

تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای دولایه شامل یک لایه فلز و یک لایه ویسکوالاستیک

و مقایسه با نتایج تجربی

رضا آذرافزا^۱، علی داور^۲، مجید رضا گودرزی^۳، امیر رادفر^۴

۱ و ۲- تهران- لویزان - دانشگاه صنعتی مالک اشتر- مجتمع دانشگاهی مواد و فرآیندهای ساخت

۴- تهران- لویزان- دانشگاه صنعتی مالک اشتر، گروه کنترل

چکیده

موضوع مقاله حاضر عبارت از تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای دولایه شامل یک لایه فلزی و یک لایه داخلی ویسکوالاستیک است. در بخش تحلیلی، معادلات دینامیکی تعادل پوسته استوانه‌ای با لایه داخلی میراکننده بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها نوشته شده و روابط کرنش-تغییر مکان و انحنا-تغییر مکان نیز بر اساس تقریب نوع اول لایه بیان گردیده‌اند. برای حل معادلات تئوری از روش گالرکین استفاده شده است. در بخش تجربی، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نمونه ساخته شده بر اساس توابع پاسخ فرکانسی به دست آمده از تحریک نمونه به وسیله لرزش‌گر در آزمایشگاه آنالیز مودال استخراج گردیده‌اند. شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای حل معادلات و انجام آزمایش مودال به صورت دو سر آزاد است. همچنین بر اساس مدل ساخته شده، شبیه‌سازی آن نیز با استفاده از نرم افزار ANSYS انجام و ارتعاشات آزاد آن بررسی گردیده، و در پایان، نتایج سه روش با هم مقایسه و اثر شرایط مرزی و پارامترهای هندسی روی رفتار ارتعاشی سازه بررسی شده است

واژه های کلیدی تحلیل ارتعاشی- پوسته های استوانه ای- ویسکوالاستیک- پوسته دولایه

مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای یکی از پرکاربردترین شکل‌های به کار رفته در قطعات صنعتی می‌باشند. این پوسته‌ها ممکن است در توربین‌های گازی، کوره‌های دوار، بدنه هواپیماها، موشک‌ها، زبردربایی‌ها و تانک‌ها مورد استفاده قرار گیرند. در بیشتر موارد، پوسته تحت بارهای دینامیکی قرار دارد و ممکن است دچار ارتعاش، کمانش و خستگی شود. مهندسان اغلب با کاهش یا حذف ارتعاش ناخواسته سازه روبرو هستند. استفاده از شیوه‌های میراکنندگی غیرفعال یکی از اثربخش‌ترین و کارآمدترین راه‌های کاهش سر و صدا و ارتعاش به‌شمار می‌رود [۱]. در برخی از کاربردها لازم است با استفاده از یک ماده میرا کننده سبک وزن، که از میرایی کمی برخوردار است، دامنه ناپایداری‌ها و تشدید در یک سازه را محدود نمود. سازه‌های همراه با لایه‌های میراکننده برای کنترل صدا و ارتعاش در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [۲]. با توجه به جستجوهای انجام شده در مورد ارتعاش آزاد میرا شونده پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه، که از یک طرف با ماده میراکننده ویسکوالاستیک پوشش‌دهی شده باشند، به نظر می‌رسد چنین موضوعی یا بسیار کم مورد توجه بوده، و یا نتایج به دست آمده در دسترس دیگران قرار نگرفته‌اند. با وجود این، در ادامه به‌طور اجمالی به برخی از آن‌ها اشاره می‌گردد. تحلیل

پوسته استوانه‌ای که از یک طرف با یک ماده میراکننده پوشش‌دهی شده بود، اولین بار توسط کاگاوا (Kagawa) و کراکستاد (Krokstad) پیشنهاد گردید. مودهای متقارن محوری و نامتقارن براساس تقریب‌های ساده شده لایه- تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفته بودند [۳]. محمدی و همکاران بهینه‌سازی طراحی پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه با هسته ضخیم میرا کننده ویسکوالاستیک به وسیله تغییر ضخامت لایه‌ها، و استفاده از لایه ویسکوالاستیک به صورت پوشش پاره‌ای و ایجاد برش در لایه بالا و هسته بررسی کردند [۴]. محمودخانی و همکاران، تحلیل ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای با میرایی ناشی از لایه مقید شده با استفاده از مدل کلین-ویت^۱ برای بیان اثر میرایی ماده ویسکوالاستیک انجام دادند [۵]. کائو [Cao] و همکاران، اثر ضخامت هسته ویسکوالاستیک مقید بر پارامتر فرکانسی و ضریب اتلاف در ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای دایروی با لایه میرا کننده مقید غیرفعال با تکیه‌گاه دو سر ساده با استفاده از تئوری پوسته‌های نازک ساندروز بررسی نمودند [۶]. صالحی و همکاران اثر میرایی در رفتار ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای نازک دایروی با یک لایه ویسکوالاستیک مقید شده را در حوزه زمان مورد بررسی قرار دادند [۷]. شیانگ یو [Xiang Yu] و دیگران برای تحلیل ارتعاش و اثر میرایی پوسته استوانه‌ای دایروی چند لایه با هسته ویسکوالاستیک، روش ماتریسی جدیدی ارائه دادند [۸].

با توجه به پیشینه کار، ارتعاشات آزاد (آنالیز مودال) پوسته‌های دولایه شامل یک لایه الاستیک و یک لایه ویسکوالاستیک تا کنون به روش تجربی انجام نشده، بنا بر این در مقاله حاضر، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای دولایه بررسی گردیده است. به همین منظور، ابتدا معادلات تعادل پوسته بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها (CST)^۲ استخراج، و سپس با استفاده از روابط روابط کرنش-تغییر مکان و انحنا-تغییر مکان که توسط لایه- تیموشنکو ارائه شده، به معادلاتی بر حسب تغییر مکان‌ها تبدیل شده‌اند. از سوی دیگر، از نرم‌افزار ANSYS برای مدل‌سازی و تحلیل مودال پوسته استفاده گردیده است. سپس به منظور بررسی صحت نتایج به دست آمده از روش‌های تحلیلی و عددی، یک مدل از پوسته‌ی استوانه‌ای ساخته شده از یک ماده الاستیک (فولاد) که جدار داخلی آن به وسیله یک ماده ویسکوالاستیک پوشش‌دهی گردیده، در آزمایشگاه مودال تحت آزمایش قرار گرفته است. نتایج سه روش تحلیلی، تجربی و عددی نیز با هم مقایسه گردیده‌اند.

۱- استادیار، azarkntu@yahoo.com

۲- استادیار

۳- کارشناس ارشد مکانیک

۴- کارشناس ارشد کنترل

¹ Kelvin-Voigt

² Classical Shell Theory

معادلات تعادل پوسته های استوانه ای

$$\begin{aligned}
 N_{x\varphi} &= N_{x\varphi} = \int_a^b \tau_{xy1} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz + \int_b^c \tau_{xy2} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \\
 M_x &= \int_a^b \sigma_{x1} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz + \int_b^c \sigma_{x2} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz \\
 M_\varphi &= \int_a^b z \sigma_{\varphi 1} dz + \int_b^c z \sigma_{\varphi 2} dz \\
 M_{x\varphi} &= - \int_a^b \tau_{xy1} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz - \int_b^c \tau_{xy2} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz \\
 M_{\varphi x} &= \int_a^b \tau_{\varphi x 1} z dz + \int_b^c \tau_{\varphi x 2} z dz
 \end{aligned} \quad (3)$$

روابط تنش- کرنش برای لایه های ایزوتروپیک به صورت جداگانه و به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xi} &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_{xi} + \nu_i \epsilon_{\varphi i}) \\
 \sigma_{\varphi i} &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_{\varphi i} + \nu_i \epsilon_{xi}) \\
 \tau_{x\varphi i} &= G_i + \gamma_{x\varphi i}
 \end{aligned} \quad (4)$$

که E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، G مدول برشی و زیرنویس $i=1,2$ ، به ترتیب، مربوط به لایه های الاستیک و ویسکوالاستیک می باشد. حدود a, b, c و انتگرال در عبارات برآیند تنش (معادلات ۳)، مطابق شکل ۳ برای پوسته دو لایه با روابط زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
 a &= -(h_2 + d) \\
 b &= -d \\
 c &= h_1 - a
 \end{aligned} \quad (5)$$

d فاصله سطح میانی از نقطه برخورد دو لایه، و اندازه گیری شده در جهت عمود، با رابطه زیر تعریف می گردد:

$$d = \frac{S_1 h_1 - S_2 h_2}{2(S_1 h_1 - S_2 h_2)} \quad (6)$$

که در آن:

$$S_i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}, \quad i=1,2 \quad (7)$$

همچنین، با توجه به این که:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8)$$

آن گاه:

$$G = \frac{S_i(1-\nu)}{2} \quad (9)$$

مولفه های بردار کرنش در رابطه (۴) مطابق با تئوری تقریب اول لاو بصورت توابع خطی از مختصه ضخامت Z بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \epsilon_x^\circ + z k_x^\circ \\
 \epsilon_\varphi &= \epsilon_\varphi^\circ + z k_\varphi^\circ \\
 \epsilon_{x\varphi} &= \gamma_{x\varphi}^\circ + 2z k_{x\varphi}^\circ
 \end{aligned} \quad (10)$$

که در این روابط ϵ_x و ϵ_φ به ترتیب در جهت های محوری و محیطی و $\epsilon_{x\varphi}$ کرنش برشی، در فاصله Z از سطح میانی می باشند. ϵ_x° و ϵ_φ° و $\gamma_{x\varphi}^\circ$ کرنشهای سطح میانی و k_x° و k_φ° و $k_{x\varphi}^\circ$ انحناهای سطح میانی می باشند و بر اساس تئوری تقریب اول لاو بصورت زیر تعریف می شوند [۹]:

شکل ۱، یک پوسته نازک استوانه ای الاستیک، که دیواره داخلی اش با یک ماده ویسکوالاستیک پوشیده شده است، را با شعاع متوسط R ، و طول L به همراه دستگاه مختصات مرجع (جهت های مثبت قراردادی) نشان می دهد. h_1 ضخامت لایه اول (پوسته اصلی) یا همان لایه الاستیک، و h_2 ضخامت لایه دوم یا همان لایه ویسکوالاستیک می باشند. سطح میانی پوسته به عنوان سطح مرجع در نظر گرفته شده و دستگاه مختصات x, y و Z روی آن قرار داده شده است. u, v و w مولفه های جابجایی طولی، مماسی و شعاعی سطح پوسته به ترتیب در جهت های x, y و Z می باشند. برای پوسته های استوانه ای متقارن چرخشی (دایروی) از تبدیل $y \rightarrow R\varphi$ استفاده می شود.

در شکل (۲) یک المان از پوسته نشان داده شده است. $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}, Q_x, Q_\varphi$ گشتاور و گشتاورهای منتجه های p_x, p_y, p_z و مجموع نیروهای اینرسی و تحریک های خارجی متغیر با زمان در جهت های x, φ و Z هستند. معادلات تعادل دینامیکی المان پوسته پس از ساده شدن با استفاده از تئوری کلاسیک لایه ها در جهت های x, y و Z بصورت زیر می باشد [۲].

$$\begin{aligned}
 R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + R p_x &= 0 \\
 \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + R p_y &= 0 \\
 R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial \varphi \partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + N_\varphi + R p_z &= 0
 \end{aligned} \quad (1)$$

با توجه به آنکه هدف این مقاله بررسی ارتعاشات آزاد می باشد از نیروهای تحریک خارجی صرف نظر می شود بنابراین p_x, p_y و p_z بصورت زیر در می آیند.

$$\begin{cases} p_x = -m_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ p_y = -m_\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ p_z = -m_\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $m_\rho = \rho_1 h_1 + m_\rho = \rho_2 h_2$ چگالی جرمی لایه $i=1$ است (جرم واحد پوسته دو لایه هستند)

استخراج معادلات حرکت پوسته استوانه ای دولایه با تئوری کلاسیک پوسته ها

اکنون، از معادلات (۱) برای پیدا کردن معادلات حرکت پوسته استوانه ای دایروی دو لایه استفاده می گردد. با توجه به نام گذاری اندازه ها و دستگاه مختصات انتخابی برای پوسته دو لایه و نیز المان دو لایه بارگذاری شده توسط مجموعه نیروها و گشتاورهای واحد مطابق شکل ۲، روابط زیر برای پوسته دولایه برقرار هستند [۲]:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_a^b \sigma_{x1} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz + \int_b^c \sigma_{x2} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \\
 N_\varphi &= \int_a^b \sigma_{\varphi 1} dz + \int_b^c \sigma_{\varphi 2} dz
 \end{aligned}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{\lambda x}{L} \sin n\varphi T_{mn}(t) \quad (16)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{\lambda x}{L} \cos n\varphi T_{mn}(t)$$

A_{mn} ، B_{mn} و C_{mn} ضرایب ثابت شکل مود هستند. m تعداد نیم موجه‌های طولی، n تعداد موجه‌های محیطی، $\lambda = m\pi$ و $T_{mn}(t) = e^{i\omega_{mn}t}$ تابع زمانی هستند. که در آن ω_{mn} فرکانس طبیعی پوسته است. با استفاده از روابط (16) و جایگزینی آنها در معادلات تعادل (14) و استفاده از روش گالرکین و پس از ساده سازی معادلات بصورت زیر در می‌آیند:

$$[[k]_{mn} - \omega_{mn}^2 [M]_{mn}] \{\Delta\}_{mn} = [\Omega]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = 0 \quad (17)$$

که در آن $\{\Delta\}_{mn}$ بردار ضرایب ثابت شکل مود، $[M]_{mn}$ ماتریس جرم و $[k]_{mn}$ ماتریس سختی نامیده می‌شوند. با قرار دادن دترمینان ضرایب دستگاه معادلات (17) مساوی صفر (یعنی حل یک مسأله مقدار ویژه)، معادله فرکانسی پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر ساده تحت بار محوری بدست می‌آید:

$$\det([k]_{mn} - \omega_{mn}^2 [M]_{mn}) = 0$$

$$\beta_1 \omega_{mn}^6 + \beta_2 \omega_{mn}^4 + \beta_3 \omega_{mn}^2 + \beta_4 = 0 \quad (18)$$

که β_i ها ضرایب ثابت می‌باشند و به صورت زیر به دست می‌آیند:

از حل معادله (18) فرکانسهای طبیعی پوسته بر حسب رادیان بر ثانیه بدست می‌یابند و با قرار دادن این فرکانسها در معادله (17)، ضرایب ثابت شکل مودهای ارتعاشی بدست می‌آیند.

مدل سازی و تحلیل در نرم افزار ANSYS

برای سنجش درستی پاسخ‌های به دست آمده از تحلیل ارتعاشات آزاد، پوسته استوانه‌ای دولایه در نرم‌افزار ANSYS مدل‌سازی شده است. برای مدل‌سازی پوسته توسط نرم افزار ANSYS از المان Shell 99 استفاده شده است که دارای هشت گره با شش درجه آزادی می‌باشد (شکل 4).

ساخت پوسته استوانه‌ای دولایه و انجام آزمایش مودال

برای ارزیابی نتایج به دست آمده از روش‌های تحلیلی و عددی مورد استفاده در این مقاله، یک پوسته‌ی استوانه‌ای دولایه که لایه بیرونی آن از جنس فولاد و لایه داخلی از جنس یک ماده ویسکو الاستیک است، ساخته شد. لوله فلزی با انجام فرآیند ماشین‌کاری (براده برداری) بر روی یک لوله‌ی بدون درز ساخته شد و سپس در مرحله‌ی بعد، لایه ویسکو الاستیک به ضخامت چهار میلی‌متر با پاشش توسط دستگاه مخصوص به جدار داخلی پوسته استوانه‌ای تشکیل گردید (شکل 5). بمنظور انجام تست تجربی، چیدمان آزمایش مطابق شکل 6 چیده شد. به منظور تعیین نقاط نصب شتاب‌سنج‌ها بر روی نمونه‌ی ساخته شده برای اندازه‌گیری خروجی، سطح بیرونی مدل در هفت نقطه، با فاصله مساوی از یکدیگر، واقع در تمام طول آن، از ابتدا تا انتها علامت‌گذاری شد. سپس سطح مزبور در هر یک از این نقاط هفت‌گانه به صورت محیطی و در هشت نقطه با فواصل یکسان تقسیم‌بندی گردید (شکل 7). برای اندازه‌گیری میزان نیروی تحریک (ورودی) از یک نیروسنج استفاده شده است. شرایط مرزی لوله در آزمایش به صورت دو سر آزاد و با آویزان کردن از دو سر لوله به وسیله یک کش، که وزن آن در مقایسه با وزن لوله قابل چشم‌پوشی است، در نظر گرفته شده است که شکل 8 آن را نشان می‌دهد.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_\varphi^\circ \\ \gamma_{x\varphi}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^\circ \\ k_\varphi^\circ \\ k_{x\varphi}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

با جایگزین کردن روابط (11) در روابط (3) و انتگرال‌گیری در محدوده‌ی معرفی شده توسط رابطه (5)، و نیز چشم‌پوشی از z/R نسبت به واحد، نیروها و گشتاورهای واحد بر حسب تغییر مکانهای به دست می‌آیند:

$$N_x = (A_1 \frac{\partial}{\partial x})u + (\frac{A_{2v}}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{D_{2v}}{2R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi})v - (\frac{A_{2v}}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})w$$

$$N_\varphi = (A_{2v} \frac{\partial}{\partial x})u + (\frac{A_2}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi})v - (\frac{A_2}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{D_{2v}}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2})w \quad (12)$$

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = (\frac{A_1 - A_{1v}}{2R} \frac{\partial}{\partial \varphi})u + (\frac{A_1 - A_{1v}}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{D_{2v}}{2R} \frac{\partial}{\partial x})w$$

$$M_x = (\frac{D_{1v}}{2R} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{D_{1v}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi})v - (\frac{D_{1v}}{2R} + B_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{1v}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})w$$

$$M_\varphi = (\frac{D_{1v}}{2} \frac{\partial}{\partial x})u - (\frac{B_1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi})v - (\frac{B_2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{1v} \frac{\partial^2}{\partial x^2})w$$

$$M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = (\frac{D_{1v}}{4R} \frac{\partial}{\partial \varphi})u + (\frac{D_{1v}}{4} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{B_2 - B_{1v}}{R} \frac{\partial}{\partial x})v + (\frac{B_1 - B_{1v}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi})w$$

ثابت‌های به کار رفته در معادلات (12) عبارت‌اند از [2]:

$$A_1 = S_1 h_1 + S_2 h_2$$

$$A_{1v} = S_1 h_1 v_1 + S_2 h_2 v_2 \quad (13)$$

$$B_1 = \frac{1}{3} (S_1 h_1^2 - S_2 h_2^2) - d (S_1 h_1^2 - S_2 h_2^2) + d^2 (S_1 h_1 + S_2 h_2)$$

$$B_1 = \frac{1}{3} (S_1 h_1^2 v_1 - S_2 h_2^2 v_2) - d (S_1 h_1^2 v_1 - S_2 h_2^2 v_2) + d^2 (S_1 h_1 v_1 + S_2 h_2 v_2)$$

$D_{1v} = (S_1 h_1^2 v_1 - S_2 h_2^2 v_2) - 2d (S_1 h_1 v_1 + S_2 h_2 v_2)$

با جایگزینی روابط (12) در روابط (1)، معادلات تعادل بصورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R p_x \\ -R p_y \\ -R p_z \end{Bmatrix} \quad (14)$$

L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی هستند.

شرایط مرزی پوسته استوانه‌ای

پوسته بصورت دوسر ساده در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی برای یک پوسته استوانه‌ای با دو سر تکیه‌گاه ساده (Fully Supported Simply) در $x=0$ و $x=L$ بصورت زیر تعریف می‌شوند [9]:

$$N_x(0, \varphi, t) = N_x(L, \varphi, t) = 0$$

$$M_x(0, \varphi, t) = M_x(L, \varphi, t) = 0 \quad (15)$$

$$w(0, \varphi, t) = w(L, \varphi, t) = 0$$

به منظور ارضای شرایط مرزی دو سر ساده، w, v, u بصورت سریهای فوریه دوگانه زیر تعریف می‌شوند [9]:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{\lambda x}{L} \cos n\varphi T_{mn}(t)$$

جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای دولایه برای شرایط

مرزی F-F

درصد خطای نتایج عددی (%)	درصد خطای نتایج تحلیلی (%)	فرکانس (Hz) (نتایج آزمایشگاهی)	فرکانس (Hz) (نتایج عددی)	فرکانس (Hz) (نتایج تحلیلی)
۰/۵۴	۰/۴۴	۳۸۹/۲۸	۳۹۱/۳۹	۳۸۷/۵۴
۰/۵۳	۰/۷۵	۴۰۱/۹۹	۳۹۹/۸۴	۴۰۵/۰۰
۰/۱۶	۰/۵۷	۷۷۱/۵۹	۷۷۰/۳۲	۷۶۷/۲۳
۰/۰۸	۰/۷۴	۱۰۶۹/۱۷	۱۰۷۰/۰۰	۱۰۷۷/۰۵
۰/۰۰	۰/۵۸	۱۱۱۲/۰۱	۱۱۱۲/۰۰	۱۱۱۸/۴۶
۰/۰۴	۰/۴۴	۱۱۹۲/۵۷	۱۱۹۳/۰۰	۱۱۸۷/۳۱
۰/۲۳	۰/۶۳	۱۲۷۲/۰۵	۱۲۷۵/۰۰	۱۲۶۴/۰۰
۰/۰۰	۰/۸۵	۱۴۶۴/۰۳	۱۴۶۴/۰۰	۱۴۵۱/۵۴

همانطور که مشاهده می شود، تطابق خوبی میان روش تحلیلی حاضر، مراجع و نرم افزار وجود دارد. در صد خطا بسیار کم می باشد.

بعضی از عوامل موثر بر رفتار ارتعاشی پوسته‌ها، عبارتند از: شرایط مرزی، پارامترهای هندسی می باشند. در شکل ۱۰ اثر بعضی از شرایط مرزی روی فرکانس‌های طبیعی پوسته بررسی شده است. همان گونه که در شکل مشاهده می شود، در تعداد کم موج‌های محیطی (n)، شرایط مرزی بسیار موثر هستند، در حالی که با زیاد شدن تعداد موج‌های محیطی، اثر شرایط مرزی بر روی فرکانس طبیعی بسیار ناچیز می گردد. با توجه به نمودار، بالاترین فرکانس طبیعی مربوط به پوسته دو سر آزاد، و بعد از آن به ترتیب به شرایط مرزی دو سر گیردار، دو سر ساده، و یک سر گیردار- یک سر آزاد مربوط می باشند. پارامترهای هندسی مانند نسبت ضخامت لایه الاستیک به شعاع (h₁ / R)، نسبت ضخامت لایه ویسکوالاستیک به شعاع (h₂ / R)، و نسبت طول به شعاع (L / R)، بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته تأثیر می گذارند. در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ به ترتیب اثر نسبت ضخامت به شعاع و نسبت طول به شعاع برای پوسته با شرایط مرزی دو سر ساده روی فرکانس‌ها بررسی شده است. همان طور که در شکل ۱۱ مشخص است، در مورد پوسته دو سر ساده با افزایش تعداد موج محیطی تأثیر ضخامت لایه ویسکوالاستیک روی فرکانس افزایش می یابد. به طوری که در n=5 برابر شدن ضخامت، فرکانس هم تقریباً پنج برابر شده و هرچه مقدار n بالاتر رود اثر افزایش ضخامت نیز بیشتر می شود.

همان طور که در شکل ۱۲ مشخص است، در مورد پوسته دو سر ساده با افزایش تعداد موج محیطی تأثیر ضخامت لایه الاستیک روی فرکانس افزایش می یابد. به طوری که در n=5 برابر شدن ضخامت، فرکانس هم تقریباً ۲/۵ برابر شده و هرچه مقدار n بالاتر رود اثر افزایش ضخامت نیز بیشتر می شود. همان طور که در شکل ۱۳ ملاحظه می شود، با افزایش تعداد موج محیطی، اثر نسبت طول به شعاع بر روی فرکانس‌های طبیعی کاهش می یابد. در موج محیطی پایین با افزایش طول پوسته (افزایش نسبت طول به شعاع) فرکانس کاهش می یابد به طوری که در n=1 با چهار برابر شدن طول پوسته، فرکانس حدود ۹۲٪ کاهش می یابد در حالیکه در n=5، اثر تغییر در فرکانس بسیار ناچیز است

نتیجه گیری

۱- اثر نسبت ضخامت به شعاع در تعداد زیاد موج محیطی (n) ظاهر می شود و در تعداد کم موج محیطی اثر آن ناچیز است. با افزایش این نسبت، فرکانس افزایش می یابد.

آزمایش در بازه‌ی فرکانسی صفر تا ۱۶۰۰ هرتز انجام، و نمودارهای پاسخ فرکانسی‌های به دست آمده توسط یک کامپیوتر صنعتی رسم گردیده‌اند. سپس فرکانس‌های پوسته و شکل مودهای مربوطه از نمودارهای پاسخ فرکانسی استخراج شده‌اند که در شکل ۹ مشاهده می شوند.

بررسی نتایج

در این قسمت به بررسی نتایج می پردازیم. در جدول (۱) فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای به دست آمده از روش تحلیلی حاضر، با نتایج آزمایشگاهی در مرجع [۱۰] مقایسه گردیده‌اند. همان گونه که پیدا است تطابق خوبی بین نتایج تحلیلی و نتایج حاصل از آزمایش دیده می شود. مدل مورد آزمایش یک پوسته فولادی ساده (تک لایه و ایزوتروپیک) است، که ویژگی‌های مکانیکی آن مطابق لایه الاستیک جدول (۴-۲) و ویژگی‌های هندسی آن به صورت زیر می باشند:

$$L = 118mm, R = 22mm, h = 1mm$$

آزمایش در بازه فرکانسی صفر تا ۶۰۰۰ هرتز انجام شده و فرکانس‌های پوسته و شکل مودها از روی پاسخ فرکانسی پوسته به دست آمده‌اند.

جدول ۱- مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک برای

شرایط مرزی C-F

درصد خطا %	فرکانس (Hz) (نتایج آزمایشگاهی) [۱۰]	فرکانس (Hz) (نتایج تحلیلی حاضر)	شماره موده‌ای طولی (m) و محیطی (n)
۲/۳	۱۹۰۴	۱۹۴۷/۹۶	(m=۱ و n=۱)
۰/۶۶	۱۵۰۷	۱۴۹۷	(m=۱ و n=۲)
۰/۸۸	۳۹۸۰	۳۹۴۵	(m=۱ و n=۳)
۰/۴۸	۴۹۶۰	۴۹۲۵/۹۵	(m=۲ و n=۳)
۳/۳۷	۳۱۲۸	۳۲۲۳/۵۳	(m=۳ و n=۱)

ابعاد هندسی و خصوصیات و مکانیکی پوسته مورد آزمایش در جداول ۲ و ۳ به ترتیب آمده اند.

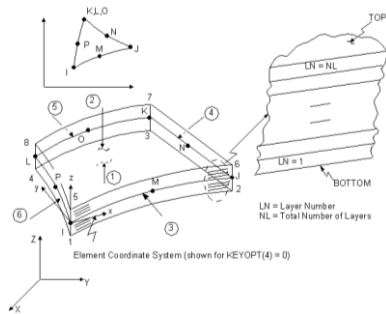
جدول ۲- ابعادی هندسی نمونه تحت آزمایش

پوسته دولایه	شعاع خارجی (mm)	شعاع داخلی (mm)	طول (mm)
لایه خارجی (الاستیک)	۹۰	۸۵	۷۰۷
لایه داخلی (ویسکوالاستیک)	۸۵	۸۱	۷۰۷

جدول ۳- خصوصیات مکانیکی مواد به کار رفته در ساخت نمونه

جنس پوسته دولایه	ρ (kg / m ³)	E (GPa)	ν
لایه خارجی- فولاد (الاستیک)	۷۸۰۰	۲۰۰	۰/۳
لایه داخلی (ویسکوالاستیک)	۱۱۰۰	۲/۳ × ۱۰ ^{-۲} (۱+۰/۳۴i)	۰/۴

نتایج تحلیلی به دست آمده برای پوسته دولایه (لایه خارجی الاستیک و لایه داخلی ویسکوالاستیک) با نتایج آزمایشگاهی (تست عملی انجام شده در آزمایشگاه مودال) و نرم افزار مقایسه در جدول ۴ نشان داده شده‌اند.

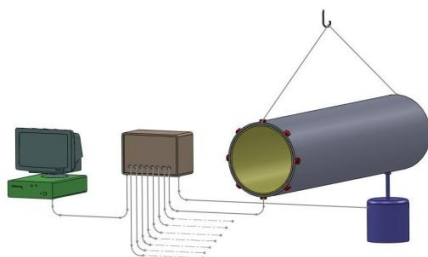


شکل ۴- ساختار المان Shell-99

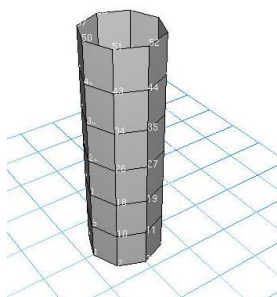


شکل - Error! No text of specified style in document.

انتهای برش خورده پوسته



شکل ۶- چیدمان آزمایش مودال



شکل ۷- تقسیم‌بندی نمونه در محیط نرم‌افزار آزمایش مودال

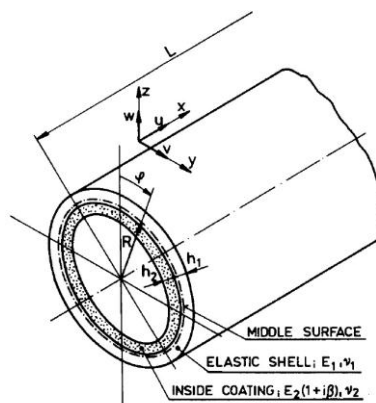


شکل ۸- چیدمان شتاب‌سنج‌ها و لرزش‌گر روی مدل در آزمایشگاه مودال

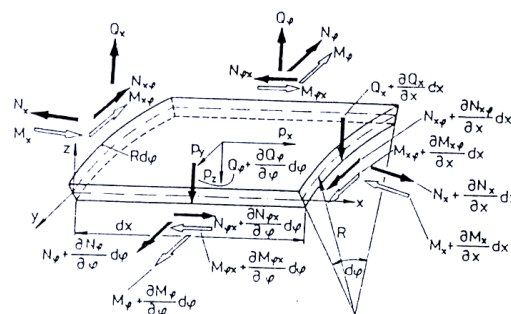
۲- اثر نسبت طول به شعاع فقط در تعداد کم موج محیطی (n) ظاهر می‌شود و وقتی که تعداد موج محیطی زیاد می‌شود افزایش این نسبت تاثیری بر روی فرکانس ندارد. با افزایش این نسبت، فرکانس کاهش می‌یابد.

۳- فرکانس پایه در $m=1$ اتفاق می‌افتد و با افزایش نیم‌موج طولی (m) فرکانس افزایش می‌یابد.

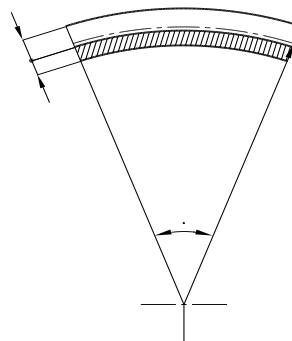
۴- در تعداد کم موج‌های محیطی (n)، شرایط مرزی بسیار موثر هستند، در حالی که با زیاد شدن تعداد موج‌های محیطی، اثر شرایط مرزی بر روی فرکانس طبیعی بسیار ناچیز می‌گردد.



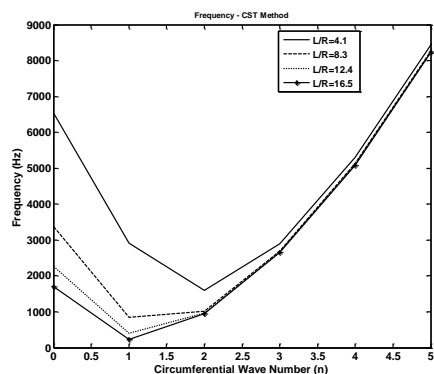
شکل ۱- دستگاه مختصات پوسته استوانه‌ای دولایه با پوشش دهی داخلی



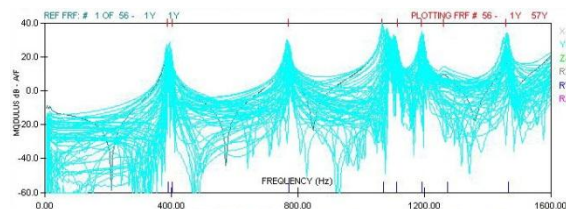
شکل ۲- نیروها و گشتاورهای واحد وارد بر المان پوسته دولایه



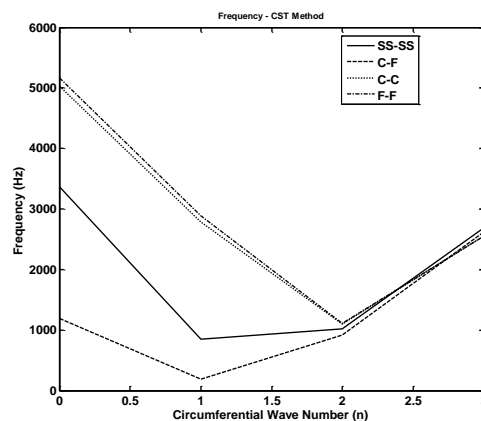
شکل ۳- نمایش ضخامت لایه‌ها



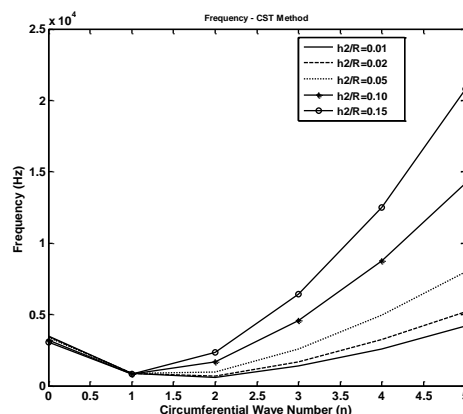
شکل ۹- نمودار پاسخ فرکانسی آزمایش نمونه



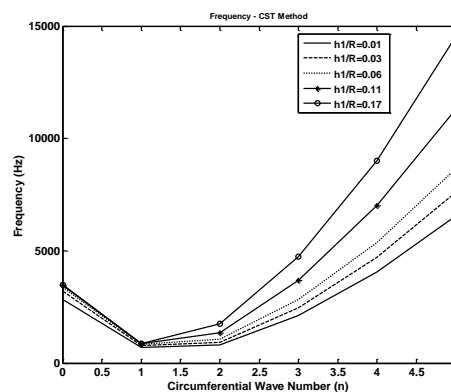
شکل ۱۰- اثر شرایط مرزی بر روی فرکانس طبیعی پوسته دولایه



شکل ۱۱- اثر ضخامت لایه ویسکوالاستیک بر روی فرکانس طبیعی پوسته دولایه (برای شرایط مرزی SS-SS و m=1)



شکل ۱۲- اثر ضخامت لایه الاستیک بر روی فرکانس طبیعی پوسته دولایه (برای شرایط مرزی SS-SS و m=1)



شکل ۱۳- اثر پارامتر L/R بر روی فرکانس طبیعی پوسته دولایه (برای شرایط مرزی SS-SS و m=1)

مراجع

[1] Garner, R. S., "Method for Determination of Complex Moduli Associated with Viscoelastic Material", A Thesis Presented for the Master of Science Degree, The University of Tennessee, Knoxville, 2011.

[2] Markuš Š., "The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells", 1st Edition, Elsevier, Czechoslovakia, 1988.

[3] Kagawa Y. and Krokstad A., "On the Damping of Cylindrical Shells Coated with Viscoelastic Materials", ASME publication 69 – Vibr. 9, 1-9, 1969.

[4] Mohammadi F., Sedaghati R., "Design Optimization of Viscoelastic Sandwich Cylindrical Shell Considering Thick Damping Core Layer", 12th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM XII, 1-7, Port of Spain, Trinidad, 2012.

[5] Mahmoodkhani S., Sadeghmanesh M., and Haddadpour H., "Vibration Analysis of Cylindrical Shells Fully Treated with Constrained Layer Damping Using Kelvin-Voigt's Model", The 10th Iranian Aerospace Society Conference, The Science and Research Tarbiat Modares University, 2011.

[6] Cao XT., Zhang ZY., and Hua HX., "Free Vibration of Circular Cylindrical Shell with Constrained Layer Damping", Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Shanghai University and Springer-Verlag, 32(4), 495-506, 2011.

[7] Salehi M., Bakhtiari-Nejad F., and Besharati, A., "Time-Domain Analysis of Sandwich Shells with Passive Constrained Viscoelastic Layers", Scientia Iranica, Sharif University of Technology, Vol. 15, No. 5, 637-643, 2008.

[8] Yu X., et al., "New Matrix Method for Analyzing Vibration and Damping Effect of Sandwich Circular Cylindrical Shell with Viscoelastic Core", Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Shanghai University and Springer-Verlag, 29(12), 1587-1600, 2008.

[9] Young-shin Lee, Ki-Du Lee, "On the dynamic response of laminated circular cylindrical shells under impulse loads", Computers & structures 63 1 (1997) 149-157

[۱۰] آذرافزا، "بهینه‌سازی وزنی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه"، پایان‌نامه دکتری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۸۴.