

## تحلیل برهم‌کنش‌های تماسی در سازه‌های مدرج تابعی ویسکوالاستیک با استفاده از اجزای محدود مدرج

حسین اشرفی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

### چکیده

تحلیل مسائل محیط‌های ناهمگن به دلیل کاربردهای گسترده مواد پیشرفته، به ویژه، مواد با ساختار مدرج تابعی، در ساخت ورق‌ها و پوسته‌های مخازن، واکنشگاه‌های هسته‌ای، توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌های جدید در سال‌های اخیر، مورد توجه افزون محققان مکانیک محاسباتی قرار گرفته است. از سوی دیگر، اغلب محیط‌های مدرج تابعی مانند گونه‌هایی از پلیمرها، دارای رفتاری وابسته به زمان تحت یک تاریخچه بارگذاری می‌باشند. هدف مقاله حاضر، توسعه یک فرمول‌بندی محاسباتی اجزای محدود نوی و انطباقی بر مبنای الگوریتمی توانمند به منظور محاسبه فشارهای شبه‌استاتیک تماسی در سازه‌های ویسکوالاستیک مدرج تابعی می‌باشد. از مدل تعمیم یافته ماکسول برای مدل‌سازی توابع وارهدیگی معادلات متشکله ویسکوالاستیک بهره گرفته شده است که در قالب دو تابع وارهدیگی کلی در اتساع (پاسخ حجمی) و برش (پاسخ انحرافی) نشان داده می‌شود. با اعمال اصل کار مجازی یک فرمول‌بندی اجزای محدود با فرآیند ایجاد فرم نوی در معادلات وارهدیگی ویسکوالاستیک به دست آمده است. به منظور تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک نیز بر اساس شرایط سینماتیکی و هندسی اجزای در حال تماس از رهیافت لاگرانژ الحاقی انطباقی استفاده گردیده است. نتایج نشان داد که تفاوت قابل توجهی بین منحنی‌های فشار تماسی با تغییر پارامتر ناهمگنی مشاهده نگردید ولی تنش عمودی در نزدیکی دو گوشه ناحیه واسط تماس افزایش قابل توجهی داشت.

**واژه‌های کلیدی:** سازه‌های پیشرفته مدرج تابعی - برهم‌کنش تماسی - ویسکوالاستیسیته - روش اجزای محدود مدرج -

### مقدمه

در سال‌های اخیر، با توسعه سازه‌های هوافضایی، موتورهای پرقدرت، توربین‌ها، واکنشگاه‌های هسته‌ای و دیگر ماشین‌های مدرن در صنایع پیشتاز نیاز به موادی مستحکم‌تر و با مقاومت حرارتی بالاتر احساس شده است. یک ماده با ساختار مدرج تابعی، ماده‌ای مرکب با میکرو ساختار ناهمگن و غیریکنواخت است که به دلیل تغییر پیوسته خواص فیزیکی ترکیب و کسر حجمی فازهای تشکیل‌دهنده از یک سطح به سطح دیگر، جسم موردنظر دارای ماکرو ساختاری پیوسته می‌باشد. از مزایای مهم مواد مدرج تابعی نسبت به مواد مرکب لایه‌ای، عدم گسستگی در ویژگی‌های مواد در محل اتصال لایه‌های آن‌ها است.

مسائل مقدار مرزی در برگیرنده تماس یکی از مهمترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی مکانیک، سازه و به ویژه در کاربردهای علوم هوایی و فضایی می‌باشند. این نوع مسائل در برهم‌کنش‌های مکانیکی

سامانه‌های فیزیکی به دلیل نامشخص بودن ناحیه تماسی به عنوان مسائل مقدار مرزی غیرخطی شناخته می‌شوند و به الگوریتم‌های حل خاصی نیاز دارند. این برهم‌کنش‌ها اغلب در مسائل مرتبط با مکانیک تماس به دلیل طبیعت غیرخطی و پیچیده تماس در فرآیندهای طراحی مرسوم با فرضیات خاصی بطور تقریبی حل می‌شدند [۱]. اما امروزه مکانیسم‌های تماس را می‌توان با گسترش تکنولوژی کامپیوترهای مدرن با بکارگیری ابزاری به نام مکانیک محاسباتی شبیه‌سازی نمود. در این تحقیق، روش محاسباتی اجزای محدود جدیدی به منظور به‌کارگیری در تحلیل تماس و برخورد در مواد پیشرفته جدید با ساختار مدرج تابعی ارائه شده است.

ادن و کیکوچی [۲] مسائل تماسی بدون اصطکاک را با استفاده از نامساوی‌های تغییراتی فرمول‌بندی کردند و در خصوص وجود و یکنایی حل خود نیز با ارائه مثال‌های عددی بحث نمودند. سیمو و لارسن [۳] نیز برای نخستین مرتبه از رهیافت لاگرانژ الحاقی برای تحلیل مسائل تماسی با قابلیت بهنگام‌سازی خودکار ضریب پנالتی و ارضای قیود از طریق مقادیر محدود پنالتی استفاده نمودند. زوچر و همکارانش [۴] هم در یک مدل المان‌های محدود سه بعدی شبه‌استاتیکی از یک فرمول‌بندی نوی مستقیم برای اعمال به معادلات متشکله یک محیط ویسکوالاستیک ارتوتروپیک استفاده کردند. یک مدل المان‌های محدود دو بعدی نیز بر اساس اعمال اصل کار مجازی توسط چن و همکارانش [۵] با استفاده از یک فرآیند نوی در معادلات متشکله مدل ماکسول تعمیم یافته برای تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک ارائه گردید. بر اساس یک فرمول‌بندی تغییراتی و استفاده از اصل پسونده اویلر، فرناندز و سوفونی [۶] مسئله تماس شبه‌استاتیکی بدون اصطکاک بین یک پیکره ویسکوالاستیک با یک بستر تغییرشکل پذیر را مورد توجه قرار دادند. آماساد و فابری [۷] نیز مسئله تماسی تک سویه بین یک پیکره ویسکوالاستیک با یک بستر صلب را با در نظر گرفتن قانون اصطکاک کولمب تحلیل کردند. محمود و همکارانش [۸] یک فرمول‌بندی اجزای محدود نوی را برای تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک در شرایط شبه استاتیکی و اصطکاکی ارائه نمودند که در آن به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله ویسکوالاستیک از مدل ویچرت برای در نظر گرفتن هم رفتار وارهدیگی تنشی و هم خزشی استفاده کردند و برای اجرای قیود تماسی نیز از روش مرسوم ضریب لاگرانژ بهره گرفتند. فرآیند نموسازی متفاوتی برای انتگرال‌گیری از انتگرال‌های استیلجس معادلات وارهدیگی اتساعی و برشی به کمک توابع واحد و دلتا توسط اشرفی [۹] ارائه گردید، که در آن برای حل قیود تماسی ویسکوالاستیک نیز از یک رهیافت لاگرانژ الحاقی بهبود یافته استفاده شد.

از آنجاکه محیط‌های با ساختار مدرج تابعی از اهمیت روزافزونی در کاربردهای مهندسی مدرن برخوردار شده‌اند، محققان توجه ویژه‌ای به

$$\delta\pi = \int_{\Omega_u} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \int_{\bar{t}=-\infty}^{\bar{t}=t-\tau} \left\{ C_{ijkl} \left( \mathbf{x}, \xi_{ijkl} [t-\bar{t}] - \dot{\xi}_{ijkl} [\tau] \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau) - \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, \tau) \right) \frac{\partial \delta \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \right\} dt d\bar{t} d\Omega_u - \int_{\Omega_T} \int_{\bar{t}=-\infty}^{\bar{t}=t} T_i(\mathbf{x}, t-\bar{t}) \frac{\partial \delta u_i(\mathbf{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} d\Omega_T = 0 \quad (2)$$

بردار جابجایی هر المان محدود به جابجایی گره‌ای وابسته به زمان و توابع شکل  $N_{ij}$  آن المان وابسته است:

$$u_i^e(\mathbf{x}, t) = N_{ij}(\mathbf{x}) q_j(t) \quad (3)$$

با مشتق‌گیری از این رابطه به معادله‌ی حاکم بین میدان کرنش آن المان با جابجایی‌های گره‌ای و مشتق توابع شکل  $B_{ij}$  آن المان می‌رسیم:

$$\varepsilon_i^e(\mathbf{x}, t) = B_{ij}(\mathbf{x}) q_j(t) \quad (4)$$

که

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \}^T \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{d} \mathbf{N} \quad (6)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

از آنجا که استفاده از توابع شکل خطی برای چنین تحلیل‌های سازه‌ای مناسب نمی‌باشد، اجزای محدود مثلی با سه نقطه گره‌ای مناسب نبوده و حداقل باید از اجزای محدود مستطیلی با چهار نقطه گره‌ای استفاده نمود. افزایش دقت پاسخ‌ها به دو شیوه تجزیه المان و یا افزایش مرتبه توابع شکل بدون افزایش تعداد اجزای محدود امکان‌پذیر است. روش دوم، عموماً دقت بالاتری داشته و برای تعداد نقاط گره یکسان، می‌توان به دقت به مراتب بالاتری دست یافت. از این‌رو، در این رساله از اجزای محدود چهارضلعی هشت‌گره‌ای استفاده شده است. برای هر گره‌ی یک المان محدود مدرج، خواص ویسکوالاستیک  $C_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$  به صورت مجزا اختصاص می‌یابند و با استفاده از توابع شکل در نقاط انتگرال‌گیری گوس درون‌یابی می‌شوند.

با توجه به رابطه‌های فوق به رابطه‌ی تعادل زیر برای هر المان محدود دارای ساختار مدرج تابعی دست می‌یابیم:

$$\int_0^t k_{ij}(\mathbf{x}, \xi(t) - \xi(\tau)) \frac{\partial q_j(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\tau = f_i(\mathbf{x}, t) + f_i^{TH}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

که در این رابطه،  $k_{ij}$  ماتریس سفتی المان،  $f_i$  بردار نیروی مکانیکی و  $f_i^{TH}$  بردار نیروی حرارتی هستند؛ که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$k_{ij}(x_i, t) = \int_{\Omega_u} B_{ik}^T(x_i) C_{klmn}(x_k, \xi[t]) B_{nj}(x_n) d\Omega_u \quad (9)$$

$$f_i(x_i, t) = \int_{\Omega_T} N_{ij}(x_i) T_j(x_j, t) d\Omega_T$$

تحلیل این مسائل پیدا کرده‌اند. اکثر تحلیل‌های تماسی به مطالعه‌ی پاسخ تماسی محیط‌های الاستیک با ساختار مدرج تابعی به کمک روش‌های غیر محاسباتی اختصاص یافته‌اند که برخی از مهم‌ترین آن‌ها در ادامه معرفی می‌گردند. گیانو کوپلوس و سوروش [۱۰] مسئله‌ی متقارن محوری نیم فضای مدرج تابعی را تحت بارگذاری فرورونده‌های بدون اصطکاک دارای هندسه‌های متفاوت با توجه به مدول الاستیک با ساختار متغیر با ضخامت به صورت تابع نمایی و توانی بررسی کردند. یک حل تحلیلی برای مسئله الاستیسیته صفحه‌ای برای یک زیر لایه نیم فضایی با ساختار مدرج تابعی با افزایش یکنواخت توانی مدول الاستیک و یک پانچ صلب لغزشی توسط گیانو کوپلوس و پالوت [۱۱] ارائه شد. گولر و اردوقان [۱۲] نیز میدان تنش تماسی را برای پوشش‌های مدرج تابعی پیوسته شده با زیر لایه‌ی همگن بررسی کردند. کی و ونگ [۱۳] از یک فرآیند چندلایه‌ای برای تحلیل تماس صفحه‌ای پوشش‌های مدرج تابعی با تغییرات خواص مادی دلخواه استفاده کردند که در آن ناحیه‌ی مدرج تابعی به صورت مجموعه‌ای از تعدادی زیر لایه با مدول برشی متغیر شبیه‌سازی شد. ریعی و همکارانش [۱۴] مسائل متقارن محوری تماس بدون در نظر گرفتن اصطکاک بین یک پیکره‌ی صلب متقارن محوری، یک لایه‌ی الاستیک با ساختار مدرج تابعی و یک نیم فضای همگن را مورد بررسی و تحلیل قرار دادند.

رفتار تماسی ویسکوالاستیک اجسام تغییرشکل‌پذیر، در حالت ویژه به دلیل تغییرات پیوسته مرز در ناحیه مشترک تماس یک مسئله غیرخطی است که هم تحت تاثیر خواص الاستیک و هم خواص ویسکوز می‌باشد. از الگوریتم لاگرانژ الحاقی مبتنی بر شرایط سینماتیکی و هندسی، برای تحلیل تماس ویسکوالاستیک استفاده شده است. وسعت ناحیه تماس و توزیع تنش‌های تماسی در محیط‌های مدرج تابعی ویسکوالاستیک، به زمان وابسته می‌باشند. در این مقاله به توسعه یک فرمول‌بندی کلی بر اساس روش اجزای محدود با در نظر گرفتن تماس در سازه‌های ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود.

### مدل‌سازی و فرمول‌بندی

استخراج فرمول‌بندی‌های اجزای محدود با استفاده از اصول تغییراتی توسط محققان بسیاری انجام شده است. در این بخش، اصل تغییراتی را برای مسائل ویسکوالاستیک می‌توان به صورت زیر به کار برد [۱۵]:

$$\pi = \int_{\Omega_u} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \int_{\bar{t}=-\infty}^{\bar{t}=t-\tau} \left( \frac{1}{2} C_{ijkl} \left( \mathbf{x}, \xi_{ijkl} [t-\bar{t}] - \dot{\xi}_{ijkl} [\tau] \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \right) dt d\bar{t} d\Omega_u - \int_{\Omega_u} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \int_{\bar{t}=-\infty}^{\bar{t}=t-\tau} \left( C_{ijkl} \left( \mathbf{x}, \xi_{ijkl} [t-\bar{t}] - \dot{\xi}_{ijkl} [\tau] \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \right) dt d\bar{t} d\Omega_u \quad (10) - \int_{\Omega_T} \int_{\bar{t}=-\infty}^{\bar{t}=t} T_i(\mathbf{x}, t-\bar{t}) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} d\bar{t} d\Omega_T$$

که  $\Omega_u$  بیانگر حجم پیکره،  $\Omega_T$  نیز بیانگر رویه‌ای از پیکره است که تراکشن  $T_i$  بر روی آن اعمال شده است،  $C_{ijkl}$  بیانگر مشخصه‌های ساختاری وابسته به زمان و مکان، و  $\varepsilon_{ij}$  بیانگر کرنش‌های مکانیکی می‌باشند. حال به منظور استخراج فرمول‌بندی اجزای محدود با گرفتن تغییرات اول از معادله‌ی فوق داریم:

به منظور جلوگیری از نفوذ پیکره ها در یکدیگر از قید نفوذ ناپذیری تماس تک سوپه استفاده شده است. قانون تماس تک سوپه بین دو پیکره شامل شرایط نفوذ ناپذیری، فشاری و تکمیلی است که عبارتند از:

$$\begin{aligned} g_n^p &\leq 0 \quad [g_n^p = -d_n^p] \\ R_n^p &\geq 0 \\ (R_n^p)(g_n^p) &= 0 \quad (\text{for all } P \in \Gamma_c^2) \end{aligned} \quad (13)$$

شرط اصلی قانون تماس تک سوپه در عدم نفوذ پیکره های تماس و هدف در یکدیگر است. شرط فشاری تماس تک سوپه بیانگر عدم ایجاد کشش بین پیکره های تماسی و هدف است. شرط مکمل نیز نشان می دهد که پیکره تماس یا از هدف جدا می شود ( $R_n^p = 0, g_n^p < 0$ ) و یا بر روی پیکره هدف فشرده می گردد ( $R_n^p \geq 0, g_n^p = 0$ ). تماس بدون اصطکاکی در این مقاله بین پیکره ها فرض شده است که در نتیجه با حل مسئله بهینه سازی زیر به حل سیستم تماسی دست یافته ایم:

$$\begin{aligned} \min \quad \Pi &:= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{F}} \\ \text{subject to} \quad g_n^p &:= u_n^p - d_0^p \end{aligned} \quad (14)$$

که  $\Pi$  انرژی پتانسیل کل،  $\bar{\mathbf{K}}$  ماتریس سختی کل،  $\bar{\mathbf{U}}$  بردار جابجایی کل،  $\bar{\mathbf{F}}$  بردار نیروی خارجی کل و  $g_n^p$  قید تماسی گره محاسباتی  $P$  ام است ( $P = 1, 2, \dots, \text{NON}$ ). برای حل این نوع مسائل تماسی به منظور بدست آوردن بردار جابجایی  $\bar{\mathbf{U}}$  و ضرایب لاگرانژ  $R_n^p$  متناسب با NOC گره تماسی از یکی از روش های حل بهینه سازی استاندارد به نام روش لاگرانژ الحاقی استفاده شده است. به این دلیل که مسائل تماس بدون اصطکاک تنها در برگیرنده قیود نامساوی اند، لذا از قیود تساوی در الگوریتم استفاده نشده است. کنشمند لاگرانژ الحاقی  $\Phi$  نیز برای مسئله تماسی تحت قیود (14) به صورت زیر تعریف گردید:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}_n) &= \Pi + \\ &\frac{1}{2} \sum_{P=1}^{\text{NOC}} K_n^P [(g_n^p + \theta^P)_+ - (\theta^P)^2] \end{aligned} \quad (15)$$

که  $\boldsymbol{\theta}$  بیانگر بردار در برگیرنده پارامترهای  $\theta^P$  قید تماسی  $p$  ام است و  $\mathbf{K}_n$  بردار پارامترهای پنالتی مثبت را بیان می کند. همچنین  $(x)_+ = \max(0, x)$  در این رابطه نشان دهنده  $R_n^p = K_n^P \theta^P$  و بیانگر ضریب لاگرانژ قید  $P$  ام می باشند. در این رهیافت، قیود مؤثر  $I_1$  و غیرمؤثر  $I_2$  به صورت زیر بیان شدند:

$$I_1 = \{P : (g_n^p + \theta^P) \geq 0, P \in \Gamma_c^2\} \quad (16)$$

$$I_2 = \{P : (g_n^p + \theta^P) < 0, P \in \Gamma_c^2\} \quad (17)$$

سپس کنشمند لاگرانژ الحاقی  $\Phi$  را با توجه به این قیود به صورت ساده سازی شده زیر بازنویسی نمودیم:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}_n) &= \Pi - \frac{1}{2} \sum_{P \in I_2} K_n^P (\theta^P)^2 \\ &+ \sum_{P \in I_1} K_n^P \theta^P g_n^p + \frac{1}{2} \sum_{P \in I_1} K_n^P (g_n^p)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

ایده روش لاگرانژ الحاقی در واقع بر مبنای تبدیل یک مسئله مقید مورد نظر به یک سری مسائل بدون قید و کمینه سازی شده کنشمند

$$f_i^{th}(x_i, t) = \int_{\Omega_u} \int_{-\infty}^t B_{ik}(x_i) C_{klmn}(x_k, \xi[t] - \xi[\tau]) \frac{\partial \varepsilon_n^*(x_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\Omega_u$$

با سوار کردن یا هم گذاری ماتریس های اجزای محدود برای یک دامنه ی مشخص، به معادله ی تعادل کلی زیر دست می یابیم:

$$\begin{aligned} \int_0^t K_{ij}(x, \xi(t) - \xi(\tau)) \frac{\partial u_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau = F_i(x, t) \\ + F_i^{TH}(x, t) \end{aligned} \quad (10)$$

به طوری که در آن،  $K_{ij}$  ماتریس سختی کل،  $u_j(\tau)$  بردار جابجایی کل،  $F_i$  بردار نیروی مکانیکی کل و بردار نیروی حرارتی کل  $F_i^{TH}$  هستند. شایان ذکر است که به منظور حل یک مسئله ویسکوالاستیک تابعی مدرج نیاز به محاسبه ی کانولوشن عبارت معرفی شده است تا به این وسیله بتوان جابجایی های گره ای را برای هر المان تعیین نمود.

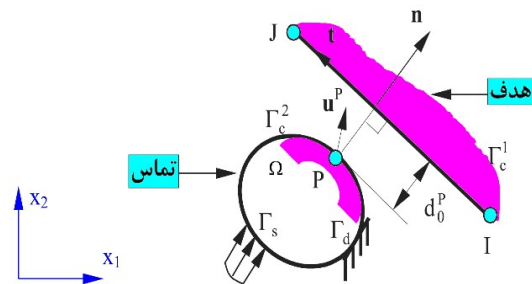
برای معرفی مشخصات مسئله تماسی دوبعدی، یک پیکره تغییرشکل پذیر به عنوان جسم تماسی و یک پیکره صلب به عنوان هدف مورد استفاده قرار گرفته اند. پیکربندی تماسی سیستم با مختصات مادی  $\mathbf{X} = [x_1, x_2]$  در شکل (1) نشان داده شده است. پیکره تغییرشکل پذیر یا پیکره تماسی به وسیله دامنه  $\Omega$  و مرز  $\Gamma$  مشخص شده است. پیکره تماسی تحت اعمال نیروهای حجمی  $b_i$ ، تراکشن سطحی  $T_i$  بر روی مرز  $\Gamma_s$  و جابجایی مشخص  $\bar{u}_i$  بر روی مرز  $\Gamma_d$  است. پیکره تماسی به تعداد NOE المان محدود در برگیرنده NON گره گسسته سازی شده است. گره ( $P$ ) در پیکربندی مرجع روی مرز پیکره تماسی با بردار  $X^P$  و نقاط ( $I$ ) و ( $J$ ) روی لبه پیکره هدف با بردارهای  $X^I$  و  $X^J$  قرار گرفته اند. سیستم مختصات موضعی روی لبه پیکره هدف با بردارهای واحد  $\mathbf{n}$  و  $\mathbf{t}$  نشان داده شده است. فاصله نرمال ابتدایی گره تماسی ( $P$ ) با رابطه زیر تعریف می شود:

$$d_0^p = (X^J - X^P) \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

فاصل نرمال همان گره در موقعیت فعلی پس از حرکت و جابجایی پیکره تماس با رابطه زیر بیان می گردد:

$$d_n^p = (d_0^p - \mathbf{u}^p \cdot \mathbf{n}) = (d_0^p - u_n^p) \quad (12)$$

که  $u_n^p$  بیانگر جابجایی نرمال گره تماسی ( $P$ ) است. نیروی تماسی  $f_c^p$  بر روی پیکره هدف در نتیجه تماس گره ( $P$ ) پیکره تماسی با لبه هدف ایجاد می شود که به دو مؤلفه تماس نرمال  $R_n^p$  و تماس مماسی اصطکاکی  $f_f^p$  قابل تجزیه است.



شکل 1 - پیکربندی تماسی یک سامانه مکانیکی

فشار عمودی  $p$  بر رویه‌ی بالایی سازه ناهمگن به صورت تک سویه فشرده می‌شود که در نتیجه شاهد پیدایش یک نیروی تماسی عمودی در واسط تماس هستیم.

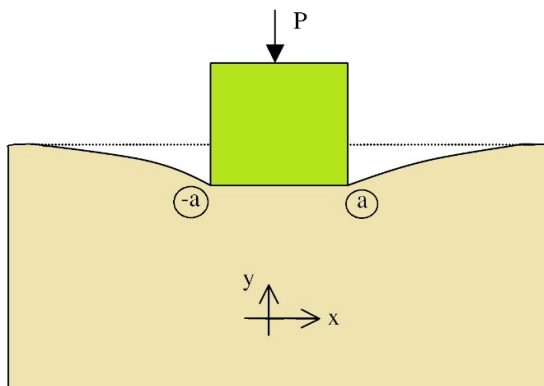
در رهیافت‌های محاسباتی از معادلات ساختاری مدل ناهمگن جامد ویسکوالاستیک استاندارد استفاده گردیده است. تغییرات مدول یانگ سازه مدرج تابعی، تحت شرایط بارگذاری شبه‌ایستایی به صورت مدل نمایی انتخاب شده است. در این مسئله از مدرج‌سازی نمایی برای مدول یانگ  $E$  به منظور بیان تغییرات ساختاری سازه در راستای ضخامت ( $y$ ) استفاده شده است. از این رو مدول ساختاری یانگ ماده مدرج نمایی عبارت است از:

$$(y, t) = \left[ k_2 + k e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \right] e^{(n \cdot y)} \quad (20)$$

به طوری که

$$n = \frac{1}{h} \ln(E_h / E_0) \quad (21)$$

در این رابطه،  $E_h$  و  $E_0$  به ترتیب بیانگر مقادیر مدول یانگ رویه‌ی بالایی و رویه‌ی پایینی سازه مدرج تابعی می‌باشند. ضریب  $n$  نیز بیانگر همان پارامتر ناهمگنی سازه مدرج تابعی است.



شکل ۲- مدل شماتیک برهم‌کنش تماسی بین سازه الاستیک فولادی و سازه مدرج تابعی ویسکوالاستیک

به منظور حل این مسئله از پارامترهای ( $L=h=3$  m)، ( $k_2=200$  MPa)، ( $n=0.25, 1, 2$ )، ( $L_1=h_1=0.25$  m)، ( $\nu=0.4$ )، ( $p=1$  MPa)، ( $E_0=1$  GPa)، ( $\tau=100$  sec) ( $G=0.15$ ) استفاده گردیده است. مشخصه‌های مکانیکی پانچ فولادی نیز به صورت ضریب پواسون ( $\nu=0.3$ ) و مدول یانگ ( $E=200$  GPa) انتخاب شده اند. مدول یانگ در تحلیل الاستیک بدون در نظر گرفتن مدل وابسته به زمان استاندارد در نظر گرفته شده است.

در ابتدا، رهیافت‌های ارائه شده در رساله با حل تحلیلی [۱۳] برای سازه مدرج تابعی الاستیک ( $n=1$ ) مورد ارزیابی قرار گرفتند و همگرایی نتایج توزیع فشار تماسی نرمال شده برای گره‌های قرار گرفته در ناحیه واسط لبه فوقانی ( $y=0$ ) سازه مدرج تابعی با افزایش تعداد اجزای محدود بررسی گردید. برای گسسته‌سازی به منظور رسیدن به همگرایی کامل، از تعداد ۱۶۶۰ اجزای محدود مدرج درون دامنه پیکره‌ها استفاده شد. نتایج تحلیل عددی با نتایج حل الاستیسیته برای توزیع فشار تماسی در ناحیه واسط در شکل (۳) با هم مقایسه شده‌اند.

لاگرانژ الحاقی است. مقادیر پارامترهای  $\theta$  و  $K_n$  در ابتدای هر کمینه سازی غیرمقیمد انتخاب می‌شود و سپس تابع  $\Phi(\bar{U}, \theta, K_n)$  نسبت به متغیر جابجایی  $\bar{U}$  کمینه می‌شود. پارامترهای  $\theta$  و  $K_n$  در انتهای این کمینه سازی در صورت نیاز بهنگام سازی می‌شوند و فرآیند به همین صورت تکرار می‌شود تا یک همگرایی حاصل شود. مسئله تماسی ما به دلیل وابستگی زمانی رفتار ویسکوالاستیک برای یک دامنه کراندار زمان نیز بایستی حل شود. دامنه‌ی زمانی برای این منظور به تعداد محدودی گام گسسته سازی شده و سپس فرآیند بهنگام سازی شونده و انطباقی الگوریتم تماس بطور کامل برای هر گام زمانی نیز اجرا شده است. لازم به ذکر است که پارامترهای پنالتهی روش لگرانژ الحاقی در این رهیافت حل نیازی نیست که برای دستیابی به همگرایی به سمت بی نهایت میل داده شوند، در نتیجه از شرط گذاری ضعیف روش مرسوم پنالتهی نیز با این کار جلوگیری شده است.

پیشرفت این رهیافت لگرانژ الحاقی به کمینه سازی غیر مقید کنشمند  $\Phi(\bar{U}, \theta, K_n)$  و نیز فرآیند بهنگام سازی ضرایب لگرانژ آن بستگی دارد. دقت، بازدهی و توانمندی این رهیافت نیز بستگی به نحوه اجرای صحیح این دو مرحله دارد. شرط بهینگی مرتبه اول برای تابع لگرانژ رابطه (۱۴) با استفاده از ضرایب لگرانژ  $R_n^p = K_n^p \theta^p$  منجر به یک معادله تعادلی می‌شود.

یک فرآیند بهنگام سازی مؤثر نیز برای ضرایب لگرانژ با استفاده از قاعده دوگانگی تئوری بهینه سازی استخراج شده است. در این روش دوگانه برای بهنگام سازی با ضرایب لگرانژ  $R_n$  به جای پارامترهای  $\theta$  کار شده است. یک فرآیند بیشینه سازی دوگانه غیرمقیمد برای دستیابی به مقدار تخمینی فعلی ضرایب لگرانژ  $R_n^p$  استفاده شده که در منابع به آن بهنگام سازی ضرایب هم گفته می‌شود. رابطه تکرار شونده زیر به منظور بهنگام سازی بردار  $[NOC \times 1]$  ضرایب لگرانژ  $R_n$  بکار می‌رود:

$$R_n^{j+1} = R_n^j + \lambda^j d^j \quad (19)$$

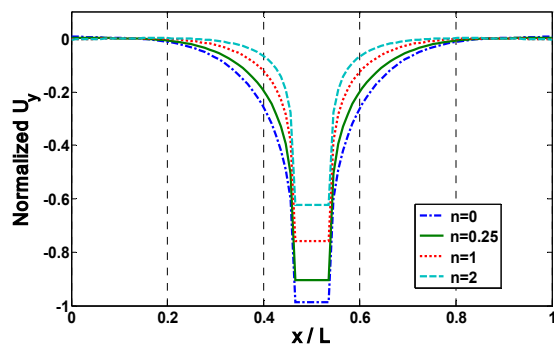
که  $d$  یک بردار تعیین جهت  $[NOC \times 1]$ ،  $\lambda$  طول گام و

$$\lambda^j d^j = \Delta R_n^j$$

حال در اینجا مراحل الگوریتم فرمول بندی لگرانژ الحاقی مورد استفاده به اختصار ارائه می‌گردند: ۱- قرار دادن  $t=0$ ، ۲- قرار دادن  $j=0$  و نیز تخمین لگرانژ  $R_n^0$  و پارامترهای پنالتهی  $K_n^0$ ؛ ۳- کمینه سازی  $\Phi(\bar{U})$  برای مسئله تماس (۱۴) با حل معادله تعادل و نیز اجازه دادن به  $\bar{U}^j$  برای جواب بودن؛ ۴- توقف فرآیند تکرار در صورت ارضای ملاک همگرایی؛ ۵- بهنگام سازی  $R_n^j$  و در صورت نیاز افزایش مقادیر پارامترهای پنالتهی  $K_n^j$ ؛ ۶- قرار دادن  $j = j+1$  و رفتن به مرحله سوم؛ ۷- قرار دادن  $t = t + \Delta t$  و رفتن به مرحله دوم.

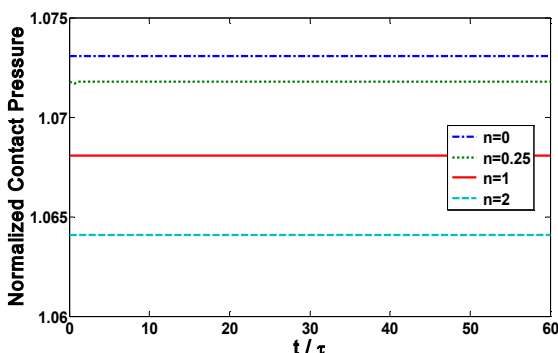
## نتایج و بحث

برهم‌کنش‌های تماسی بین یک سازه دارای ساختار مدرج تابعی به ضخامت  $h$  و پهنای  $L_1$  (پیکره هدف) با یک پانچ فولادی تغییرشکل پذیر به ضخامت  $h_1$  و پهنای  $L_1$  (پیکره تماسی) مدل سازی گردیده است. سازه با دو رفتار متفاوت به صورت هم الاستیک و هم ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است. لبه‌ی تحتانی سازه تابعی مدرج، گیردار بوده و رویه‌ی فوقانی آن در تماس تک سویه و بدون اصطکاک با پانچ است که در شکل زیر به صورت گسسته‌سازی شده نشان داده شده است. پانچ تحت تاثیر

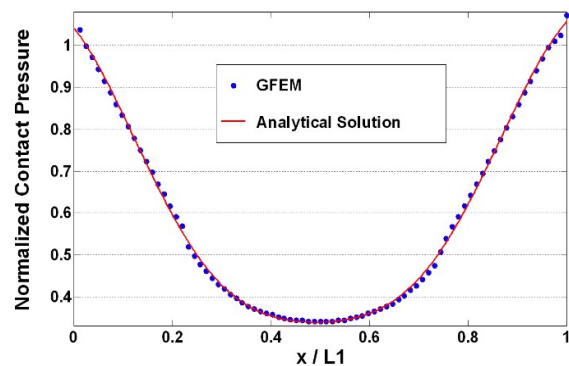


شکل ۵ - چگونگی توزیع منحنی‌های تغییرشکل تماسی در رویه تماسی سازه مدرج تابعی ویسکوالاستیک، به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت

در ادامه، نتایج رهیافت عددی اجزای محدود برای تاریخچه فشار تماسی بیشینه به صورت نرمال شده برای گره‌های قرار گرفته بر روی لبه فوقانی ( $y=0$ ) سازه مدرج تابعی در حالت الاستیک، به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت در شکل (۶) نشان داده شده‌اند. این نتایج برای سازه مدرج تابعی با رفتار ویسکوالاستیک به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت نیز در شکل ۷ نمایش داده شده‌اند. در انتها نیز چگونگی توزیع تنش عمودی  $\sigma_{yy}$  در ناحیه واسط تماسی سازه مدرج تابعی ویسکوالاستیک در شکل ۸ به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت ارائه شده است. فشار تماسی و تنش نیز در این مسئله به صورت  $(\sigma / p)$  نرمال شده‌اند. تفاوت قابل توجهی بین منحنی‌های فشار تماسی با تغییر پارامتر ناهمگنی مشاهده می‌گردد. تنش عمودی در نزدیکی دو گوشه ناحیه واسط تماس افزایش قابل توجهی داشته است. با افزایش پارامتر ناهمگنی ( $\Omega$ ) و در نتیجه افزایش مدول یانگ سازه، منحنی‌های توزیع تاریخچه فشار تماسی به صورت نسبتاً قابل توجهی کاهش یافته‌اند. همچنین شایان ذکر است که منحنی‌های بیشینه فشار تماسی برای سازه‌های ویسکوالاستیک به دلیل خاصیت میرایی ذاتی آن‌ها بیشتر از اجسام الاستیک است. به دلیل کاهش انعطاف سازه در اثر تغییر خواص ساختاری شاهد این کاهش هستیم. همان‌طور که مشاهده می‌گردد تنش عمودی در نزدیکی دو گوشه ناحیه واسط تماس به صورت ناپویسته‌ای افزایش داشته است. این رفتار تکنیکی به طراحان کمک می‌کند تا با تنظیم مشخصه‌های ساختاری یک سازه و مدرج‌سازی مناسب آن، چگونگی توزیع فشار تماسی را به‌طور قابل توجهی کنترل نمایند.



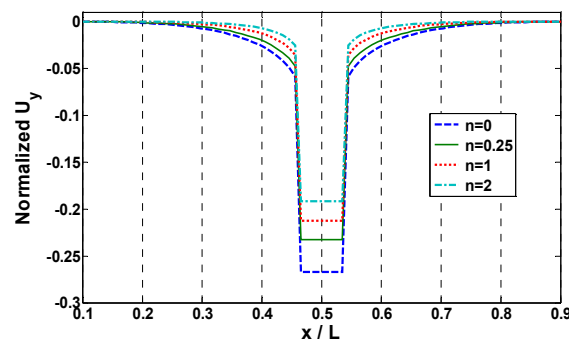
شکل ۶ - چگونگی توزیع تاریخچه فشار تماسی بیشینه در رویه تماسی سازه مدرج تابعی الاستیک، به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت



شکل ۳ - مقایسه نتایج رهیافت عددی و حل تحلیلی برای توزیع فشار تماسی در ناحیه واسط تماس

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سازگاری کاملی بین حل تحلیلی موجود و رهیافت عددی اجزای محدود ارائه شده وجود دارد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد بیشترین میزان فشار تماس در نزدیکی دو انتهای پانچ در ناحیه واسط تماس به وجود آمده است.

نتایج حل عددی چگونگی توزیع تغییرشکل تماسی برای گره‌های قرار گرفته بر روی لبه فوقانی ( $y=0$ ) سازه مدرج تابعی الاستیک، به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت در شکل (۴) نشان داده شده‌اند. این نتایج برای سازه با رفتار ویسکوالاستیک در شکل (۵) نمایش داده شده‌اند. این مسئله، تغییرشکل‌های تماسی به صورت  $(u / u_{max})$  نرمال شده‌اند. تفاوت قابل توجهی بین منحنی‌های توزیع تغییرشکل تماسی با تغییر پارامتر ناهمگنی سازه مشاهده می‌گردد. با افزایش اندازه توان ناهمگنی ( $\Omega$ ) و در نتیجه افزایش مدول یانگ، شاهد کاهش در منحنی‌های تغییرشکل تماسی بر سازه هستیم. همان‌طور که در شکل‌های (۴) و (۵) مشاهده می‌گردد بیشینه تغییرشکل تماسی در مرکز ناحیه واسط تماس ایجاد شده است؛ با افزایش توان ناهمگنی تابعی سازه شاهد کاهش انعطاف‌پذیری ساختاری آن و در نتیجه کاهش تغییرشکل ناشی از تماس پانچ با آن هستیم. همچنین، منحنی‌های تغییرشکل تماسی برای اجسام ویسکوالاستیک به دلیل خاصیت داتی مستهلک نمودن انرژی آن‌ها به‌طور قابل توجهی بیشتر از اجسام الاستیک شده است.

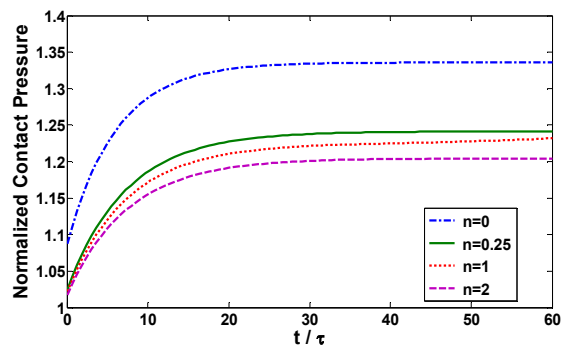


شکل ۴ - چگونگی توزیع منحنی‌های تغییرشکل تماسی در رویه تماسی سازه مدرج تابعی الاستیک، به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت

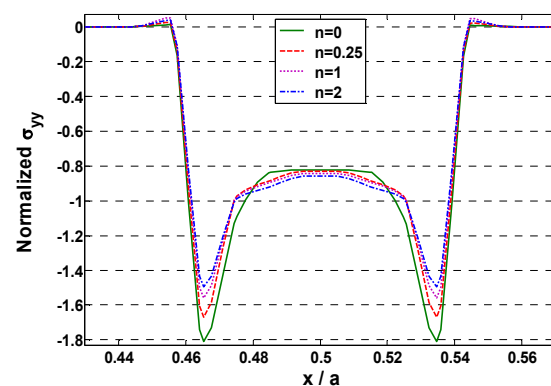
به راحتی از قابلیت تعمیم یابی رفتار واهلش میدان تنش به پاسخ خزشی برخوردار است.

### مراجع

1. Wriggers, P., *Computational Contact Mechanics*, John Wiley and Sons, Chichester, 2004.
2. Oden, J.T., and Kikuchi, N., *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM Publications, Philadelphia, 1988.
3. Simo, J.C., and Laursen, T.A., An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems involving Friction, *Computers and Structures*, Vol. 42, 1992, pp. 97–116.
4. Zocher, M.A., Groves, S.E., and Allen, D.H., A Three-Dimensional Finite Element Formulation for Thermo-viscoelastic Orthotropic Media, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997, pp. 2267–2288.
5. Chen, W.H., Chang, C.M., and Yeh, J.T., An Incremental Relaxation Finite Element Analysis of Viscoelastic Problems with Contact and Friction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 109, 1993, pp. 315–329.
6. Fernandez, J.R., and Sofonea, M., Numerical Analysis of a Frictionless Viscoelastic Contact Problem with Normal Damped Response, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 47, 2004, pp. 549–568.
7. Amassad, A., and Fabre, C., Analysis of a Viscoelastic Unilateral Contact Problem Involving the Coulomb Friction Law, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 116, 2003, pp. 465–483.
8. Mahmoud, F.F., El-Shafei, A.G., Al-Shorbagy, A.E., and Abdel Rahman, A.A., A Numerical Solution for Quasistatic Viscoelastic Frictional Contact Problems, *ASME Journal of Tribology*, Vol. 130, 2008, pp. 1–13.
9. Ashrafi, H., and Shariyat, M., A Numerical Lagrangian Approach for Analysis of Contact Viscoelastic Problems, *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 25, 2014, pp. 416–422.
10. Giannakopoulos, A.E., and Suresh, S., Indentation of Solids with Gradients in Elastic Properties, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, 1997, pp. 2357–2392.
11. Giannakopoulos, A.E., and Pallot, P., Two Dimensional Contact Analysis of Elastic Graded Materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, 2000, pp. 1597–1631.
12. Guler, M.A., and Erdogan, F., Contact Mechanics of Graded Coatings, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, 2004, pp. 3865–3889.
13. Ke, L.-L., and Wang, Y.-S., Two-Dimensional Contact Mechanics of Functionally Graded Materials with Arbitrary Spatial Variations of Material Properties, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, 2006, pp. 5779–5798.
14. Rhimi, M., El-Borgi, S., and Lajnef, N., A Double Receding Contact Axisymmetric Problem between a Functionally Graded Layer and a Homogeneous Substrate, *Mechanics of Materials*, Vol. 43, 2011, pp. 787–798.
15. Marques, S.P.C., and Creus, G.J., *Computational Viscoelasticity*. Berlin, Springer, 2012.



شکل ۷ - چگونگی توزیع تاریخچه فشار تماسی بیشینه در روبه تماسی سازه مدرج تابعی الاستیک، به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت



شکل ۸ - چگونگی توزیع تنش عمودی  $\sigma_{yy}$  در ناحیه واسط تماسی سازه مدرج تابعی ویسکوالاستیک، به ازای پارامترهای ناهمگنی متفاوت

### نتیجه گیری

رهیافت ارائه شده، اثرات ناهمگنی و وابستگی زمانی مشخصه‌های مکانیکی برای مدل سازی مسائل سازه‌های تابعی مدرج در نظر گرفته شده‌اند. استفاده از این مدل سازی روش اجزای مدرج امکان تعریف خواص ناهمگن درون هر المان محدود و در نقاط گوسی به خوبی فراهم شد. اختصاص مشخصه‌های مادی یکسان به هر المان در تحلیل‌های اجزای محدود و مرزی متداول سبب کاهش قابل توجه دقت در مدل سازی سازه‌های دارای ناهمگنی می‌شده است. خواص ویسکوالاستیک در هر گره‌ی اجزای مدرج به صورت مجزا انتخاب شده و با استفاده از توابع شکل در نقاط انتگرال گیری گوس درون یابی می‌شوند. در اینجا از شکل ناهمگن مدل‌های تعمیم یافته ویسکوالاستیک به منظور مدل سازی رفتار سازه‌های پیشرفته با ساختار مدرج تابعی ویسکوالاستیک در رهیافت محاسباتی استفاده شد. فرمول بندی اجزای محدود تعمیم یافته برای اجزای محدود ناهمگن ویسکوالاستیک ابزاری بسیار مناسب برای تحلیل سازه‌های ناهمگن با رفتار وابسته به زمان خزشی و واهلش تنش محسوب می‌گردد. فرمول بندی اجزای محدود ارائه شده در این رساله برای سازه‌های با ساختار مدرج تابعی