دومین کنفرانس جبر محاسباتی، نظریه محاسباتی اعداد و کاربردهای ایران
دانشگاه کاشان، ۲۳-۲۱ مهر ۱۳۹۴ (۱۵-۱۳ اکتبر ۲۰۱۵)، ص:۴۱-۳۹

سخنرانی

گراف توان دوم گروه های آبلی

اسداله فرامرزی ثالث
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، رایانامه: faramarzi@du.ac.ir

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، و فرض کنید $P_2(G)$ گرافی باشد که رئوس آن اعضای گروه G بوده و دو راس a و b مجاور هستند هرگاه $a = b^2$ یا $b = a^2$. در این مقاله عدد رنگی، عدد استقلال، عدد خوشه‌ای، همبندی گراف $P_2(G)$ را برای گروه های آبلی بررسی می‌کنیم.

واژه های کلیدی: گراف توان، گروه آبلی، عدد رنگی.

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰): 05C25

۱ مقدمه

با استفاده از ساختار گروه‌های متناهی می‌توان گراف‌های متوعی روی مجموعه عناصر یک گروه، کلاس‌های تزویج آن، سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه و ... تعریف نمود. با کمک این گراف‌ها می‌توان نتایج جالبی را هم در نظریه گراف‌ها و هم در نظریه گروه‌ها به دست آورد. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، گراف جابجایی G که با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهند گرافی است که در آن رئوس عبارتند از تمام اعضای غیر مرکزی گروه G و دو راس x و y مجاور هستند هرگاه داشته باشیم $xy = yx$.
مکمل این گراف را گراف ناجابجایی گویند و با $\bar{\Gamma}(G)$ نشان می‌دهند. اردوش[1] [۲] اولین کسی بود که

[1] Erdös

گراف ناجابجایی را مورد بررسی قرار داد و این مسئله معروف را مطرح کرد: فرض کنید G گروهی باشد که گراف ناجابجایی آن فاقد خوشه‌ی نامتناهی باشد، در این صورت آیا کرانی برای خوشه های گراف ناجابجایی وجود دارد؟ نیومن[۲] [۴] با نشان دادن اینکه چنین گروه هایی مرکزی-بوسیله-متناهی هستند به این سوال جواب مثبت داد.
گراف دیگری که به یک گروه نسبت داده شده گراف توان است که اولین بار توسط کلارو [۳] و کوین[۴] [۳] برای نیم گروه‌ها و به صورت گراف جهت‌دار تعریف شد بعد از آن گراف توان بدون جهت نیم گروه‌ها توسط چاکرابرتی [۵] و همکارانش [۱] مورد بررسی قرار گرفت. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، در گراف توان جهت‌دار $\vec{P}(G)$ ، رئوس اعضای گروه G بوده که کمان $u \longrightarrow v$ از این کمان بیانگر آن است که $u \neq v$ و v توانی از u است. همچنین در گراف توان $P(G)$، رئوس اعضای G بوده و هر یال متناظر دو راس از G هست که یکی توانی از دیگری باشد.
در این مقاله فرض کنید G یک گروه متناهی و n یک عدد ظبیعی باشد و $P_n(G)$ گرافی باشد که در آن رئوس اعضای G بوده و مانند گراف توان هر یال بیانگر آن است که یکی از دو راس متناظر با آن یال توان n-ام راس دیگر است، این گراف را گراف توان n-ام گروه G می‌نامیم. در حقیقت گراف $P_n(G)$ یک زیرگراف از گراف توان $P(G)$ است. با توجه به آنکه $P(G) = \cup P_n(G)$ شناخت ساختار گراف $P_n(G)$ اهمیت زیادی دارد، که در اینجا به مطالعه $P_2(G)$ پرداخته و نتایجی را در این جهت بیان می‌کنیم.

۲ نتایج اصلی

ابتدا به بررسی ساختار گراف توان دوم گروه‌های دوری می‌پردازیم.
قضیه. فرض کنید G یکی از گروه‌های $\mathbb{Z}_n$ یا $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ باشد. دراین‌صورت
۱) $e = n - 1 - 1/2|\{a \in G : o(a) = 3\}|$ که در آن e تعداد یال‌ها و n تعداد رئوس است.
۲) اگر مرتبه G توانی از ۲ باشد آنگاه گراف $P_2(G)$ یک درخت و در غیر این صورت ناهمبند است.
۳) عدد رنگی گراف $P_2(G)$، ۲ یا ۳ است.
۴) اگر G دوری باشد آنگاه عدد استقلال گراف در رابطه زیر صدق می‌کند.
$\alpha(P_2(\mathbb{Z}_2)) = 1$ ، $\alpha(\mathbb{Z}_{2^m}) = 2^m - \alpha(\mathbb{Z}_{2^{m-1}})$.
۵) گراف $P_2(G)$ مسطح است.
۶)اگر مرتبه G مضربی از ۷ باشد عدد خوشه‌ای گراف ۳ و در غیر این صورت عدد خوشه ای ۱ یا ۲ است.

---
[۲] Neumann
[۳] Kelarev
[۴] Quinn
[۵] Chakrabarty

مراجع

[1] I. Chakrabarty, S. Ghosh, M. K. Sen, *Undirected power graphs of semigroups*, Semigroup Forum **78** (2009) 410-426.

[2] P. Erdös, On some problems in graph theory , combinatorial analysis and combinatorial number theory, Graph Theory and Combinatorics Academic Press, London, (1984).

[3] A. V. Kelarev, S. J. Quinn, *Directed graph and combinatorial properties of semigroups,* J. Algebra **251** (2002) 16-26.

[4] B. H. Neumann, *A problem of Paul Erdös on groups,* J. Aust. Math. Soc. Ser. A **21** (1976) 467-472.