_2 \ddot{\psi}_x \end{aligned} \quad (18\text{ب})$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_y : & D \left( \psi_{y,yy} + \frac{1-\nu}{2} \psi_{y,xx} + \frac{1+\nu}{2} \psi_{x,xy} \right) \\ & - k_s A \frac{1-\nu}{2} (\psi_y + w_y) - D_1 [\nabla^2 (\psi_{y,yy} + \psi_{x,xy})] \\ & + A_t (\psi_{y,yy} + \psi_{x,xy}) + \frac{A_n}{8} [\nabla^2 \psi_y - 3(\psi_{y,xx} - \psi_{y,xy}) \\ & - \nabla^2 w_y] + \frac{D_n}{8} [\nabla^2 (\psi_{x,xy} - \psi_{y,xx})] + \frac{2A_m}{15} [5\nabla^2 \psi_y \\ & + 3(\psi_{x,xy} + \psi_{y,yy}) + 4\nabla^2 w_y] - \frac{2D_m}{15} [2\nabla^4 \psi_y \\ & + \nabla^2 \psi_{y,yy} + \nabla^2 \psi_{x,xy}] = I_2 \ddot{\psi}_y \end{aligned} \quad (18\text{ج})$$

که در روابط فوق پارامترهای زیر تعریف می گردند:

$$(A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1, z, z^2) dz \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{matrix} (A_t, B_t, D_t) \\ (A_m, B_m, D_m) \\ (A_n, B_n, D_n) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} I_0^2 \\ I_1^2 \\ I_2^2 \end{matrix} \right\} (1-\nu)(A, B, D)$$

### حل تحلیلی معادلات حرکت

برای بررسی ارتعاشات آزاد نانو ورق مستطیلی مدرج تابعی با چهار طرف تکیه‌گاه ساده روش ناور بکار برده شده است. بر اساس این روش برای ارضای معادلات حرکت و شرایط مرزی حل بصورت روابط زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \\ \psi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{i\omega t} \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (20)$$

که  $\beta = \frac{n\pi}{b}$  ،  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$  ،  $i = \sqrt{-1}$  ضرایب بوده و  $\omega$  فرکانس طبیعی می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (20) در رابطه (18) حل تحلیلی ورق میندلین به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ & & k_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

که

همچنین روابط زیر را برای تنش‌های مرتبه بالاتر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} M_{ij}^n &= \int_z \sigma_{ij} z^n dz \quad i, j = x, y \\ M_{ij}^n &= k_s \int_z \sigma_{ij} z^n dz \quad i = x, y; j = z \\ P_i^n &= \int_z p_i z^n dz \quad i, j = x, y, z \\ Y_{ij}^n &= \int_z m_{ij}^s z^n dz \quad i, j = x, y, z \\ N_{ijk}^n &= \int_z \tau_{ijk}^{(1)} z^n dz \quad i, j, k = x, y, z \end{aligned} \quad (10)$$

که  $k_s$  ضریب تصحیح برشی می‌باشد.

انرژی جنبشی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dz dA \quad (11)$$

که با جایگذاری رابطه (5) در معادله (11) انرژی جنبشی بصورت

رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$T = \frac{1}{2} \int_A (I_2 (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) + I_0 \dot{w}^2) dA \quad (12)$$

که در آن:

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^i \rho(z) dz \quad i = 0, 1, 2 \quad (13)$$

ورق بصورت مدرج تابعی درنظر گرفته شده است بطوری که خواص مواد آن از جمله مدول الاستیسیته و چگالی در راستای ضخامت بصورت پیوسته تغییر کرده که با استفاده از قانون توانی به شکل زیر بیان می‌گردند:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (14)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n$$

که  $n$  نمای قانون توانی و اندیسهای  $m$  و  $c$  به ترتیب جنسهای فلز و سرامیک می‌باشند.

انرژی پتانسیل کل مجموع انرژی‌های پتانسیل  $U$  و جنبشی  $T$  به صورت رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$\Pi = T - U \quad (15)$$

با استفاده از حساب تغییرات و اصل حداقل انرژی، رابطه (15) به صورت روابط (16) و (17) بدست می‌آید:

$$\int_0^t \delta \Pi dt = 0 \quad (16)$$

$$\delta \Pi = \delta T - \delta U = 0 \quad (17)$$

با جایگذاری معادلات (1) و (12) در معادله (17) و جداسازی ضرایب  $\delta w$  ،  $\delta \psi_x$  ،  $\delta \psi_y$  معادلات حرکت به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta w : & k_s A \frac{1-\nu}{2} (\psi_{x,x} + \psi_{y,y} + \nabla^2 w) + \frac{A_n}{8} [\nabla^2 (\psi_{x,x} \\ & + \psi_{y,y}) - \nabla^4 w] - \frac{4A_m}{15} [\nabla^4 w + 2\nabla^2 (\psi_{x,x} + \psi_{y,y})] \\ & = I_0 \ddot{w} \end{aligned} \quad (الف 18)$$

۲۳۶۴۸	۲۳۶۴۸	۹/۰۲۶۱	۹/۰۲۶۱	۰/۶	
۲۵/۳۶۵۷	۲۵/۳۶۵۷	۱۰/۷۸۴۸	۱۰/۷۸۴۸	۰/۸	
۲۹/۴۵۸۸	۲۹/۴۵۸۸	۱۲/۶۳۶۰	۱۲/۶۳۶۰	۱	
۱۵/۰۳۱۹	۱۵/۰۳۱۹	۶/۰۹۹۷	۶/۰۹۹۷	۰	۲۰
۱۶/۱۱۰۸	۱۶/۱۱۰۸	۶/۵۳۷۶	۶/۵۳۷۶	۰/۲	
۱۸/۹۶۸۸	۱۸/۹۶۸۸	۷/۷۰۰۹	۷/۷۰۰۹	۰/۴	
۲۲/۹۱۵۰	۲۲/۹۱۵۰	۹/۳۱۵۸	۹/۳۱۵۸	۰/۶	
۲۷/۴۳۶۵	۲۷/۴۳۶۵	۱۱/۱۸۰۱	۱۱/۱۸۰۱	۰/۸	
۳۲/۲۳۷۴	۳۲/۲۳۷۴	۱۳/۱۷۸۶	۱۳/۱۷۸۶	۱	

در ادامه برای تحلیل ارتعاشات نانو ورق مدرج تابعی مشخصات زیر برای نانو ورق در نظر گرفته شده‌اند: [۱۰ و ۱۱]

$$h = 0.34 \times 10^{-9} m; l_0 = l_1 = l_2 = 0.5h; \nu = 0.38$$

$$k_s = 5/6; m = n' = 1; a = b = 10h; E_m = 0.2TPa \quad (23)$$

$$\rho_m = 7500 kg/m^3; \rho_c = 2500 kg/m^3; E_c = 1TPa$$

فرکانس طبیعی بدون بعد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Omega = \omega(a^2/h) \sqrt{\rho_m/E_m} \quad (24)$$

شکل ۱ تاثیر نمای قانون توانی روی فرکانس طبیعی بدون بعد نانو ورق میندیلین برای تئوری‌های کلاسیک (CT)، تنش کوپل اصلاح شده (MCPT) و الاستیسیته گرادیان کرنشی (SGT) را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود برای هر سه تئوری با افزایش نمای قانون توانی مقدار فرکانس طبیعی بدون بعد ورق مستطیلی مدرج تابعی کاهش می‌یابد و همچنین فرکانس بدست آمده از تئوری کلاسیک کمترین و فرکانس حاصل از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی بیشترین مقدار را دارا می‌باشد.

اثر پارامتر مقیاس طول ماده بر روی فرکانس طبیعی بدون بعد به ازای نمای قانون توانی مختلف در شکل ۲ مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که افزایش پارامتر مقیاس طول ماده باعث افزایش فرکانس ورق در دو تئوری MCPT و SGT می‌شود در حالی که تاثیری بر نتایج حاصل از تئوری کلاسیک ندارد و همچنین همانند نتیجه-ای که از شکل قبلی گرفته شد افزایش نمای قانون توانی باعث کاهش مقدار فرکانس طبیعی بدون بعد می‌شود. به ازای نمای قانون توانی بزرگتر با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده سرعت افزایش فرکانس کمتر می‌شود. این بدان معناست که با افزایش نمای قانون توانی جنس ورق فلزتر شده و چگالی آن بیشتر شده که تاثیر معکوس بر فرکانس خواهد داشت.

شکل ۳ تاثیر تغییر شکل برشی عرضی (Transverse Shear Deformation) بر فرکانس را برای نماهای قانون توانی مختلف را نشان می‌دهد. در اینجا نیز با افزایش تغییر شکل برشی عرضی فرکانس طبیعی بدون بعد افزایش می‌یابد.

### نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر فرکانس طبیعی نانو ورق مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از تئوری‌های ورق میندیلین و الاستیسیته گرادیان کرنشی و اصل همپلتون معادلات حرکت بدست آمدند. که حل آنها بصورت تحلیلی و از روش ناویر صورت گرفت.

$$k_{11} = k_s A \frac{1-\nu}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{A_n}{8} (\alpha^2 + \beta^2)^2 + \frac{4A_m}{15} (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

$$k_{12} = k_s A \frac{1-\nu}{2} \alpha - \frac{A_n}{8} \alpha (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{8A_m}{15} \alpha (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$k_{13} = k_s A \frac{1-\nu}{2} \beta - \frac{A_n}{8} \beta (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{8A_m}{15} \beta (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$k_{22} = k_s A \frac{1-\nu}{2} + D(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta^2) + D_l \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2) + A_l \alpha^2 + \frac{A_n}{8} (4\beta^2 + \alpha^2) + \frac{D_n}{8} \beta^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{2A_m}{15} (5\beta^2 + 8\alpha^2) + \frac{2D_m}{15} (3\alpha^4 + 5\alpha^2 \beta^2 + 2\beta^4) \quad (22)$$

$$k_{23} = D \frac{1+\nu}{2} \alpha \beta + D_l \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) + A_l \alpha \beta - \frac{3}{8} A_n \alpha \beta - \frac{D_n}{8} \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{2}{15} A_m \alpha \beta + \frac{2D_m}{15} \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$k_{33} = D(\beta^2 + \frac{1-\nu}{2} \alpha^2) + k_s A \frac{1-\nu}{2} + D_l \beta^2 (\alpha^2 + \beta^2) + A_l \beta^2 + \frac{A_n}{8} (4\beta^2 + \alpha^2) + \frac{D_n}{8} \alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{2A_m}{15} (5\alpha^2 + 8\beta^2) + \frac{2D_m}{15} (3\beta^4 + 5\alpha^2 \beta^2 + 2\alpha^4)$$

### نتایج عددی و بحث

برای صحت سنجی نتایج حاصل از این تحقیق، از آنجا که تاکنون مقاله‌ای در رابطه با تحلیل نانو ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی ارائه نشده است نتایج بدست آمده از این تحلیل را برای میکرو ورق با مشخصات داده شده در مرجع [۸] بدست آورده شد و با همان مرجع مقایسه شدند. همانطور که ملاحظه می‌شود نتایج کاملاً برهم منطبقند.

$$h = 17.6 \times 10^{-6} m \quad \rho_c = 1.22 \times 10^3 kg/m^3 \quad \nu = 0.38$$

$$E_c = 1.44 GPa \quad E_m = 14.4 GPa \quad \rho_m = 12.2 \times 10^3 kg/m^3$$

$$k_s = 5/6 \quad l_0 = l_1 = 0 \quad n = 0$$

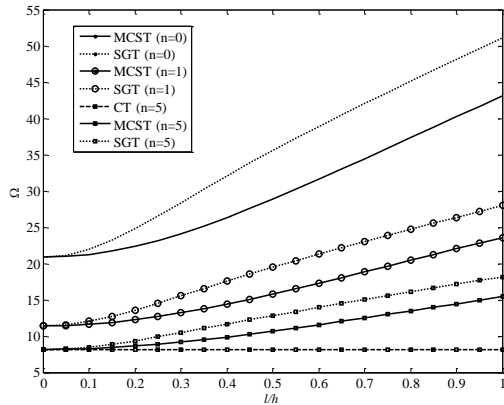
جدول ۱- فرکانس بدون بعد ورق مستطیلی با تکیه‌گاه ساده

مود دوم		مود اول		$l_2/h$	$a/h$
نتایج جدید	[۸]	نتایج جدید	[۸]		
۱۱/۶۷۱۷	۱۱/۶۷۱۷	۵/۳۸۷۱	۵/۳۸۷۱	۰	۵
۱۲/۵۷۳۷	۱۲/۵۷۳۷	۵/۷۷۹۷	۵/۷۷۹۷	۰/۲	
۱۴/۸۶۴۹	۱۴/۸۶۴۹	۶/۷۹۹۶	۶/۷۹۹۶	۰/۴	
۱۷/۸۰۵۷	۱۷/۸۰۵۷	۸/۱۵۹۵	۸/۱۵۹۵	۰/۶	
۲۰/۸۵۴۲	۲۰/۸۵۴۲	۹/۶۴۵۱	۹/۶۴۵۱	۰/۸	
۲۳/۷۰۲۳	۲۳/۷۰۲۳	۱۱/۱۳۱۱	۱۱/۱۳۱۱	۱	
۱۴/۰۸۹۳	۱۴/۰۸۹۳	۵/۹۳۰۱	۵/۹۳۰۱	۰	۱۰
۱۵/۱۰۶۴	۱۵/۱۰۶۴	۶/۳۵۵۹	۶/۳۵۵۹	۰/۲	
۱۷/۷۶۸۰	۱۷/۷۶۸۰	۷/۴۸۰۷	۷/۴۸۰۷	۰/۴	

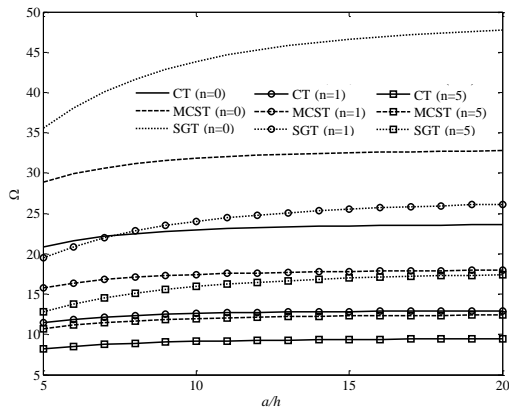
مشاهده شد افزایش نمای قانون توانی باعث کاهش فرکانس شده در حالیکه با افزایش مقادیر پارامتر مقیاس طول ماده و تغییر شکل برشی عرضی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس بدست آمده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی بزرگتر از تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد.

#### مراجع

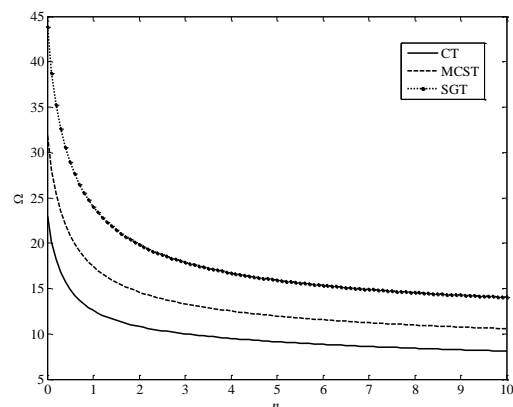
1. Yin L., Qian Q., Wang L. and Xia W., Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory. *Acta Mechanica Sinica*, v. 23, n. 5, 2010, pp. 386-393.
2. Hasani Baferani A., Saidi A.R. and Ehteshami H., Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures*, v. 93, 2011, pp. 1842-1853.
3. Wang B., Zhou S., Zhao J. and Chen X., A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*, v. 30, 2011, pp. 517-524.
4. Jomehzadeh E., Noori H.R. and Saidi A.R., The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory. *Physica E*, v. 43, 2011, pp. 877-883.
5. Ramezani S., A shear deformation micro-plate model based on the most general form of strain gradient elasticity. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 57, 2012, pp. 34-42.
6. Ke L.L., Wang Y.S., Yang J. and Kitipornchai S., Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 331, 2012, pp. 94-106.
7. Thai H.T., and Choi D.H., Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory. *Composite Structures*, v. 95, 2013, pp. 142-153.
8. Sahmani S., and Ansari R., On the free vibration response of functionally graded higher-order shear deformable microplates based on the strain gradient elasticity theory. *Composite Structures*, v. 95, 2013, pp. 430-442.
9. Thai H.T., and Kim S.E., A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory. *Composites: Part B*, v. 45, 2013, pp. 1636-1645.
10. Hashemi Sh.H., Khorshidi K., Es'haghi M., and Fadaee M., On the effects of coupling between in-plane and out-of-plane vibrating modes of smart functionally graded circular/annular plates. *Applied Mathematical Modelling*, v. 36, 2012, pp. 1132-1147.



شکل ۲- اثر تغییرات نمای قانون توانی روی فرکانس طبیعی بی‌بعد در برابر پارامتر مقیاس طول ماده برای تئوری‌های CT,SGT,MCPT



شکل ۳- اثر تغییر شکل برشی عرضی روی فرکانس طبیعی بی‌بعد به ازای نمای قانون توانی مختلف برای تئوری‌های CT,SGT,MCPT



شکل ۴- تاثیر نمای قانون توانی روی فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق میندیلین برای تئوری‌های CT,SGT,MCPT