

# SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛  
شبکه های توجه گرافی  
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از  
وب آو ساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی

## هندسه ی ترمودینامیک در نمایش بار الکتریکی ( $Q$ متریک) و ارتباط میان نقاط تکینگی خمش و نقاط گذار فاز

حسینی منصوری ، سید علی؛ میرزا، بهروز

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان ، اصفهان ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱

### چکیده

در این مقاله متریک جدیدی از هندسه ترمودینامیک را در نمایش بار الکتریکی (  $Q$  متریک) معرفی می‌کنیم. به علاوه، ما می‌توانیم با استفاده تبدیلات کانفرمال مناسب از متریک راپنیر و وینهلد،  $Q$  متریک را بسازیم. از سوی دیگر خمش محاسبه شده از  $Q$  متریک منجر به یک رابطه سازگاری میان نقاط گذار و نقاط تکینگی خمش می‌شود.

### Thermodynamic geometry in representation of the electric charge (Q-metric) and the relationship between singularities of the scalar curvature and phase transitions

Hosseini Mansoori, Seyed Ali; Mirza, Behrouz

Department of Physics, Isfahan University of Technology, Isfahan, 84156-83111, Iran.

### Abstract

*In this article, we introduce a new metric of the thermodynamics geometry in the representation of the electric charge (Q-metric). In addition, we can make Q-metric by using suitable conformal transformation from Ruppenier and Weinhold metric. In the other hand, the scalar curvature which is computed by Q-metric, leads to a compatible relation between phase transition points and singularities of the scalar curvature.*

### PACS No 04

منیفلد است. همچنین هر چه این نقاط تعادلی به هم نزدیک باشند احتمال افت و خیز بین آنها بیشتر است. پیش از این دانشمندانی به نام های راپنیر و وینهلد به بررسی هندسه ترمودینامیکی براساس نظریه افت خیز پرداخته اند. وینهلد با ساخت متریک در نمایش جرم و نیز راپنیر با ساخت متریکی در نمایش آنتروپی توانستند انحناى فضای ترمودینامیک را محاسبه کنند [۲]. اما جالب این جاست که می‌توان این دو المان فاصله را در این دو نمایش گوناگون با یک ضریب کانفرمال  $(\frac{1}{T})$  به یکدیگر تبدیل کرد. در این مقاله ما به معرفی متریک جدیدی از هندسه ترمودینامیک در نمایش بار الکتریکی می‌پردازیم. همچنین می

### مقدمه

به طور کلی پایه هندسه ترمودینامیک<sup>۱</sup> براساس نظریه افت و خیز<sup>۲</sup> [۱] است. در این نظریه هر سیستم تعادلی را می‌توان با یک منیفلد تعادلی نشان داد که هر نقطه روی این منیفلد یک حالت تعادلی را نشان می‌دهد. هر نقطه تعادلی با افت و خیزی که حول مقدار تعادلی اش انجام می‌دهد می‌تواند به نقطه تعادلی دیگر روی این منیفلد گذار کند. لذا می‌توان گفت المان فاصله میان نقاط تعادلی متناسب با احتمال افت خیز بین این نقاط روی

<sup>1</sup> Thermodynamic geometry

<sup>2</sup> Fluctuation theory

همچنین معادله اول ترمودینامیک را می‌توان در نمایش بار نیز به صورت زیر نوشت.

$$dQ = \frac{1}{\Phi} dM - \frac{T}{\Phi} dS \quad (5.1)$$

حال به سادگی می‌توان متریک جدیدی از هندسه ترمودینامیک را در نمایش بار تعریف کرد.

$$ds_Q^2 = \frac{\partial^2 Q}{\partial X^i \partial X^j} dX^i dX^j \quad (6.1)$$

در رابطه بالا  $X^i$  ها جرم و آنتروپی در نظر گرفته می‌شوند. سوالی که ممکن است مطرح شود این است که آیا متریک ها در نمایش های مختلف به را می‌توان با یک تبدیل کانفرمال به هم مربوط ساخت؟ همان طور که می‌دانیم متریک های راپنیر و

وینهلد با تبدیل کانفرمال  $\frac{1}{T}$  به هم مربوط می‌شوند [۵].

$$ds_R^2(S) = -\frac{1}{T} ds_W^2(M) \quad (7.1)$$

به منظور یافتن ضرایب کانفرمال  $Q$  متریک با متریک وینهلد از رابطه (۳.۱) شروع می‌کنیم. به علت اینکه  $T$  و  $\Phi$  تابع های صریحی از  $Q$  و  $S$  هستند بنابراین متریک وینهلد را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$ds_W^2(M) = dT dS - d\Phi dQ \quad (8.1)$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه (۵.۱) می‌توان المان طول مربوط به  $Q$  متریک را به صورت معاله دیفرانسیلی زیر نوشت.

$$\begin{aligned} ds_Q^2 &= d\left(\frac{1}{\Phi}\right) dM - d\left(\frac{T}{\Phi}\right) dS = \\ &= \frac{-1}{\Phi^2} d\Phi dM + \frac{1}{\Phi^2} T d\Phi dS - \frac{1}{\Phi} dT dS \quad (9.1) \\ &= -\frac{1}{\Phi} ds^2(M) \end{aligned}$$

از سوی دیگر تبدیل کانفرمال میان  $Q$  متریک و متریک راپنیر به صورت

$$\begin{aligned} ds^2(Q) &= d\left(\frac{1}{\Phi}\right) dM - d\left(\frac{T}{\Phi}\right) dS \\ &= \frac{-1}{\Phi^2} d\Phi dM + \frac{1}{\Phi^2} T d\Phi dS - \frac{1}{\Phi} dT dS \quad (10.1) \\ &= \frac{T}{\Phi} ds^2(S) \end{aligned}$$

توان از متریک در این نمایش با تبدیلات کانفرمال<sup>۳</sup> مناسب به متریک های دیگر نمایش ها از جمله انرژی و آنتروپی رسید. علاوه بر این می‌توان نشان داد که نقاط تکینگی تابع خمش مربوط به  $Q$  متریک، دقیقا در نقاط گذار مربوط به ظرفیت گرمایی  $C_T$  اتفاق می‌افتد. بنابراین به طور کلی می‌توان گفت تکینگی های مربوط به خمش های متریک های مختلف، نقاط گذار ظرفیت های گرمایی مختلف را به ما می‌دهند. در بخش اول به معرفی متریک در نمایش بار و تبدیلات کانفرمال می‌پردازیم. در بخش دوم رابطه تطابقی میان نقاط گذار و نقاط تکینگی را بررسی می‌کنیم. در بخش پایانی برای روشن شدن بحث، سیاهچاله ریسنوردستروم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

### ۱. نمایش های گوناگون هندسه ترمودینامیک

از مهمترین متریک هایی که منجر به ساخت هندسه ترمودینامیک می‌شوند می‌توان به متریک راپنیر و وینهلد اشاره کرد [۳، ۴]. متریک راپنیر با دو بار مشتق گیری از آنتروپی سیستم نسبت به کمیت های فزونبر یا پارامترهای ترمودینامیکی سیستم از جمله انرژی (جرم) به دست می‌آید.

$$ds_R^2 = \frac{\partial^2 S}{\partial X^i \partial X^j} dX^i dX^j \quad (1.1)$$

از طرف دیگر متریک وینهلد از دویار مشتق گیری از انرژی (جرم) نسبت به کمیت های ترمودینامیکی سیستم از قبیل آنتروپی و کمیت های فزونبر سیستم به دست می‌آید.

$$ds_W^2 = \frac{\partial^2 M}{\partial X^i \partial X^j} dX^i dX^j \quad (2.1)$$

قانون اول ترمودینامیک در مورد سیاهچاله باردار (سیاهچاله ریسنوردستروم) در نمایش انرژی به صورت

$$dM = T dS + \Phi dQ \quad (3.1)$$

داده می‌شود که به ترتیب زوج های  $(T, \Phi)$  کمیت های نافزونبر سیستم و  $(S, Q)$  کمیت های فزونبر هستند. از طرفی دیگر می‌توان این معادله را در نمایش آنتروپی نیز باز نویسی کرد.

$$dS = \frac{1}{T} dM - \frac{\Phi}{T} dQ \quad (4.1)$$

<sup>3</sup> Conformal transformation

با خمش به دست آمده از متریک

$$\bar{g}_{ij} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X^i \partial X^j} \right); X^i = (S, \Phi) \quad (5.2)$$

تطابق کامل دارد. اما در مورد ظرفیت گرمایی در دمای ثابت

$$C_T \equiv \left( \frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_T = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial}{\partial \Phi} (M - TS) \right)_T \quad (6.2)$$

چه می توان گفت؟ به عبارت دیگر واگرایی های کدام متریک، نقاط گذار را به ما می دهند. می توان نشان داد که نقاط تکینگی به

دست آمده از  $Q$  متریک

$$g_{ij}^Q = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial M}{\partial X^i \partial X^j} \right); X^i = (S, Q) \quad (7.2)$$

با نقاط گذار  $C_T$  یکسان هستند. از سوی دیگر در مورد ظرفیت

گرمایی در آنتروپی ثابت [۶] با تعریف تابع انرژی آزاد همهلتر به

صورت زیر

$$\bar{\bar{M}}(Q, T) = M(S(T, Q), Q) - TS(Q, T) \quad (8.2)$$

می توان نشان داد نقاط تکینگی حاصل از متریک

$$\bar{\bar{g}}_{ij} = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \bar{\bar{M}}}{\partial X^i \partial X^j} \right); X^i = (Q, T) \quad (9.2)$$

دقیقا در نقاط گذار ظرفیت گرمایی در آنتروپی ثابت

$$C_S \equiv \left( \frac{\partial Q}{\partial \Phi} \right)_S = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial M}{\partial \Phi} \right)_S \quad (10.2)$$

اتفاق می افتد. در شکل ۱.۲ رابطه میان نقاط گذار و خمش اسکالر

به صورت روشنی نمایش داده شده است.

$$g^R(S, Q) \iff R^R(S, Q) \iff C_\Phi(S, Q)$$

$$\bar{g}(S, \Phi) \iff \bar{R}(S, \Phi) \iff C_Q(S, \Phi)$$

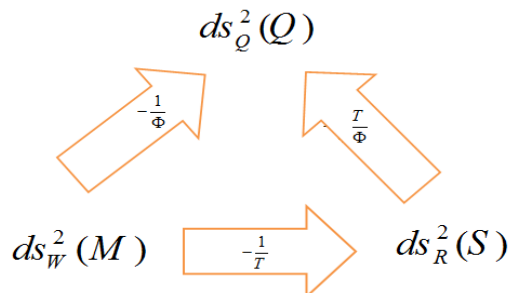
$$g^Q(S, Q) \iff R^Q(S, Q) \iff C_T(S, Q)$$

$$\bar{\bar{g}}(Q, T) \iff \bar{\bar{R}}(Q, T) \iff C_S(Q, T)$$

شکل ۱.۲: ارتباط میان نقاط تکینگی تابع های خمش و نقاط گذار فاز

در اثبات رابطه بالا همچنین از رابطه (۴.۱) استفاده شده است.

در شکل ۱.۱ این تبدیلات کانفرمال میان متریک های گوناگون به صورت روشنی نمایش داده شده است.



شکل ۱.۱: نمایشی از ضرایب کانفرمال بین متریک های مختلف.

## ۲. تطابق میان نقاط گذار و نقاط تکینگی خمش

### در نمایش های گوناگون متریک

گذار فاز در اکثر سیاهچاله ها از قبیل سیاهچاله های باردار و چرخان از نوع گذار مرتبه دوم است. از جمله مهمترین ظرفیت های گرمایی در مورد سیاهچاله های باردار، می توان به ظرفیت گرمایی در بار و در پتانسیل الکتریکی ثابت و همچنین به ظرفیت گرمایی در دما و آنتروپی ثابت اشاره کرد. از طرف دیگر می توان نشان داد که نقاط گذار مربوط به این ظرفیت های گرمایی با نقاط تکینگی تابع های خمش اسکالر به دست آمده از متریک در نمایش های مختلف تطابق دارد [۸،۷]. با در نظر گرفتن تابع انرژی می توان نشان داد که نقاط گذار ظرفیت گرمایی در پتانسیل ثابت

$$C_\Phi = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\Phi = \left( \frac{\partial}{\partial T} (M - Q\Phi) \right)_\Phi \quad (1.2)$$

با نقاط تکینگی به دست آمده از متریک راپنیر

$$g_{ij}^R = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial X^i \partial X^j} \right); X^i = (S, Q) \quad (2.2)$$

منطبق است. همچنین با در نظر گرفتن تابع آنتالپی

$$\bar{\bar{M}}(S, \Phi) = M(S, Q(S, \Phi)) - \Phi Q(S, \Phi) \quad (3.2)$$

می توان نشان داد که نقاط گذار ظرفیت گرمایی در بار ثابت

$$C_Q = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_Q = \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_Q \quad (4.2)$$

$$R^Q(S, Q) = \frac{S(-S + 3Q^2)}{(-S + Q^2)^2 Q} \quad (10.3)$$

این خمش در نقطه  $S = Q^2$  دارای تکینگی است در حالی که  $C_T$  نیز دقیقا در این نقطه گذار دارد. بنابراین نقاط گذار در  $C_T$  دقیقا در نقاط تکینگی  $R^Q(S, Q)$  رخ می دهند. به علاوه اگر  $C_Q$  را نیز به صورت تابع صریحی از  $S$  و  $Q$  بنویسیم به رابطه جالبی میان ظرفیت های گرمایی می رسیم.

$$C_Q C_T (C_S C_\Phi)^{-1} = 1 \quad (11.3)$$

### نتیجه گیری

علاوه بر متریک راپنیر و وینهلد که به ترتیب متریک های در نمایش آنتروپی و انرژی هستند، می توان یک متریک جدید برای هندسه ترمودینامیکی معرفی کرد که در نمایش بار الکتریکی نوشته شده است ( $Q$  متریک). همچنین نقاط تکینگی خمش به دست آمده از این متریک دقیقا در نقاط گذار  $C_T$  اتفاق می افتد.

### مرجع ها

- [1] G. Ruppeiner, Phys. Rev. A 20 (1979) 1608;
- [2] Narit Pidokrajt; "Black Hole Thermodynamics"; Stockholm University Department of Physics 2003
- [3] F. Weinhold, J. Chem. Phys. 63 (1975) 2479.
- [4] G. Ruppeiner, Phys. Rev. D 75 (2007) 024037
- [5] Haishan Liu, H. Lu, Mingxing Luo and Kai-Nan Shao, JHEP 1012: 054 (2010); [arXiv:1008.4482 [hep-th]].
- [6] Shao-Wen Wei, Yu-Xiao Liu, Yong-Qiang Wang, Heng Guo, Europhys.Lett. 99 (2012) 20004.

[۷] حسینی منصوری، سید علی؛ میرزا، بهروز؛ « ترمودینامیک هندسی سیاهچاله فانتوم ریسز نوردسترم در فضای پاد دوسته »؛ کنفرانس فیزیک ایران، سال ۹۱، شماره ۱۵۳، تابستان ۱۳۹۱.

[۸] حسینی منصوری، سید علی؛ میرزا، بهروز؛ « تطابق نقاط گذار فاز مرتبه دوم و تکینگی های خمش سیاهچاله کر در  $n-1$  بعد با روش متغیرهای مزدوج »؛ همایش ملی گرانث و کیهان شناسی، سال ۹۱، شماره ۲۷، بهمن ۱۳۹۱.

### ۳. ارتباط میان نقاط گذار ظرفیت گرمایی و تابع

#### خمش برای سیاهچاله ریسز نوردستروم

جرم سیاهچاله ریسز نوردستروم بر حسب آنتروپی و بار الکتریکی با معادله زیر داده می شود [۲].

$$M = \frac{\sqrt{S}}{2} \left( 1 + \frac{Q^2}{S} \right) \quad (1.3)$$

با در نظر گرفتن قانون اول ترمودینامیک معادله (۳.۱)، کمیت های نافزونبر سیستم با روابط زیر به دست می آیند.

$$T(S, Q) = \frac{S - Q^2}{4S^{3/2}} \quad (2.3)$$

$$\Phi(S, Q) = Q \sqrt{\frac{1}{S}} \quad (3.3)$$

همچنین ظرفیت های گرمایی با روابط زیر داده می شوند.

$$C_Q(S, \Phi) = -2 \frac{S(\Phi^2 - 1)}{-1 + 3\Phi^2} \quad (4.3)$$

$$C_\Phi(S, Q) = -2S \quad (5.3)$$

$$C_T(S, Q) = \frac{(-S + 3Q^2)\sqrt{S}}{-S + Q^2} \quad (6.3)$$

$$C_S(S, Q) = \sqrt{S} \quad (7.3)$$

خمش به دست آمده از تابع

$$\bar{M}(S, \Phi) = \sqrt{\frac{S}{4}}(\Phi^2 - 1) \quad (8.3)$$

به صورت

$$\bar{R}(S, \Phi) = -\frac{-1 + \Phi^2}{(-1 + 3\Phi^2)^2 S} \quad (9.3)$$

محاسبه می شود همان طور که پیداست نقاط گذار در  $C_Q$  منطبق بر نقاط واگرایی  $\bar{R}(S, \Phi)$  است. همچنین  $C_\Phi$  هیچ نقطه گذاری ندارد بنابراین انتظار، فضای بدون خمش را داریم که متریک راپنیر درستی این ادعا را تایید می کند ( $R^R(S, Q) = 0$ ). در مورد  $C_S$  نیز به نتیجه مشابه می رسیم.

خمش به دست آمده از  $Q$  متریک نیز با رابطه زیر داده می شود.

# SID



سرویس های  
ویژه



سرویس ترجمه  
تخصصی



کارگاه های  
آموزشی



بلاگ  
مرکز اطلاعات علمی



عضویت در  
خبرنامه



فیلم های  
آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛  
شبکه های توجه گرافی  
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از  
وب آوساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی