

بازسازی توزیع فاز دو موج تداخل کننده با استفاده از معادله انتقال شدت و روش انتقال فاز در تحیل فریز

درودی، احمد^۱؛ امیری، جواد^۱

^۱ گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان

چکیده

در این مقاله با ترکیب پاسخ معادله انتقال شدت (که یک روش غیر تداخلی است) و روش انتقال فاز در تحلیل فریزهای تداخلی، روشی برای بازسازی توزیع فاز دو موج تداخل کننده از تحلیل میدان تداخلی آنها در سه بعد ارائه می شود. شبیه سازی صورت گرفته با استفاده از نرم افزار متلب تطابق بین جوابهای بازسازی شده و جوابهای مورد انتظار را به خوبی نشان می دهد.

Reconstruction of phase distributions of two interfering wave-fronts using transport of intensity distribution and phase shift fringe analysis

Darudi, Ahmad¹; Amiri, Javad¹

¹ Department of Physics, University of Zanjan, Zanjan

Abstract

In this paper, the transport of intensity distribution and phase shift fringe analyzing method are used to reconstruct two interfering wave fronts from their fringe patterns in three dimensions. A simulation is used to verify the ability of the method that shows good agreement between solutions and simulated wave-fronts.

مقدمه

این کار قبلا در دو بعد توسط یکی از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفته است. [2]

معرفی معادله انتقال شدت

معادله انتقال شدت (۱) از قسمت موهومی معادله انتشار هلمهولتز در فضای آزاد با استفاده از تقریب پیرا محوری قابل استخراج است [4].

$$\nabla_{\perp} \cdot (I \nabla_{\perp} \theta) = -k \frac{\partial I}{\partial z} \quad (1)$$

این معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم بیضوی با استفاده از تابع کمکی $\psi = I \nabla_{\perp} \theta$ به معادله پواسن زیر تبدیل می شود. [5]

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -k \frac{\partial I}{\partial z} \quad (2)$$

بازسازی دو موج تداخل کننده از تحلیل میدان تداخلی در سه بعد اخیرا مورد توجه قرار گرفته است [1,2]. این روش در بهبود خطای جبهه موج مرجع در روشهای تداخل سنجی مرسوم می تواند استفاده شود.

در روشهای متداول تداخل سنجی (مانند تداخل سنج ماکلسون، تویمن گرین، ماخ زندر، فیزو و ...) معمولا یک موج مرجع که با کیفیت خوبی تخت است با موج عبوری یا بازتابی از سطح مورد آزمون تداخل داده می شود و از تحلیل فریزها می توان اختلاف فاز بین دو موج را به دست آورد [3]. بنابراین ایجاد موج تخت با کیفیت مناسب الزامی است.

در این مقاله معادله انتقال شدت برای میدان تداخلی در سه بعد مورد بررسی قرار می گیرد.

که در آن شدت به صورت زیر است:

$$I' = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\theta_2 - \theta_1 + \Delta\alpha) \quad (9)$$

با ترکیب معادله‌های ۷ و ۸ می‌توان نوشت:

$$A = \frac{I'\nabla\theta' - I\nabla\theta}{I' - I} \quad (10)$$

برای به دست آوردن گرادیان اختلاف فاز $(\nabla\theta_2 - \nabla\theta_1)$ می‌توان از روشهای مرسوم تحلیل فریز مانند انتقال فاز و یا تحلیل فوریه استفاده کرد، با فرض اینکه شدت باریکه‌ها I_1 و I_2 ثابت نشده است جمله B حاصل قابل استفاده نیست. بنابراین از طریق روش انتقال فاز ابتدا اختلاف فاز دو باریکه $(\theta_2 - \theta_1)$ حساب شده و سپس گرادیان آن محاسبه می‌شود.

با داشتن $\nabla\Delta\phi$ و A به راحتی می‌توان گرادیان فاز موجها را با روابط زیر به دست آورد.

$$\nabla\theta_2 = A + \frac{1}{2}\nabla\Delta\phi \quad \nabla\theta_1 = A - \frac{1}{2}\nabla\Delta\phi \quad (11)$$

آزمون روش بطریق شبیه سازی

در این شبیه سازی ابتدا دو تابع $w1$ و $w2$ با استفاده از جملات زرنیکه مطابق شکل (۱) به عنوان فاز دو باریکه ایجاد شده‌اند برای هر دو باریکه شدت یکنواخت با اندازه متفاوت انتخاب شده و میدان هر باریکه به صورت $E_1 = \sqrt{I_1} \exp(iw_1)$ نوشته می‌شود. در انتخاب شدت باریکه‌ها باید به این موضوع توجه کرد که نمایانی فریزها نباید یک باشد زیرا شدت تداخلی در رابطه (۵) در مخرج کسر ظاهر شده است. با جمع کردن میدان دو باریکه طرح تداخلی دو موج ایجاد می‌شود و شدت مطابق شکل ۲ به عنوان شدت تداخلی در مبدا ثبت می‌شود حال با استفاده از انتگرال فرنل کیرشهف دو میدان به اندازه $\pm dz$ به جلو و عقب انتشار داده شده و دوباره شدت طرح تداخلی ثبت می‌شود. حال با استفاده از معادله انتقال شدت می‌توان فاز تداخلی θ را بازسازی کنیم. برای حل معادله انتقال شدت از روش تبدیل فوریه [6] استفاده شده است.

با قرار دادن داده‌های شکل (۳) در معادله (۲) و حل معادله، تابع فاز حاصل از انتقال شدت به صورت شکل (۴) به دست می‌آید، سپس گرادیان فاز تداخلی بازسازی شده با گرادیان فاز تداخلی دقیق که از انتشار حاصل شده (ستون شماره ۲۰۰) در شکل (۵) نمایش داده شده است.

در صورتی که جمله $-k \frac{\partial I}{\partial z}$ با استفاده از ثبت شدت در دو صفحه با فاصله dz ایجاد شود با دانستن شرایط مرزی، تابع ψ از حل معادله به دست می‌آید. با استفاده مجدد از حل معادله پواسون نهایتاً تابع فاز θ به دست می‌آید. استفاده از معادله انتقال شدت برای بازسازی فاز یک روش غیر تداخل سنجی است و دارای کاربردهای فراوانی می‌باشد.

معادله انتقال شدت برای میدان تداخلی

شدت تداخلی دو موج به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود و فاز موج تداخلی نیز از رابطه (۴) بدست می‌آید [2].

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (3)$$

$$\tan(\theta) = \frac{E_1 \sin(\theta_1) + E_2 \sin(\theta_2)}{E_1 \cos(\theta_1) + E_2 \cos(\theta_2)} \quad (4)$$

از معادله (۴) گرادیان فاز تداخلی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\nabla\theta = \frac{1}{2}(\nabla\theta_1 + \nabla\theta_2) + \frac{I_2 - I_1}{2I}(\nabla\theta_2 - \nabla\theta_1) + \quad (5)$$

$$\frac{1}{2I} \sin(\theta_1 - \theta_2) \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \left(\frac{I_2}{I_1} \nabla I_1 - \nabla I_2 \right)$$

با فرض:

$$A = \frac{1}{2}(\nabla\theta_1 + \nabla\theta_2)$$

$$B = \frac{I_2 - I_1}{2}(\nabla\theta_2 - \nabla\theta_1) \quad (6)$$

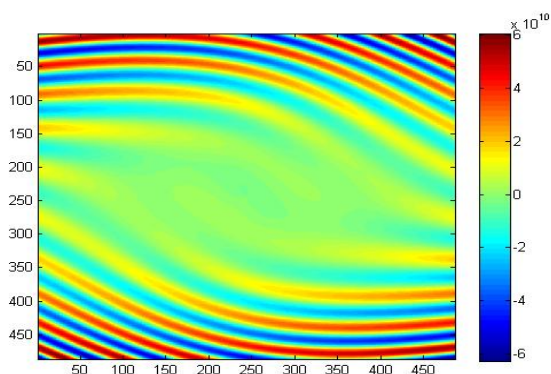
$$C = \frac{1}{2I} \sin(\theta_1 - \theta_2) \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \left(\frac{I_2}{I_1} \nabla I_1 - \nabla I_2 \right)$$

اگر شدت دو موج را تقریباً یکنواخت فرض کنیم که در کاربردهای تداخل سنجی با دقت خوبی درست است در معادله ۵ جمله سوم (C) حذف خواهد شد و با فرضهای بالا معادله به فرم زیر در می‌آید:

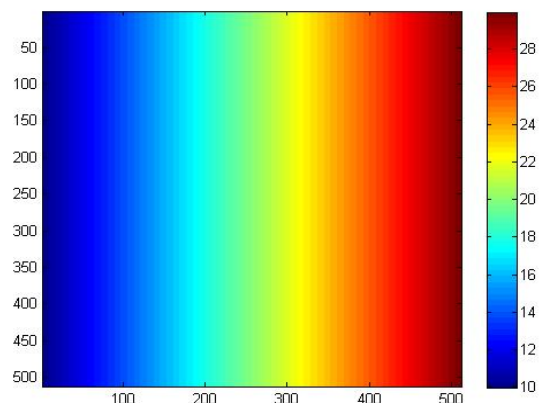
$$\nabla\theta = A + \frac{B}{I} \quad (7)$$

گرادیان فاز که با رابطه ۵ تعریف می‌شود اصولاً از حل معادله انتقال شدت قابل حصول است. با اعمال یک تغییر فاز ثابت با مقدار دلخواه $\Delta\alpha$ بین دو موج معادله ۷ به فرم زیر خواهد شد.

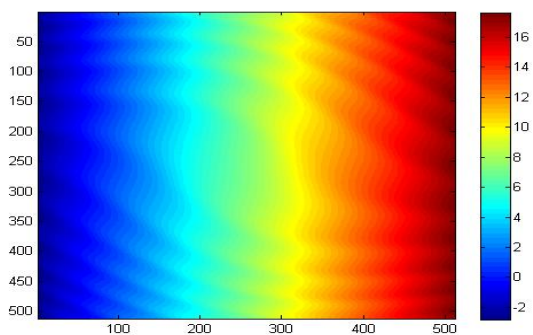
$$\nabla\theta' = A + \frac{B}{I'} \quad (8)$$



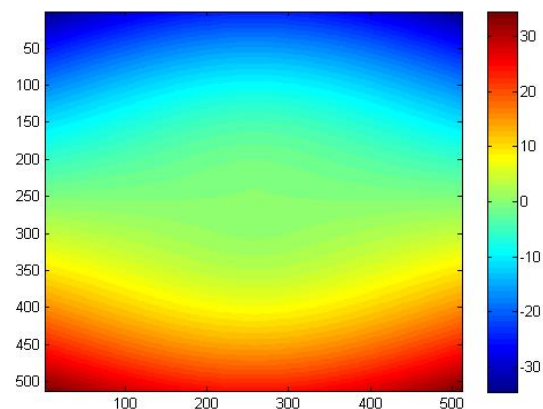
شکل ۳: تابع $-k \frac{\partial I}{\partial z}$ که اصطلاحاً به تابع سیگنال معروف است.



W1

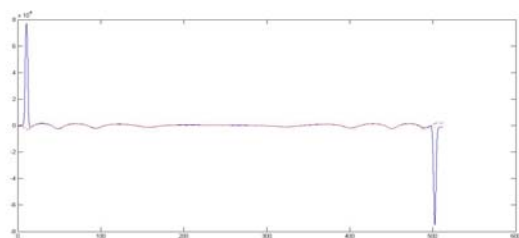


شکل ۴: فاز کل بازسازی شده با معادله انتقال شدت محور افقی و عمودی شماره پیکسلها و رنگ بر حسب رادیان است.



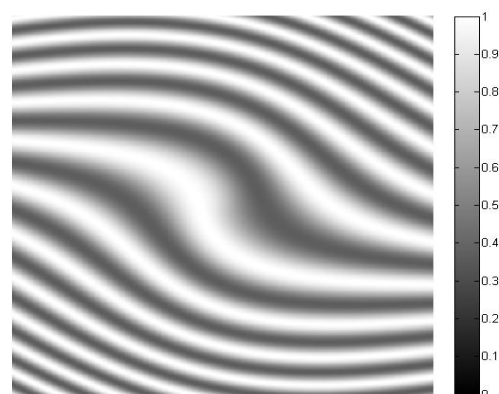
W2

شکل ۱- فاز مربوط به دو باریکه. محورهای افقی و عمودی شماره پیکسلهاست.



شکل ۵: خط ۲۰۰ از گرادیان فاز کل در راستای y . محور افقی شماره پیکسل و محور عمودی اندازه گرادیان فاز است.

در شکل‌های ۶ و ۷ به علت اختلاف زیاد در لبه‌ها از هر طرف به اندازه ۱۵ پیکسل نمایش داده نشده است.

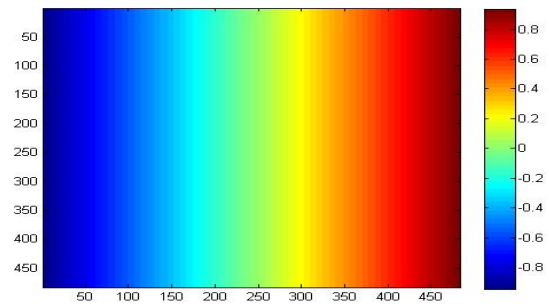


شکل ۲- طرح تداخلی در مبدا. محور افقی و عمودی شماره پیکسلهاست.

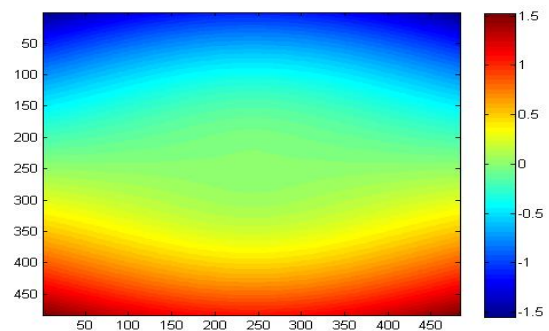
باتوجه به حساسیت این روش به اندازه‌گیری شدت انتظار می‌رود که نوفه باعث کاهش دقت گردد.

مرجع‌ها

- [1] Akhlaghi, E., Darudi, A., Tavassoly, T.; "Reconstructing the phase distribution of two interfering wavefronts by analysis of their nonlocalized fringes with an iterative methods", Optics Express, No.17(2011) 15976-15981.
- [2] درودی، احمد، یزدانی، رقیه؛ «بازسازی توزیع فاز دو موج با حل معادله انتقال شدت در دو بعد»؛ کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران، ۱۳۸۷.
- [3] Malacara, D., "Optical shop testing", 3th edition, A John wiley and sons Inc. publication, 2007.
- [4] Gureyev, T.E., Nugent, K.A.; "Phase retrieval with the transport of intensity equation-Orthogonal series solution for non-uniform illumination", J. Opt. Soc. Am. A, No. 13 (1996) 1670-1682.
- [5] Paganin, D., Nugent, K.A.; "Noninterferometric phase imaging with partially coherent light", Phys. Rev. Lett., No.80 (1998) 2586-2589.
- [6] Volkov, V. V., Zhu, Y., De Greaif, M.; "A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation", Micron, No. 33(2002)411-416.



شکل ۶: اختلاف بین فاز بازسازی شده و فاز اصلی موج ۱



شکل ۷: اختلاف بین فاز بازسازی شده و فاز اصلی موج ۲

نتیجه گیری

از شکل ۶ و ۷ به وضوح قابل مشاهده است که بازسازی دو جبهه موج تداخلی با دقت مناسبی امکان‌پذیر است انحراف معیار برای جبهه موج اول برابر با ۰,۵۷۷ رادیان و برای جبهه موج دوم برابر ۰,۶۸۳ رادیان می‌باشد و این بدین معنی است که حتی اگر جبهه موج مرجع تخت نیز نباشد می‌توان از آن بدون هیچ مشکلی استفاده کرد و حتی میزان انحراف آن از تخت بودن را به دست آورد. در مجموع سرعت این روش بالا است، کافی است در ۳ محل شدت تداخلی ثبت شود و سپس با استفاده از روش جایجایی فاز اختلاف فاز دو باریکه را به دست آورد. محدودیتی که وجود دارد در نمایانی فریزها میباشد که نباید یک شود چون شدت تداخلی در مخرج ظاهر می‌شود و این باعث خطا می‌شود در نمودارهای به دست آمده نیز خطا در نواحی که شدت تداخلی مینیمم می‌شود افزایش می‌یابد. در لبه‌ها به علت اثرات پراش بازسازی امکان‌پذیر نمی‌باشد و در هر تصویر حدود ۱۵ پیکسل از اطلاعات لبه خطای زیادی دارد که در محاسبه انحراف معیار نیز وارد نشده است. اثرات نوفه هنوز مورد بررسی قرار نگرفته است و