

روندیابی هیدرولیکی سیلاب به روش موج پخشیدگی و مقایسه آن با روش ماسکینگام کونج

مجید حیدری¹، شاهین عودی²

1- استادیار مهندسی آب، دانشگاه بوعلی سینا همدان

2- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه های آبی، دانشگاه بوعلی سینا همدان

oodishahin@gmail.com

خلاصه

روندیابی جریان یک روش ریاضی برای پیش‌بینی تغییرات حجم، سرعت و شکل موج سیل در یک کانال به صورت تابعی از زمان می‌باشد که اهمیت زیادی در مهندسی رودخانه، کنترل و کاهش خطرات سیل در مخازن و سرریزها دارد. در این مطالعه حل کامل معادلات سنت و نانت به روش موج پخشیدگی و مقایسه آن با روش چهار نقطه‌ای ماسکینگام کونج صورت گرفت. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که روش سلول مخلوط که یکی از روش‌های روندیابی سیل به روش موج پخشیدگی است که دارای بالاترین ضریب همبستگی با داده هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای از رودخانه مورد مطالعه است و بعد از آن روش نیمه هیدرولیکی ماسکینگام کونج و روش کرانک نیکلسون با ضریب همبستگی پایین‌تر نسبت به روش سلول مخلوط قرار گرفتند. بنابراین طبق نتایج بدست آمده روش سلول مخلوط دارای بهترین پیش‌بینی هیدروگراف خروجی در پایین‌دست رودخانه نسبت به دو روش دیگر است.

کلمات کلیدی: معادلات سنت و نانت، موج پخشیدگی، روش سلول مخلوط، روش کرانک نیکلسون

1. مقدمه

یکی از معضلات کشور در زمینه مطالعات روندیابی سیلاب، عدم دسترسی به آمار و اطلاعات کامل در مورد رودخانه‌ها و تعداد محدود ایستگاه‌های هیدرومتری است که استفاده از روش‌های نیازمند آمار دقیق و کامل را با مشکلاتی مواجه می‌سازد. سیل یک جریان غیردائمی است که برای حل مسائل مربوط به آن می‌توان از روش‌های مختلف هیدرولیکی و هیدرولوژیکی استفاده نمود. اهمیت و لزوم استفاده از روش‌های هیدرولیکی را می‌توان در عدم نیاز این روش‌ها به آمار و داده‌های مقاطع خروجی بیان کرد [4، 5، 6]. اگر مشخصات و اطلاعات هیدرولیکی به دقت تعیین شود، نیازی به داده‌های مقطع خروجی نبوده و از طریق روندیابی هیدرولیکی در هر مقطعی این داده‌ها قابل حصول است و داده‌های خروجی یک مقطع صرفاً برای صحت‌سنجی کاربرد خواهند داشت. روندیابی سیلاب با روش‌های هیدرولوژیکی ساده بوده و از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشند ولی نیاز به داده‌های هیدروگراف ورودی و خروجی متعددی دارند. روندیابی سیل برای اولین بار توسط مک کارتی (1938) برای مطالعات کنترل سیلاب در حوضه رودخانه ایالت اوهایو آمریکا بکار گرفته شد که یک روش خطی است [1]. در سال (1997) نتایج بدست آمده از حل معادله موج پخشیدگی با استفاده از روش سلول مخلوط که توسط لنینگ و همکاران صورت گرفت که کار آنها تبدیل معادله موج پخشیدگی به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه اول بود. حل عددی معادلات سنت و نانت با روش مشخصه‌ها یکی از روش‌های کارآمد عددی تفاضلات محدود شناخته شد [2] (کونج 1980).

هدف از این مطالعه مقایسه بین روندیابی به روش موج پخشیدگی که توسط ونگ و همکاران (1997) انجام شد با روندیابی نیمه هیدرولیکی ماسکینگام کونج (1969) است [8]. روندیابی سیلاب با روش‌های هیدرولیکی پیچیده بوده و دارای مراحل زیادی می‌باشند. در این نوع از روندیابی که شامل روش‌های سینماتیک، پخشیدگی و دینامیک است نیازی به اطلاعات سال‌های قبل نیست ولی اطلاعات هیدرولیکی کانال مورد نیاز است، و در روش ماسکینگام کونج با تعیین ضرایب با استفاده از عدد کورانت می‌توان هیدروگراف خروجی را به صورت قابل قبولی پیش‌بینی کرد [3، 7]. از این

رو مطالعه و بررسی روش‌های مختلف هیدرولیکی و پیش‌بینی و تخمین هیدروگراف سیل در پایین‌دست و انتخاب بهینه‌ترین روش ضروری و به تبع آن اجرای تمهیدات مختلف و کنترل و مهار سیل را منجر خواهد شد.

2. مواد و روش‌ها

2-1- روش روندیابی هیدرولوژیکی ماسکینگام

از معادلات پیوستگی (1) و ذخیره (2) در روندیابی هیدرولوژیکی داریم که:

$$\frac{dW}{dt} = I - Q \quad (1)$$

$$W = K[XI + (1 - X)Q] \quad (2)$$

و با ترکیب معادله پیوستگی و ذخیره و استفاده از روش حل تقریبی فرم تفاضلات محدود FDF که بر اساس روش ماسکینگام استوار است. معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$Q_2 = C_1 I_1 + C_2 I_2 + C_3 Q_1 \quad (3)$$

که در آن I_1 و I_2 ورودی هیدروگراف بالادست می‌باشد و Q ها خروجی هیدروگراف پایین‌دست می‌باشد و ضرایب معادله (3) به قرار زیر است:

$$C_1 = \frac{\left(\frac{\Delta t}{k}\right) + 2x}{\left(\frac{\Delta t}{k}\right) + 2(1-x)} \quad (3-الف)$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{\Delta t}{k}\right) - 2x}{\left(\frac{\Delta t}{k}\right) - 2(1-x)} \quad (3-ب)$$

$$C_3 = \frac{2(1-x) - \left(\frac{\Delta t}{k}\right)}{\left(\frac{\Delta t}{k}\right) + 2(1-x)} \quad (3-ج)$$

و جهت کنترل حاصل جمع هر سه ضریب باید برابر با یک باشد.

2-2- حل کامل معادلات سنت و نانت برای روندیابی در کانال بدون جریان جانبی

یکی از تکنیک‌های مناسب برای روندیابی جریان به روش هیدرولیکی حل کامل معادلات سنت و نانت است. با استفاده از معادله پیوستگی (4) و مومتوم (5) داریم:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f \quad (5)$$

که در آن A مساحت ناحیه عبوری جریان، Q دبی کل، h عمق جریان، V سرعت جریان، g شتاب ثقل، x فاصله طولی کانال، t زمان، S_0 شیب کف کانال، S_f شیب اصطکاکی، $\frac{\partial h}{\partial x}$ شیب سطح آب و $\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$ و $\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x}$ ترم‌های اینرسی می‌باشند. معادلات 4 و 5 غیرخطی و حل تحلیلی برای آنها وجود ندارد به غیر از زمانی که ساده‌سازی در آنها صورت گیرد. بنابراین روش‌های عددی تنها راه برای حل آنهاست. روش‌های عددی این معادلات را در فضای گسسته $(x-t)$ برای محاسبه عمق و سرعت تحلیل می‌کند. روش‌های عددی صریح برنامه‌نویسی ساده‌تری دارند. اما در این روش‌ها گام زمانی با توجه به شرایط ثابت عدد کورانت محدود می‌گردد.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v + (gy)^{0.5}}$$

در روش ضمنی نیازی به شرایط پایداری کورانت نیست. در این مطالعه از روش سلول مخلوط برای حل معادله موج پخشیدگی که یک فرم ساده از معادلات سنت و نانت است بهره گرفته می‌شود.

جریان غیردائمی در کانال‌های باز توسط معادلات سنت و نانت (4) و (5) بیان می‌گردد. برای بیشتر جریان‌ها ترم‌های اینرسی (محل و جابه-جایی) خیلی کمتر از شیب انرژی و گرادیان فشار می‌باشند.

$$\left| S_f + \frac{\partial y}{\partial x} \right| \gg \left| \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} \right|$$

پس می‌توان آنرا نادیده گرفت. علاوه بر این مشاهدات تجربی و میدانی نشان می‌دهد که در بسیاری از حالات روندیابی می‌توان از شتاب‌های محلی و جابه‌جایی صرف نظر کرد. بنابراین معادله (5) را می‌توان اینگونه نوشت:

$$S_f = S - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (6)$$

$$S_f = \frac{v^2}{C^2 R} \quad (7)$$

R شعاع هیدرولیکی و C ضریب شزی با جای گذاری معادله (6) در (7)

$$V = CR^{0.5} \left(S - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^{0.5} \quad (8\text{-الف})$$

$$Q = ACR^{0.5} \left(S - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^{0.5} \quad (8\text{-ب})$$

در کانال‌های عریض مستطیلی شعاع هیدرولیکی و معادله (8) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = S - \frac{Q^2}{C^2 B^2 y^3} \quad (9)$$

اگر ضریب شزی و شیب ثابت باشد معادله (9) را با معادله (4) ترکیب شود و نسبت به t مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{3Q^2}{B^2 C^2 y^4} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{2Q}{B^2 C^2 y^3} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (10)$$

معادله (4) را می‌توان اینگونه نوشت:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{B \partial x} \quad (11)$$

با مشتق‌گیری از معادله (11) نسبت به x و جای گذاری آن در معادله (10) داریم:

$$- \frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{3Q^2}{B^2 C^2 y^4} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{2Q}{B^2 C^2 y^3} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (12)$$

و با جای گذاری معادله (11) در معادله (12) داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{BC^2 y^3}{2Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{3Q \partial Q}{By \partial x} \quad (13)$$

معادله (13) یک معادله غیرخطی برای موج پخشیدگی است که شامل دو پارامتر نامعلوم y و Q است و نیاز به یک مقدار اولیه و دو شرط مرزی برای حل است.

3-2- معادله موج پخشیدگی غیرخطی به روش سلول مخلوط

هدف از حل معادله (13) تعیین عمق آب و دبی برای تمامی نقاط کانال در هر زمان دلخواه است. و هیچ راه حل تحلیلی برای حل معادله (13) وجود ندارد. برای حل این معادله روش سلول مخلوط پیشنهاد می‌گردد که ترم‌های پخشیدگی با انتخاب Δx مناسب وقتی که Δt رو داریم قابل صرف نظر کردن است.

با استفاده از بسط سری تیلور و صرف نظر کردن از مرتبه سوم به بالا در این بسط برای گام زمانی و مکانی داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (15)$$

ترم دوم در سمت راست معادله (14) مدل موج سینماتیک را معرفی می‌کند:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = C_k \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (16)$$

که $C_k = \frac{3Q}{2By}$ ضریب موج سینماتیک است. و ترم آخر از معادله (14) با استفاده از مدل موج سینماتیک بدین صورت است:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(C_k \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = - \frac{\partial C_k}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial x} + C_k \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (17)$$

و C_k را می‌توان اینگونه نوشت: $C_k = aQ^b$. a و b در این معادله هر دو پارامتر می‌باشند که به مشخصات جریان وابسته اند. اگر از این معادله یک بار نسبت به x و بار دیگر نسبت به t مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = abQ^{b-1} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (18)$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial x} = abQ^{b-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (19)$$

با ترکیب معادلات (18) و (19) و جای گذاری در معادله (17) داریم:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2C_k \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (20)$$

برای سیل طبیعی ضریب موج سینماتیک بین دو پروفیل کوچک است و قابل صرف نظر کردن بنابراین معادله (20):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (21)$$

بدین ترتیب معادله (14) به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \quad (22)$$

با جای گذاری معادله (22) و (15) در معادله (13):

$$\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} = \frac{C_k}{\Delta x} (Q_{i-1}^k - Q_i^k) + \left(\frac{\Delta t}{2} C_k^2 - \frac{\Delta x}{2} C_k + \frac{3C^2 y^2}{4C_k} \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (23)$$

با صرف نظر کردن از مشتقات مرتبه دوم در معادله (23) می‌توان Δx را با معلوم بودن Δt از این فرمول محاسبه کرد.

$$\Delta x = \Delta t C_k + \frac{3C^2 y^2}{2C_k^2} \quad (24)$$

و با استفاده از معادله (24) دبی را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد.

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \frac{\Delta t C_k}{\Delta x} (Q_{i-1}^k - Q_i^k) \quad (25)$$

این معادله جهت محاسبه دبی در روش سلول مخلوط است.

2-4- معادله موج پخشیدگی غیرخطی به روش کرانک نیکلسون

فرم استاندارد روش کرانک نیکلسون نیز به روش صریح است. در این روش تفاضلات با استفاده از سری بسط تیلور که در سال 1982 توسط نوبه مطرح شد استفاده گردید و دبی پیش‌بینی هر گام در این روش با استفاده از روش 4 نقطه ای محاسبه شد.

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \frac{\Delta t C_k}{\Delta x} \left(\frac{Q_{i-1}^{k+1} + Q_{i-1}^k}{2} - \frac{Q_i^{k+1} + Q_i^k}{2} \right) \quad (26)$$

با مرتب کردن معادله (26) داریم:

$$Q_i^{k+1} = \left(\frac{2 - C_r}{2 + C_r} \right) Q_i^k + \left(\frac{C_r}{2 + C_r} \right) (Q_{i-1}^{k+1} + Q_{i-1}^k) \quad (27)$$

که عدد کورانت در فرمول (27) برابر است با: $C_r = \frac{\Delta t \times C_k}{\Delta x}$

2-5- روش نیمه هیدرولیکی ماسکینگام کونج

روش روندیابی ماسکینگام کونج روش توسعه یافته‌ی ماسکینگام است. در این روش ضرایب وزنی X و Y با توجه به دبی و عمق در کانال یا رودخانه بدست می‌آید. در این روش که یک روش صریح است ضرایب به عدد کورانت وابسته‌اند و خود عدد کورانت نیز به زمان و فاصله‌ای که موج سیل طی می‌کند بستگی دارد.

معادله اصلی برای هر سلول محاسباتی در روش ماسکینگام کونج (استورم، 2001):

$$\frac{X(Q_i^{k+1} - Q_i^k) + (1 - X)(Q_{i+1}^{k+1} - Q_{i+1}^k)}{\Delta t} + C_k \frac{Y(Q_{i+1}^k - Q_i^k) + (1 - Y)(Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1})}{\Delta x} = 0 \quad (28)$$

و فرمول محاسبه دبی در هر گام:

$$Q_{i+1}^{k+1} = C_0 Q_i^{k+1} + C_1 Q_i^k + C_2 Q_{i+1}^k \quad (29)$$

که C_0 و C_1 و C_2 ضرایب دبی‌اند که به ازای $X=Y=0.5$ برابرند با:

$$C_2 = \frac{1 - C_r}{1 + C_r} \quad \text{و} \quad C_1 = 1 \quad \text{و} \quad C_0 = \frac{C_r - 1}{1 + C_r}$$

2-6. الگوریتم محاسبه روش‌های سلول مخلوط و کرانک نیکلسون

روش سلول مخلوط و روش کرانک نیکلسون از جمله روش‌های غیرخطی برای روندیابی مسیر سیل است که برای بدست آوردن دبی از یک روش تکراری استفاده می‌کند. از مقادیر هیدروگراف ورودی می‌توان به عنوان شرط مرزی بالادست بهره گرفت.

شاخص زمانی اولیه $k = 0$ و مکانی اولیه $i = 0$ است. مراحل اجرای الگوریتم به صورت زیر می‌باشد:

(1) یک مقدار فرضی برای Q_1^1 در نظر می‌گیریم.

(2) مقدار ضریب سینماتیک را با استفاده از فرمول $C_k = aQ^b$ با معلوم بودن پارامترها و دبی در هر گام محاسبه می‌کنیم.

(3) طول مشخصه کانال را با استفاده از فرمول $\zeta = \frac{7.2668Q}{C_k}$ بدست می‌آوریم.

(4) مقدار Δx را از فرمول $\Delta x = \Delta t \times C_k + \zeta$ محاسبه می‌کنیم.

(5) در این مرحله دبی پیش‌بینی هر دو روش را با استفاده از فرمول‌های (27) و (25) بدست می‌آوریم.

(6) برای $k=1, 2, 3, 4, \dots$ مراحل 1 تا 5 را تکرار می‌کنیم تا هیدروگراف مربوط به $i = 0$ کامل شود.

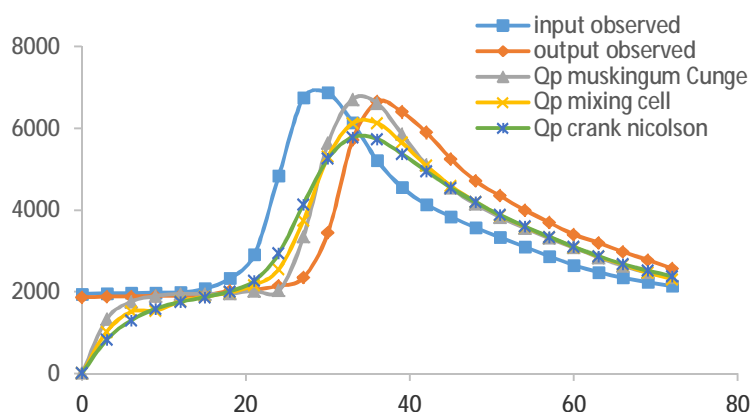
(7) برای $i = 1, 2, 3, \dots$ همان مراحل بالا را تکرار کرده تا هیدروگراف خروجی کامل گردد.

3. نتایج و بحث

در مقایسه روش‌های کرانک نیکلسون و سلول مخلوط که از روش‌های موج پخشیدگی بودند، چون روش روندیابی از نوع هیدرولیکی است و با روش ماسکینگام کونج نیمه هیدرولیکی مقایسه می‌شود، پس برای تخمین هیدروگراف خروجی به ویژگی‌های کانال احتیاج داشتیم. این ویژگی‌ها طبق روش‌های بالا شامل طول مشخصه ضریب موج سینماتیک و X فاکتور وزنی زمان و Y فاکتور وزنی مکان در روندیابی ماسکینگام کونج می‌باشد و

مقدار هر دوی این ضرایب بین صفر تا 0/5 متغیر است. به منظور مقایسه روش موج پخشیدگی با روش ماسکینگام کونج از آمار سیل رودخانه یوان در بازه یوانلینگ-وانگجیاها استفاده شد.

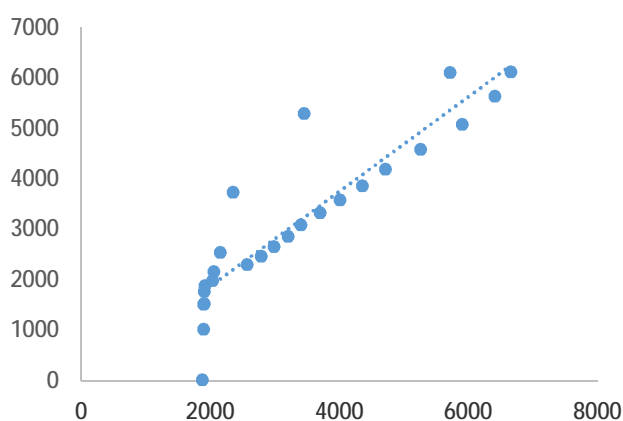
بازه رودخانه دارای طول 112 کیلومتر، شیب متوسط طولی 0/0004، ضریب شزی معادل 30 و با توجه به مقاطع برداشت شده متوسط عرض سطح آب معادل 352/7 متر و ضریب موج سینماتیک در این رودخانه $C_{Rk} = 0.047Q^{0.5}$ می‌باشد. چون تخمین هیدروگراف خروجی در این روش به مشخصات جریان وابسته است، بنابراین یک برنامه کامپیوتری جهت حل معادله (25) و (27) و (29) تدوین شد. که در قسمت ورودی برنامه در هر مرحله با وارد کردن داده‌های هیدروگراف ورودی با فرض اولیه از یازه زمانی اولیه از هیدروگراف خروجی که در این مقاله 20 متر مکعب بر ثانیه در نظر گرفته شد اثر آن در هر کدام از روش‌ها بر روی هیدروگراف خروجی مورد ارزیابی قرار گرفت، که شکل شماتیک هر سه روش طبق خروجی برنامه به صورت شکل (1) نمایش داده شد. در این شکل هم مقادیر ورودی هم خروجی مشاهده‌ای از سیل نشان داده شده و هم هیدروگراف خروجی از هر روش که با Qp قابل مشاهده است.



شکل 1- هیدروگراف ورودی و خروجی مشاهده‌ای و هیدروگراف خروجی از سه روش ماسکینگام کونج سلول مخلوط و کرانک نیکلسون

در شکل (2) ضریب همبستگی و معادله خط برازش داده شده برای روش سلول مخلوط به ترتیب برابر است با:

$$\text{ضریب همبستگی: } R^2 = 0.8284 \text{ و معادله خط } y = 3373.8 \ln(x) - 23932$$



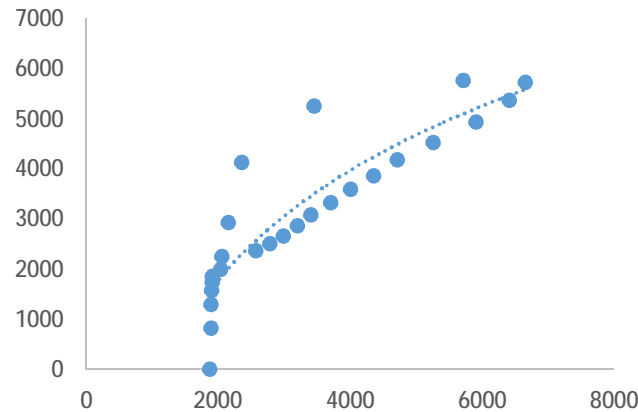
شکل 2- مقایسه بین هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای با هیدروگراف خروجی حاصل از روش سلول مخلوط با معادله خط برازش یافته از آن

داده‌های پیش‌بینی از روش سلول مخلوط همانگونه که در شکل (2) مشاهده می‌شود دارای اختلاف کم با داده‌های مشاهده‌ای واقعی از هیدروگراف خروجی در پایین دست رودخانه می‌باشد.

در شکل (3) ضریب همبستگی و معادله خط برازش داده شده برای روش کرانک نیکلسون به ترتیب برابر است با:

$$y = 3167.9 \ln(x) - 22298 \quad R^2 = 0.7899$$

ضریب همبستگی: $R^2 = 0.7899$ و معادله خط



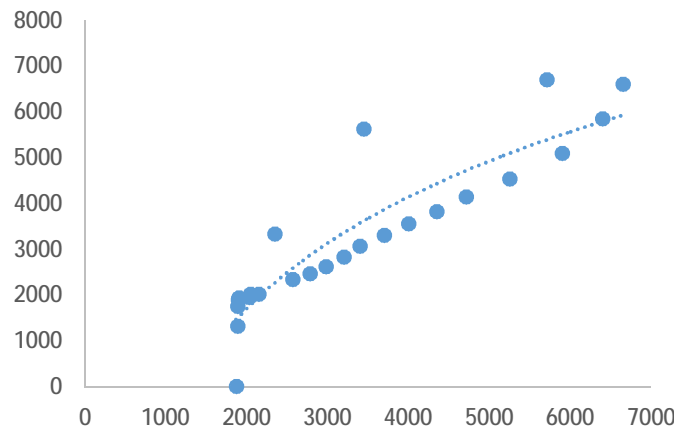
شکل 3- مقایسه بین هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای با هیدروگراف خروجی حاصل از روش کرانک نیکلسون با معادله خط برازش یافته از آن

همانگونه که در شکل و از ضریب همبستگی پیداست روش کرانک نیکلسون به نسبت روش سلول مخلوط از دقت کمتری برخوردار است.

در شکل (4) نیز ضریب همبستگی و معادله خط برازش داده شده برای روش ماسکینگام کونج به ترتیب برابر است با:

$$y = 3511.3 \ln(x) - 24977 \quad R^2 = 0.8156$$

ضریب همبستگی: $R^2 = 0.8156$ و معادله خط



شکل 4- مقایسه بین هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای با هیدروگراف خروجی حاصل از روش ماسکینگام کونج با معادله خط برازش یافته از آن

4. نتیجه گیری

- با مقایسه بین هیدروگراف‌های پیش‌بینی شده توسط این سه روش همانطور که قابل مشاهده بود روش سلول مخلوط دارای بهترین پیش‌بینی به نسبت دو روش دیگر بود که این امر خود حاکی از برتری حل معادلات سنت و نانت به روش ضمنی نسبت به صریح است.

5. مراجع

1. McCarthy, G-T., 1938. The Unit Hydrograph and Flood Routing. Conference North Atlantic Division, US Army Corporation of Engineers.
2. Cunge, J.A., Holly, F.M., Verwey, A., 1980. Practical Aspects of Computational River Hydraulics. Pitman, London.
3. Wang, G-T., Chen, S., Boll, J., 2003a. A semi-analytical solution of the Saint-Venant Eqs. for channel flood routing. Water Resour.Res. 39 (4), 1076.
4. Wang, G-T., Chen, S., Boll, J., Singh, V.P., 2003b. Nonlinear convection-diffusion Eq. with mixing-cell method for channel flood routing. J. Hydrol. Eng., ASCE 8 (5), 259–265.
5. Singh, V.P., Wang, G-T., Adrian, D.D., 1997. Flood routing based on diffusion wave Eq. using mixing cell method. Hydrological Process. 11, 1881–1894.
6. Noye, J. 1982. `Finite difference methods for partial differential equations, in Noye, J. (Ed.), Numerical Solutions of Partial Differential Equations. North-Holland, New York. 647 pp.
7. Sturm, T.W., 2001. Open Channel Hydraulics. McGraw Hill.
8. Cunge, J.A., 1969. On the subject of a flood propagation computational method. J. Hydraulic. Res. 7 (2), 205–230.