گسترش فضای فاز و تقارن پیمانه ای در مدل چرن-سیمونز غیرآبلی ابرمتقارن

بهلکه غراوی، خدیجه؛ منعم زاده، مجید

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده

در این مقاله ساختار قیدی مدل ابرمتقارن چرن- سیمونز غیرآبلی سیمونزغیرآبلی گروه $SU(2)$، در ۱+۲ بعد مطالعه شده است. در بررسی مدل مورد نظر تعدادی قیود نوع دوم بدست می‌آید که با توجه به فرض دیراک این مدل غیرپیمانه‌ای است. سپس با استفاده از رهیافت BFT مرتبه محدود و معرفی میدان های کمکی قیود نوع دوم به قیود نوع اول تبدیل می‌شود. کاری که رهیافت BFT انجام می‌دهد، تبدیل قیود نوع دوم به قیود نوع اول با توجه به معرفی میدان‌های کمکی و گسترش فضای فاز اولیه می‌باشد. به‌طوری‌که فضای فاز اولیه یک زیر فضا در فضای فاز جدید و فضای فاز قبلی در فضای جدید غوطه‌ور است تا در نهایت مدلی با تقارن پیمانه‌ای بدست آید. در آخر تابع پارش این مدل در فضای فاز گسترش یافته بدست آمده است.

Phase space extension and Gauge Invarient inSupersymmetric Non-AbelianChern-Simons Systems

Kh.BahalkeGharavi;M.Monemzadeh

Department of Physics, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract

The Supersymmetric Non-AbelianChern-Simons systems on Dirac formalism of Hamiltonian constraint systems have been studied in this research and it has been shown that some second class constraints are obtained in its constraints structure. Since appearance of second class constraints based on Dirac formalism is not indicated a guage theory, the system converts to a guage symmetric model by extending the phase space and using finite order BFT method. As results, partition function of this model have been investigated in extended phase space.

PACS NO:11

مقدمه

برای رسیدن به یک وحدت بزرگ راه‌های مختلفی وجـود دارد، کـه یکی از آن‌ها مسئله تقارن است[۱]. در فیزیـک سیسـتم هـای دارای تقارن هستند که تحت یک تبدیل ناوردا باشند. نظریه هـای فیزیکـی که تقارن هایی از این قبیل دارند را نظریه پیمانه‌ای می‌گویند. یکی از خصوصیات بارز نظریه های پیمانـه ای ظـاهر شـدن توابـع دلخـواه زمانی در جوابهای عـام معـادلات حرکـت اسـت. بـروز ایـن توابـع دلخواه زمانی همواره با ظاهر شدن روابطی بین مختصات فضای فاز است که به آنها قید گفته می‌شود.در نتیجه می توان گفت که سیسـتم پیمانه ای یک سیستم مقید است که مربوط به دسته ای ازنظریه ها به نام نظریه های لاگرانژی تکین هستند[۱].

بین سـالهای (۱۹۵۰-۱۹۶۰) دیـراک اولـین کسـی بـود کـه بررسـی کلاسیکی سیستم های مقید و لاگرانژی های تکـین را مـورد توجـه قرار داد [۲،۳] و نخستین بـار فرمولبنـدی ایـن لاگرانـژی بـا تعـداد

درجات آزادی محدود توسط وی انجام گرفت. بنا به فرض دیراک، کلیه قیود نوع اول اعم از اولیه و ثانویه مولدهای تبدیل پیمانه‌ای هستند، در مقابل ظاهر شدن قیود نوع دوم در یک نظریه نشان دهنده‌ی فقدان تقارن پیمانه‌ای است[۷] وبرای کوانتش کانونیک این سیستم‌ها با مشکلاتی روبرو می‌شویم، یکی از راه‌های رفع این مشکلات تبدیل مدل غیرپیمانه‌ای به پیمانه‌ای است. در این تحقیق از رهیافت BFT برای این منظوراستفاده می‌شود.

ساختار قیدی مدل چرن- سیمونز غیرآبلی ابرمتقارن

مدل چرن-سیمونز یکی از مدل‌های است که در فیزیک نظری مورد توجه می‌باشد[۵،۶]. کنش مدل ابرمتقارن چرن- سیمونز غیرآبلی در ۲+۱ بعد با استفاده از میدان وس-زومینو برحسب میدان‌های مؤلفه-ای، به صورت رابطه‌ی زیر معرفی می‌شود [۸]

$$\begin{aligned} S=\int d^3x[&-\frac{1}{4}G^{ab,r}G^r_{ab}+\frac{1}{2}k\varepsilon^{abc}(A^r_a\partial_b A^r_c+\frac{1}{3}f^{rsu}A^r_aA^s_bA^u_c)\\ &+i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^a)^\rho_\alpha D_a\psi_\rho+(D^a\varphi)^\dagger D_a\varphi+\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^a)^\rho_\alpha D_a\lambda_\rho\\ &+\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^a)^\rho_\alpha D_a\chi_\rho+\frac{k}{2}\lambda^{\alpha,r}\lambda^r_\alpha+\frac{k}{2}\chi^{\alpha,r}\chi^r_\alpha\\ &+\frac{1}{2}(D^aN^r)D_aN_r-U(\varphi,\varphi^\dagger,\psi,\psi^\dagger,\lambda,\chi,N)], \end{aligned} \tag{1}$$

عبارت پتانسیل در رابطه‌ی فوق برابر است با

$$\begin{aligned} U(\varphi,\varphi^\dagger,\psi,\psi^\dagger,\lambda,\chi,N)=&f^{rsu}\chi^{\alpha,r}\lambda^s_\alpha N^u-i(\psi^{\dagger\alpha}\lambda^r_\alpha T^r\varphi-\varphi^\dagger T^r\lambda^{\alpha,r}\psi_\alpha)\\ &-\psi^{\dagger\alpha}\chi^r_\alpha T^r\varphi-\varphi^\dagger T^r\chi^{\alpha,r}\psi_\alpha-\frac{n-1}{2kn}v^2\psi^{\dagger\alpha}\psi_\alpha-\psi^{\dagger\alpha}N^rT^r\psi_\alpha\\ &+\varphi^\dagger(N^rT^r+\frac{n-1}{2kn}v^2)(N^sT^s+\frac{n-1}{2kn}v^2)\varphi\\ &+\frac{1}{2}(\varphi^\dagger T^r\varphi+kN^r)(\varphi^\dagger T^r\varphi+kN^r) \end{aligned} \tag{2}$$

و $D=\partial-iA^r_aT^r\,(a=1,2,3), G^r_{ab}=\partial_aA^r_b-\partial_bA^r_a+f^{rsu}A^s_aA^u_b$ و T^rها مولدهای $SU(n)$، که در روابط $\left[T^r,T^r\right]=if^{rsu}T^u$ و $tr\left(T^aT^b\right)=\delta^{ab}/2$ صدق می‌کنند، ماتریس‌های γ که ، $\gamma^0=i\sigma^1$ ، $\gamma^1=\sigma^2$ ، $\gamma^2=i\sigma^3$ و $\gamma^a\gamma^b=g^{ab}+i\varepsilon^{abc}\gamma_c$ است، و متریک $g=diag\left(+1,-1,-1,-1\right)$ و ε^{abc} نماد لوی‌چی‌ویتا، $\varepsilon^{012}=\varepsilon^{12}=1$ می‌باشد.

حال ساختار قیدی این دستگاه را در فضای فاز مورد بررسی قرار می‌دهیم.به طور صریح می‌توانیم ببینیم با توجه به روش دیراک برگمن و تعریف تکانه‌ی کانونیک نسبت به میدان‌های ψ_ρ, A^r_a $\psi^{\dagger\alpha},\varphi,\varphi^\dagger,\lambda_\rho,\chi_\rho,N^r$،قیود اولیه دستگاه برابر است با

$$\begin{aligned} &\Gamma^r_1=\pi^{\alpha,r}\approx 0,\\ &\Gamma^\rho_2=\pi_{\psi_\rho}-i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^0)^\rho_\alpha\approx 0,\\ &\Gamma^\alpha_3=\pi_{\psi^{\dagger\alpha}}\approx 0,\\ &\Gamma^\rho_4=\pi_{\lambda_\rho}-\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^0)^\rho_\alpha\approx 0,\\ &\Gamma^\rho_5=\pi_{\chi_\rho}-\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^0)^\rho_\alpha\approx 0, \end{aligned} \tag{3}$$

نماد "≈" تساوی ضعیف را نشان می‌دهد. در نتیجه چگالی هامیلتونی کانونیک با استفاده از تبدیل لژاندر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c=&\pi_\varphi\dot\varphi+\pi_{\varphi^\dagger}\dot\varphi^\dagger+\pi^{a,r}\dot A^r_a+\pi_{\psi_\rho}\dot\psi_\rho+\pi_{\psi^{\dagger\alpha}}\dot\psi_{\psi^{\dagger\alpha}}+\pi_{\chi_\rho}\dot\chi_\rho\\ &+\pi_{\lambda_\alpha}\dot\lambda_\alpha+\pi_{N^r}\dot N^r-\mathcal{L}\\ =&\frac{1}{4}G^{ij,r}G^r_{ij}-\frac{1}{2}k\varepsilon^{oij}A^r_0\partial_iA^r_j-\frac{1}{2}k\varepsilon^{0ij}A^r_i\pi^r_j-A^r_0\partial_i\pi^{i,r}\\ &-\frac{1}{2}\pi^{i,r}\pi^r_i-f^{rsu}\pi^{i,r}A^s_0A^u_i-\frac{1}{8}k^2A^u_iA^{i,u}+iA^r_0\pi_{\psi_\rho}T^r\psi_\rho\\ &+\pi_{\varphi^\dagger}\pi_\varphi+iA^r_0(\pi_\varphi T^r\varphi-\pi_{\varphi^\dagger}T^r\varphi^\dagger)+iA^r_0\pi_{\lambda_\rho}T^r\lambda_\rho+iA^r_0\pi_{\chi_\rho}T^r\chi_\rho\\ &+\frac{1}{2}\pi_{N^r}\pi_{N^r}+iA^r_0\pi_{N^s}T^rN^s-i\psi^{\dagger\alpha}(\gamma^j)^\rho_\alpha D_j\psi_\rho-(D^j\varphi)^\dagger D_j\varphi\\ &-\frac{1}{2}i\lambda^\alpha(\gamma^j)^\rho_\alpha D_j\lambda_\rho-\frac{1}{2}i\chi^\alpha(\gamma^j)^\rho_\alpha D_j\chi_\rho-\frac{k}{2}\lambda^{\alpha,r}\lambda_{\alpha,r}-\frac{k}{2}\chi^{\alpha,r}\chi_{\alpha,r}\\ &-\frac{1}{2}(D^jN^r)D_jN^r+U(\varphi,\varphi^\dagger,\psi,\psi^\dagger,\lambda,\chi,N) \end{aligned} \tag{4}$$

هامیلتونی کل با افزودن قیود اولیه به همراه ضرایب نامعین لاگرانژی به هامیلتونی کانونیک بدست می‌آید:

$$H_T=\int_V dx(\mathcal{H}_c+\eta^r_1\Gamma^r_1+\eta^\rho_2\Gamma^\rho_2+\eta^\alpha_3\Gamma^\alpha_3+\eta^\alpha_4\Gamma^\alpha_4+\eta^\rho_5\Gamma^\rho_5), \tag{5}$$

ηها ضرایب نامعین لاگرانژ هستند. شرط سازگاری قیود اولیه $\dot\Gamma^r_1=\left\{\Gamma^r_1,H_T\right\}\approx 0$قید ثانویه‌ای به صورت زیر بدست می‌دهد:

$$\Gamma_6^r = \partial_i \pi^{i,r} - f^{rsu}\pi^{i,s} A_l^u + \frac{1}{2} k \varepsilon^{0lm} \partial_l A_m^r - i(\pi_\varphi T^r \varphi + \pi_{\varphi^\dagger} T^r \varphi^\dagger + \pi_{\psi_\rho} T^r \psi_\rho + \pi_{\lambda_\rho} T^r \lambda_\rho + \pi_\chi T^r \chi + \pi_{N^s} T^r N^s) \approx 0 \quad (6)$$

عبارت فوق برای کروشه پواسون در متغیرهای فرمیونی به صورت گراسمانی لحاظ شده است. مشتقات زمانی (شرط سازگاری) سایر قیود اولیه، قیود جدیدی را بدست نمی‌دهد و منجر به تعیین ضرایب لاگرانژی می‌شوند. بنابراین الگوریتم دیراک–برگمن منجر به پنج قید اولیه و یک قید ثانویه می‌شود. برای دسته بندی قیود، کروشه پواسون همه‌ی قیود اعم از اولیه و ثانویه را محاسبه می‌کنیم.در نهایت پنج قید داریم که نوع دوم هستند. اما همان‌طور که می‌دانیم تعداد قیود نوع دوم باید زوج باشند لذا با بازتعریف قیود به دو قید نوع اول

$$\begin{aligned} &\Lambda_1^r = \Gamma_1^r = \pi^{0,r} \approx 0, \\ &\Lambda_2^r = -\pi_{\psi_\rho} T^r \left(\gamma^0\right)_\rho^\alpha \pi\psi^{\dagger\alpha} + \partial_i \pi^{i,r} - f^{rsu}\pi^{i,s} A_l^u \\ &\quad + \frac{1}{2} k \varepsilon^{0lm} \partial_l A_m^r - i(\pi_\varphi T^r \varphi + \pi_{\varphi^\dagger} T^r \varphi^\dagger + \pi_{\psi_\rho} T^r \psi_\rho \\ &\quad + \pi_{\lambda_\rho} T^r \lambda_\rho + \pi_\chi T^r \chi + \pi_{N^s} T^r N^s) \approx 0, \end{aligned} \quad (7)$$

و چهار قید نوع دوم زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} &\Theta_1^\rho = \pi_{\psi_\rho} - i\psi^{\dagger\alpha} (\gamma^0)_\alpha^\rho \approx 0, \\ &\Theta_2^\alpha = \pi_{\psi^{\dagger\alpha}} \approx 0, \\ &\Theta_3^\rho = \pi_{\lambda_\rho} - \frac{1}{2} i\lambda^\alpha (\gamma^0)_\alpha^\rho \approx 0, \\ &\Theta_4^\rho = \pi_{\chi_\rho} - \frac{1}{2} i\chi^\alpha (\gamma^0)_\alpha^\rho \approx 0, \end{aligned} \quad (8)$$

در نهایت ماتریس جبر قیود نوع دوم یک ماتریس ٤*٤ به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho & 0 & 0 \\ -i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\left(\gamma^0\right)_\alpha^\rho \end{bmatrix} \quad (9)$$

همان طور که دیده می شود ماتریس Δ یک ماتریس ثابت و معکوس پذیر است،پس می توان رهیافت BFT مرتبه محدود را برای آن بکار برد.

اعمال رهیافت BFT مرتبه محدود

همان طور که مشاهده شد در مدل مورد بررسی تعدادی قیود نوع دوم بدست آمد. با توجه به فرض دیراک وجود قیود نوع دوم نشان دهنده‌ی فقدان تقارن پیمانه‌ای است، بنابراین برای تبدیل آن به یک مدل پیمانه‌ای از رهیافت BFT استفاده می‌کنیم و هامیلتونی و قیود را در فضای تعمیم یافته بدست می‌آوریم.
با تعریف چهار میدان کمکی ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4، در معادله‌ی اساسی BFTو انتخاب ماتریس‌هایω و χ به صورت زیر

$$\begin{aligned} &\Delta_{\alpha\beta} + \chi_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma\lambda}\chi_{\beta\lambda} = 0 \\ &\omega = -\Delta \qquad ; \qquad \chi = I \end{aligned} \quad (10)$$

و با توجه به شرط مرزی قیود نوع اول در فضای فاز تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &\tau_1 = \pi_{\psi_\rho} - i\psi^{\dagger\alpha} (\gamma^0)_\alpha^\rho + \xi_1, \\ &\tau_2 = \pi_{\psi^{\dagger\alpha}} + \xi_2, \\ &\tau_3 = \pi_{\lambda_\rho} - \frac{1}{2} i\lambda^\alpha (\gamma^0)_\alpha^\rho + \xi_3, \\ &\tau_4 = \pi_{\chi_\rho} - \frac{1}{2} i\chi^\alpha (\gamma^0)_\alpha^\rho + \xi_4, \end{aligned} \quad (11)$$

هامیلتونی نیز در این فضای فاز تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{H} = H^0 + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)}. \quad (12)$$

که

$$\tilde{H}^{(1)} = i(\gamma^0)^\rho_\alpha \left(\xi_1 G_2^{(0)} - \xi_2 G_1^{(0)} - \xi_3 G_3^{(0)} - \xi_4 G_4^{(0)}\right),$$
$$\tilde{H}^{(2)} = i(\gamma^0)^\rho_\alpha \left(\xi_1 G_2^{(1)} - \xi_2 G_1^{(1)} - \xi_3 G_3^{(1)} - \xi_4 G_4^{(1)}\right), \qquad (13)$$

و توابع $G_\alpha^{(a)}$ به صورت زیر می‌باشند:

$$G_1^{(0)} = (iA_0^r \pi_{\psi_\rho} T^r + i\varphi^\dagger T^r \lambda^{\alpha,r} - \varphi^\dagger T^r \chi^{\alpha,r} - \frac{n-1}{2kn}\nu^2 \psi^{\dagger\alpha} - \psi^{\dagger\alpha} N^r T^r)\delta(x-y),$$
$$G_2^{(0)} = (-i\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha D_j \psi_\rho - i\lambda^r_\alpha T^r \varphi - \chi^r_\alpha T^r \varphi - \frac{n-1}{2kn}\nu^2 \psi_\alpha - N^r T^r \psi_\alpha)\delta(x-y), \qquad (14)$$
$$G_3^{(0)} = (iA_0^r \pi_{\lambda_\rho} T^r - \frac{1}{2} i\lambda^\alpha \left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha D_j - \frac{k}{2}(\lambda^{\alpha,r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\lambda_{\alpha,r})$$
$$+ f^{rsu}\chi^{\alpha,r} N^u - i(\psi^{\dagger\alpha} T^r \varphi - \varphi^\dagger T^r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_\alpha) + \frac{1}{2}\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha A_0^r T^r \lambda_\rho)\delta(x-y),$$
$$G_4^{(0)} = (iA_0^r \pi_{\lambda_\rho} T^r - \frac{1}{2}\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha (D_j \chi_\rho + \chi^\alpha D_j) - \frac{k}{2}(\chi^{\alpha,r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi_{\alpha,r})$$
$$+ f^{rsu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\lambda^s_\alpha N^u - \psi^{\dagger\alpha} T^r \varphi - \varphi^\dagger T^r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_\alpha + \frac{1}{2}\left(\gamma^j\right)^\rho_\alpha A_0^r T^r \chi_\rho)\delta(x-y),$$

$$G_1^{(1)} = (-i\xi_1(\gamma^0)^\rho_\alpha (i(\gamma^j)^\rho_\alpha D_j + \frac{n-1}{2kn}\nu^2 + N^r T^r) - i\xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha \varphi^\dagger T^r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$$
$$+ i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha \varphi^\dagger T^r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right))\delta(x-y), \qquad (15)$$
$$G_2^{(1)} = (-i\xi_2(\gamma^0)^\rho_\alpha (\frac{n-1}{2kn}\nu^2 - N^r T^r) - \xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r \varphi + i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r \varphi)\delta(x-y),$$
$$G_3^{(1)} = (\xi_2(\gamma^0)^\rho_\alpha \varphi^\dagger T^r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + \xi_1(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r \varphi + i\xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha (\frac{1}{2} i(\gamma^0)^\rho_\alpha D_j$$
$$+ k\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + (\gamma^0)^\rho_\alpha A_0^r T^r - i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha f^{rsu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) N^u)\delta(x-y),$$
$$G_4^{(1)} = -i\xi_1(\gamma^0)^\rho_\alpha T^r \varphi - i\xi_3(\gamma^0)^\rho_\alpha f^{rsu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) N^u - i\xi_4(\gamma^0)^\rho_\alpha (-i(\gamma^0)^\rho_\alpha D_j - k\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2$$
$$+ (\gamma^0)^\rho_\alpha A_0^r T^r)\delta(x-y),$$

در این مرحله یک تئوری کاملاً پیمانه‌ای داریم که قیود و هامیلتونی با انتخاب پارامترهای مناسب برای معادله‌ی اساسی BFT بدست آمده است.اکنون می‌توان تابع پارش وابسته به لاگرانژی متناظر هامیلتونی نوع اول ($\tilde{H}$) بدست آمده در رابطه‌ی (۱۲) را با استفاده از فرمولبندی فادیف [۸] محاسبه کرد. برای این کار لازم است میدان‌های کمکی (ξ) را نیز به مختصات فضای فاز افزود و تابع پارش را به صورت زیر نوشت:

$$Z = \int D\phi^\alpha D\pi_\alpha D\xi^1 D\xi^2 D\xi^3 D\xi^4 \times \prod_{i,j=1}^{2} \delta(\tau_i)\delta(\Omega_j)\det\left|\left\{\tau_i, \Omega_j\right\}\right| e^{iS}, \qquad (16)$$

که

$$S = \int d^3x \left(\pi_\alpha \dot{\phi}^\alpha - \tilde{H}\right), \qquad (17)$$

$$\phi^\alpha = \left(A^r_a, \varphi, \varphi^\dagger, \psi, \psi^\dagger, \lambda, \chi, N\right)$$
$$\pi_\alpha = \left(\pi^{a,r}, \pi_\varphi, \pi_{\varphi^\dagger}, \pi_\psi, \pi_{\psi^\dagger}, \pi_\lambda, \pi_\chi, \pi_N\right). \qquad (18)$$

Ω_jها شرایط تثبیت پیمانه‌ای است که برای انتگرال مسیر ضرروی است و باید طوری انتخاب شوند که دترمینان در رابطه‌ی (۱٦) غیر صفر شود.

نتیجه گیری

در این مقاله، فرمولبندی سیستم مقید مربوط به دستگاه‌های ابرمتقارن چرن–سیمونزغیرآبلی بررسی شدکه تعدادی قیود نوع دوم بدست آمد. از آن‌جا که ظهور قیود نوع دوم بنا به فرض دیراک نشان دهنده‌ی یک نظریه غیرپیمان‌ای است، با استفاده از رهیافت BFT مرتبه محدود و معرفی میدان‌های کمکی، مدل فوق به یک مدل داری تقارن پیمان‌ای با قیود نوع اول تبدیل شود تادرنهایت مدلی باتقارن پیمانه‌ای بدست آمد. و مدل آماده کوانتش می‌باشد.

مراجع

[1] Heinz J Rothe, Kluas D Roth, "Classical and Quantum Dynamics of Hamiltonian Constraint Systems", Word scientific, (2010).
[2] P.A.M.Dirac: "*Lectures on Quantum Mechanics*", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).
[3] Anderes. J. L; Bergman, P. G. Phys, Rev 83,10118(1951).
[4] M. Monemzadeh and A. Shirzad. Int. J. Mod .Phys. A, 18,5613-5625 (2003)
[5] S. J. Gates and H. Nishino, Phys. Leet. B 281, 72 (1992).
[6] Z. Hlousek and D. Spector, Nucl. Phys. B344, 763 (1990).
[7] Ch. Lee, K, Lee, and H. Min, Phys.Lett. B 252, 79 (1990).
[8] P.Senjanovic, Annales of physics. Phy.100 (1976) 227.