حل تحلیلی انتقال گرمای ناهمسانگرد با تولید نقطه‌ای گرما در کره

راضی آستارایی، فاطمه[۱]؛ صامتی، محمّد[۱]

[۱]دانشکده علوم و فنون نوین دانشگاه تهران ، انتهای خیابان کارگر شمالی ، تهران

چکیده

مواد ناهمسانگرد دارای خواص فیزیکی مانند رسانندگی گرمایی هستند که با تغییر جهت درون ساختار تغییر می‌کند. خاصیّت ناهمسانگردی، تحلیل انتقال گرما را نسبت به حالت همسانگرد استاندارد بسیار پیچیده‌تر می‌کند. در این مقاله، حل تحلیلی برای رسانش گرمای پایا در یک کره ارتوتروپیک در سه بعد ارایه شده است. حل تحلیلی، با استفاده از یک تغییر متغیّر برای تبدیل مسأله به فضای همسانگرد و تولید معادله لاپلاس است که جواب آن به دست آمده است. نتایج نشان داده است که منحنی‌های هم‌دما به شکل بیضی‌های هم‌مرکز با مرکزیت مبدأ مختصات هستند. اگر رسانندگی در دو جهت یک‌سان بود، منحنی‌های هم‌دما، دایره‌های متحدالمرکزی بودند که با حالت همسانگرد سازگار است. مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، صحت این تحلیل را تایید می‌کند. بر خلاف انتقال گرمای همسانگرد، می‌بینیم که بردارهای $\boldsymbol{q}$ و $\boldsymbol{\nabla T}$ لزوماً موازی یک دیگر نیستند.

Analytical Solution to Anisotropic Heat Transfer with Point Heat Source in Sphere

Razi Astaraie, Fatemeh[1]; Sameti, Mohammad[1]

[1]*Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran*

Abstract

Abstract Anisotropic materials have physical properties such as conductivity which varies with direction inside the structure. Anisotropy makes analysis of the heat transfer more complex in comparison with standard isotropic cases. Analytical solution is performed using changing of the variables to transform the problem space into isotropic one and generating the Laplace equation. The results have shown that that isothermal surfaces are concentric ellipses with the center in the origin of the coordinates system. If the conductivities were the same in two directions, isothermal surfaces would be concentric circles which are compatible with isotropic cases. The results were verified with experiments. Despite the isotropic heat transfer, it can be seen that the vectors $\boldsymbol{q}$ and $\boldsymbol{\nabla T}$ are not essentially parallel.

PACS No.44

مقدّمه

مانند مواد ساختگی(سنتزی)، مواد طبیعی هم موجودند که در آن‌ها رسانندگی گرمایی مطابق شکل (۱) با جهت تغییر می‌کند. بنابراین رسانندگی گرمایی در مواد ناهمسانگرد کاربردهای مهم بسیاری در شاخه‌های گوناگون علوم و مهندسی دارد. معادله رسانش گرمای چند بعدی برای حالت ناهمسانگردی کلی در بردارنده مشتقات ضربدری هستند، هم چنین شرایط مرزی، می‌تواند شامل مشتقات پاره‌ای نسبت به متغیرهای فضایی باشد. به عنوان نتیجه، حل تحلیلی رسانش گرمای چند بعدی در حالت کلی ناهمسانگردی دشوار است، به ویژه برای نواحی محدود و متناهی. هرچند در موقعیت‌های ویژه مثل نواحی نیمه‌بی‌نهایت یا بی‌نهایت، حل‌های قابل دسترسی دارند [۱].

رسانش ناهمسانگرد به مفهوم عام هنوز کاربردی پیدا نکرده است. در عوض موقعیت‌هایی هستند که تنها راه، استفاده از یک ماده

ناهمسانگرد گرمایی است. حفاظ سفینه فضایی وظیفه دارد گرمای ایجاد شده بر اثر حرکت در سرعت های بالا را به صورت شعاعی دفع کند. قطر حفاظ گرمایی ۴/۵ متر است [۲]. ما و چانگ [۳] مسأله انتقال گرمای حالت پایای دوبعدی را برای یک محیط چند لایه‌ای در نظر گرفتند. آن‌ها با استفاده از تبدیل فوریه و بسط سری‌ها، جواب بسته صریحی برای مسأله به دست آوردند. اسلادک و همکاران [۴] از روش‌های بدون شبکه با دیدگاه پتروف–گالرکین برای حل مسأله رسانش گرمای پایا و گذرا در محیط پیوسته ناهمسانگرد و نامتجانس استفاده کردند. مرا و همکاران [۵] با استفاده از روش اجزای مرزی مسأله انتقال گرمای ناهمسانگرد حالت پایا را تحلیل کرده‌اند.

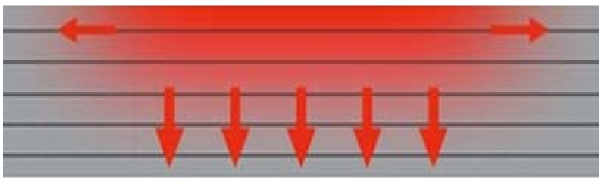
تبدیل معادلات انتقال گرما در مواد ناهمسانگرد

در یک موقعیت کلی‌تر، که در جریان گرما در بلورها (کریستال‌ها) با آن برخورد می‌کنیم، هر مولفه q_z, q_y, q_x از بردار شار گرما یک ترکیب خطی از شیب(گرادیان)‌های دما $\partial T / \partial x$ و $\partial T / \partial y$ و $\partial T / \partial z$ در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$q_x = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

$$q_y = -\left(k_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad (2)$$

$$q_z = -\left(k_{31}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{32}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad (3)$$



شکل ۱: در مواد ناهمسانگرد انتشار گرما در دو جهت متفاوت ولی با شرایط یکسان، می‌تواند با هم فرق کند.

چنین محیطی، محیط *ناهمسانگرد* (*غیر ایزوتروپیک*) و رسانندگی گرمایی برای چنین محیطی نه مولفه‌ی k_{ij} دارد، که *ضرایب رسانندگی* نامیده شده و مولفه‌های تانسور مرتبه‌ی دوم K در نظر گرفته می‌شوند.

بلورها مثال عمده ای برای مواد ناهمسانگرد هستند که نه ضریب رسانندگی دارند. معادله‌ی رسانش گرما برای جامدات ناهمسانگرد در دستگاه مختصات مستطیلی با وارد کردن عبارات سه مولفه‌ی شار گرمای به دست آمده از معادلات (۱) تا (۳) در معادله‌ی انرژی به دست می‌آیند:

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \left(k_{12} + k_{21}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \left(k_{13} + k_{31}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}\left(k_{23} + k_{32}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + g(x,y,z,t) = \rho C_p \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} \qquad (5)$$

به معادله‌ی استاندارد رسانش گرما برای جامد همسانگرد ، همان طور که در زیر می‌آید، تبدیل شود. ما معادله رسانش گرما برای یک محیط ارتوتروپیک در دستگاه مختصات مستطیلی که با

$$k_1\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_3\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + g = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (6)$$

داده می‌شود را، در نظر می‌گیریم. در این رابطه، g تولید گرمای حجمی و ρC_P حاصل‌ضرب چگالی در گرمای ویژه است. متغیرهای جدید مستقل X و Y و Z این گونه تعریف می‌شوند:

$$Z = \left(\frac{k}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}} z \quad \text{و} \quad Y = \left(\frac{k}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} y \quad \text{و} \quad X = \left(\frac{k}{k_1}\right)^{\frac{1}{2}} x \qquad (7)$$

که در آن، k رسانندگی مرجع است. جمله اول سمت چپ معادله (۶) را به مختصات جدید می‌بریم.

$$k_1\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = k_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}\right) = k_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{k}{k_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial T}{\partial X}\right) = k_1\frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{k}{k_1}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right) = k\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \qquad (8)$$

به همین ترتیب، بقیه جملات هم ساده می‌شوند. بنابراین معادله‌ی (۶) تبدیل می‌شود به

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right)+g=\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۹)$$

که شبیه معادله رسانش گرما برای یک جامد همسانگرد است. هر چند انتخاب رسانندگی گرمایی مرجع، *اختیاری نیست*. دلیلش این است که المان حجم در فضای "$dxdy\,dz$" تحت تبدیل رابطه-های (۷) به

$$\frac{\left(k_1k_2k_3\right)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}}dXdYdZ \qquad (۱۰)$$

تبدیل می‌شود. اگر مقادیر ρC_p و تولید گرمای حجمی g که بر مبنای واحد حجم تعریف شده‌اند، معنی و مفهوم یکسان داشته باشند، باید داشته باشیم

$$k=\frac{\left(k_1k_2k_3\right)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}}=1 \qquad (۱۱)$$

$$k=\left(k_1k_2k_3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (۱۲)$$

آن‌گاه معادله رسانش گرما شکل

$$\left(k_1k_2k_3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right)+g=\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱۳)$$

را می‌گیرد که در آن X و Y و Z مطابق معادله‌های (۷) تعریف شده‌اند. این به معنای یک محیط همسانگرد با رسانندگی گرمایی $\left(k_1k_2k_3\right)^{\frac{1}{3}}$ است. تبدیلات مشابهی برای تبدیل معادله به شکل متعارف (استاندارد) دستگاه مختصات کروی و استوانه‌ای قابل اعمال هستند.

تحت تبدیل بیان شده در بالا حل معادله‌ی رسانش گرمای نتیجه شده، یک موضوع سرراست است؛ ولی تبدیل حل به فضای فیزیکی اصلی نیازمند یک جانشانی(تبدیل) اضافی مرتبط با تبدیل انجام گرفته است. یعنی مساله‌ی انتقال گرمای همسانگرد بدیل(قرینه) با رسانندگی $\left(k_1k_2k_3\right)^{\frac{1}{3}}$ به سادگی حل می‌شود.

حل مسأله

یک منبع نقطه ای با قدرت Q وات که در مبدا دستگاه مختصات مستطیلی قرار دارد و گرما را به طور پیوسته با آهنگ ثابتی در یک محیط ارتوتروپیک آزاد می‌کند، مطابق شکل (۲) در نظر گرفته می-شود. در نواحی دور از منبع، ناحیه دردمای T_∞ قرار دارد. عبارتی برای توزیع دمای حالت پایا در جامد به دست می‌آوریم. ابتدا، معادله‌ی تبدیل یافته‌ی (۱۳) را در نظر می‌گیریم. برای مسأله‌ی حالت پایا در ناحیه‌ی خارج از مرکز، که در آن هیچ تولید انرژی ای وجود ندارد، می‌نویسیم

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}=0 \qquad (۱٤)$$

که در آن $0<X<\infty, 0<Y<\infty, 0<Z<\infty$ است. شرط مرزی در مبدا با رسم یک کره به شعاع R حول نقطه منبع و مساوی قرار دادن آهنگ انرژی آزاد شده از منبع با گرمای رسانش شده در محیط، به دست می‌آید

$$\left(4\pi R^2\right)\left(-k\frac{\partial T}{\partial R}\right)=Q \quad ;R\to 0 \text{ هرگاه} \qquad (۱۵)$$

که در آن $R=\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^{1/2}$. شرط مرزی در بی نهایت این است

$$T=T_\infty \;; R\to\infty \text{ هرگاه} \qquad (۱٦)$$

معادله اصلی اولیه، معادله لاپلاس [٦] است و حل آن با ارضای شرط بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T(R)=\frac{C}{R}+T_\infty \qquad (۱۷)$$

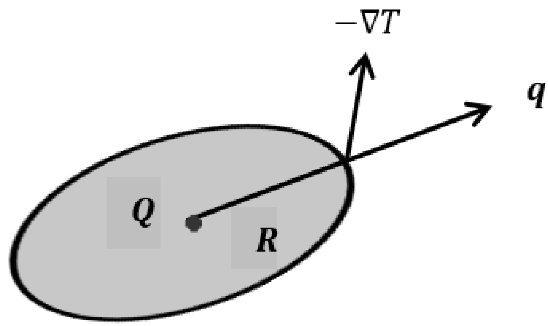
که در آن ثابت مجهول C با اعمال شرط مرزی $R\to 0$ تعیین می‌شود

$$\left(4\pi R^2\right)\left(k\frac{C}{R^2}\right)=Q\to C=\frac{1}{k}\frac{Q}{4\pi} \qquad (۱۸)$$

بعد از وارد کردن C در حل کلی، جواب خواهد شد

$$T(R)-T_\infty=\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{kR} \qquad (۱۹)$$

$$T(x,y,z)-T_\infty=\frac{Q}{4\pi}\left(k_1k_2k_3\right)^{1/2}\left(\frac{x^2}{k_1}+\frac{y^2}{k_2}+\frac{z^2}{k_3}\right)^{-1/2} \qquad (۲۰)$$



شکل ۲: چشمه نقطه‌ای که به صورت شعاعی گرما پخش می‌کند.

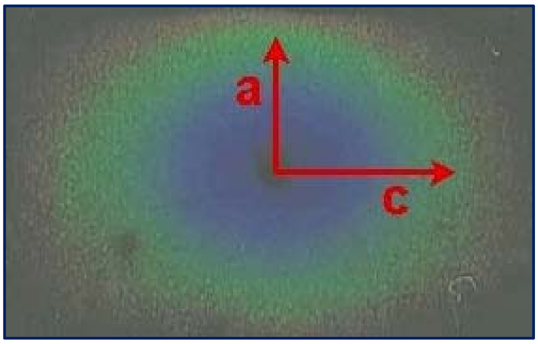
نتایج و بحث

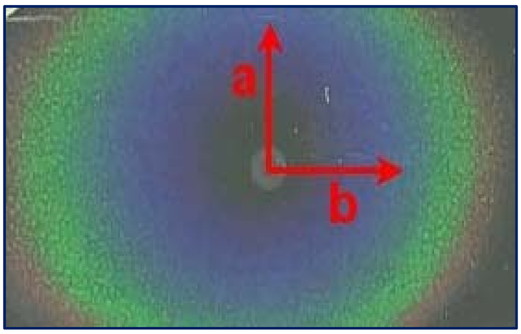
به وضوح $T(R)-T_\infty$ با افزایش فاصله‌ی R از مبدأ، کاهش می‌یابد. شکل مساله، بردار شار گرما q را نشان می‌دهد که در امتداد خط مختصه‌ی R بوده و حداکثر شیب دما ∇T بر سطوح هم‌دمای بیضوی عمودند. می‌بینیم که بردارهای q و ∇T لزوما موازی یک دیگر نیستند. نمونه‌ی آزمایش برای این مساله در دانشگاه کمبریج [۷] انجام شده است. یک دستگاه آزمایشی می‌-تواند نشان دهد که منحنی همدما در صفحه واقعا یک بیضی است. یک تکه‌ی پلاستیکی حاوی بلور مایع حساس به گرما روی سطح صفحه آزمایشی مانند کوارتز چسبانده می‌شود.

با استفاده از یک هویه، گرما از مرکز پخش می‌شود. همین‌طور که در این‌جا کوارتز شروع به گرم شدن می‌کند، لایه‌ی حساس به گرما تغییر رنگ می‌دهد و به ما اجازه می‌دهد تا منحنی‌های همدما را ببینیم. رنگ‌های یکسان دارای دمای برابری هستند. برای بلوری مانند کوارتز رسانندگی در دو جهت با هم برابر و با جهت سوم متفاوت هستند. با انتخاب صفحه‌ای با رسانندگی‌های برابر، منحنی‌های هم‌دما دایره هستند و در غیر این صورت مطابق با رابطه‌ی (۲۰) باید یک بیضی باشند که نتیجه‌ی آزمایش در شکل (۳) این مطلب را تایید می‌کند.

نتیجه‌گیری

مواد طبیعی هم‌چون مواد ساختگی(سنتزی) موجودند که در آن‌ها رسانندگی گرمایی با جهت تغییر می‌کند. خاصیت ناهمسانگردی، تحلیل انتقال گرما را نسبت به حالت همسانگرد استاندارد بسیار پیچیده‌تر می‌کند. یک منبع نقطه ای با قدرت ثابت که در مبدأ دستگاه مختصات مستطیلی قرار دارد و گرما را به طور پیوسته با آهنگ ثابتی در یک محیط ارتوتروپیک آزاد می‌کند، در نظر گرفته شده و عبارتی برای توزیع دمای حالت پایا در جامد به دست آورده شده است. روش حل بر مبنای تبدیل فضای ناهمسانگرد به فضای همسانگرد با استفاده از تغییر متغیّر است. منحنی‌های هم‌دما به شکل بیضی‌های هم‌مرکز با مرکزیت مبدأ مختصات هستند. اگر رسانندگی در دو جهت یک‌سان بود، منحنی‌های هم‌دما، دایره‌های متحدالمرکزی بودند که با توجه به تقارن مسأله بدیهی به نظر می-رسید. نتایج آزمایشی، صحت این تحلیل را تایید می‌کند. بر خلاف انتقال گرمای همسانگرد، می‌بینیم که بردارهای q و ∇T لزوماً موازی یک دیگر نیستند.





شکل ۳: نمونه آزمایش انجام شده در دانشگاه کمبریج[۷]. منحنی های همدمای حاصل از آزمایش تجربی در کوارتز. رسانندگی در جهات a و b با هم مساوی و متفاوت با c هستند. در شکل پایین منحنی‌های همدما دایروی و در شکل بالا بیضوی هستند.

مرجع‌ها

[1] Ozisik, M. N. *Boundary value problems of heat conduction*. Courier Dover Publications (2013).

[2] www.nasa.gov/mission_pages/msl/msl-20090710.html (accessed 2014/23/03)

[3] Ma, C. C., & Chang, S. W. Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media. *International journal of heat and mass transfer*, *47* (8), 1643-1655 (2004).

[4] Sladek, J., Sladek, V., & Atluri, S. N. Meshless local Petrov-Galerkin method for heat conduction problem in an anisotropic medium. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, *6*, 309-318 (2004).

[5] Mera, N. S., Elliott, L., Ingham, D. B., & Lesnic, D. A comparison of boundary element method formulations for steady state anisotropic heat conduction problems. *Engineering analysis with boundary elements*, *25* (2), 115-128 (2001).

[6] Kreyszig, E.. *Advanced engineering mathematics*. John Wiley & Sons (2010).

[7] http://metafysica.nl/crystal_classes.html (accessed 2014/23/03)