پایداری نسبی در سیستمهای کنترل دیجیتال

محمّد مهدی بهرامیان
گروه برق، واحد ماهشهر ، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران
Mohammadmahdi1353@gmail.com

چکـــیده:
پایداری یکی از مهمترین (و شاید مهمترین) ویژگی های یک سیستم کنترل محسوب می شود. عموماً سیستمی که پایدار نباشد کاربردی هم نخواهد داشت. جهت تست پایداری یک سیستم کنترل معیارهای گوناگونی وجود دارد که مشهورترین آنها در سیستمهای خطی و نامتغیر با زمان پیوسته جدول روث و در سیستمهای خطی و نامتغیر با زمان گسسته جدول جوری می باشد. در هر دوی این روشها، وجود معادله مشخصه سیستم ضروریست. جداول روث و جوری، پایداری مطلق یک سیستم را معین می نمایند اما در برابر این سؤالات که اگر یک سیستم پایدار است تا چه اندازه به مرز ناپایداری نزدیک است و یا اینکه اگر یک سیستم ناپایدار است تا چه اندازه به مرز پایداری نزدیک است پاسخی ندارند. در مورد سیستمهای پیوسته می توان با جابجایی افقی محور موهومی اطلاعاتی در مورد پایداری نسبی سیستم بدست آورد. در این مقاله با معرفی یک تبدیل ساده ومؤثر، ایده پایداری نسبی به سیستمهای دیجیتال نیز گسترش می یابد.

کلمات کلیدی: پایداری نسبی، سیستمهای پایداری و ناپایدار، کنترل دیجیتال، معیار پایداری، جدول روث و جوری.

مقدمه:

پایداری یکی از مهمترین (و شاید مهمترین) ویژگیهای یک سیستم کنترل محسوب می شود. یک سیستم کنترل ناپایدار عموماً کاربردی هم ندارد. هنگام مطالعه پایداری سیستم های کنترل، عموماً دو نوع پایداری در نظر می گیرند. یکی پایداری داخلی که ارتباطی با ورودی سیستم نداشته و تنها از طبیعت سیستم و انـرژی داخـلی آن (شرایط اولیه) تأثیر می پذیرد. دیگری پایداری ورودی- خروجی است که این پایداری ارتباطی با شرایط اولیه نداشته و تابع ورودی و طبیعت سیستم است. می توان ثابت کرد که در سیستم های خطی و نامتغیر با زمان پایداری داخلی، پایداری ورودی - خروجی را نتیجه خواهد داد و بالعکس. در دیدگاه کلاسیک سیستم های کنترل، هر سیستم کنترل خطی و نامتغیر با زمان پیوسته، با یک تابع تبدیل که به صورت نسبت تبدیل لاپلاس خرو جی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی سیستم تعریف می شود، بیان می گردد. در تعریف تابع تبدیل، شرایط اولیه سیستم را صفر فرض می کنند. در سیستم های گسسته نیز روش کار یکسان بوده اما به جای تبدیل لاپلاس، تبدیل Z را به کار می برند و آن را تابع تبدیل پالسی می نامند.قطب های یک سیستم LTI که هم در حالت پیوسته و هم در حالت گسسته، تمامی خواص سیستم را مشخص می کنند به صورت ریشه های معادله مشخصه که همان مخرج تابع تبدیل است تعریف می شوند. در سیستم های LTI پیوسته شرط پایداری، منفی بودن بخش حقیقی قطب هاست در حالیکه در سیستم های گسسته، یک سیستم به شرطی پایدار است که قطب های آن درون دایره واحد قرار گیرند. معیار های پایداری روث و جوری به کمک جـداول مخصـوص به خـود، پایـداری مطلق را به ترتیب در سیســتم هـای پیوســته و گسسته معین می نمایند اما در برابر این سؤالات که اگر یک سیستم پایدار است تا چه اندازه به مرز ناپایداری نزدیک می باشد و یا آنکه اگر یک سیستم ناپایدار است تا چه اندازه به مرز پایداری نزدیک است پاسخی ندارند.

پایداری نسبی به کمک جدول روث

به کمک جدول روث می توان پایداری مطلق یک سیستم را تعیین کرد. این معیار به ما می گوید که آیا معادله مشخصه یک سیستم مطلقاً پایدار است یا خیر. می توان به کمک تبدیلی که محور موهومی را به سمت راست یا چپ منتقل می کند اطلاعاتی بیشتری در مورد محل دقیق تر ریشه های معادله مشخصه بدست آورد. . از آنجا که متغیر S یک متغیر مختلط است این تبدیل در صفحه مختلط به صورت زیر خواهد بود :

$$w = s + a \Rightarrow s = w - a$$

که در آن a یک متغیر حقیقی است. با این تبدیل ساده، مبداء سیستم از نقطهٔ (0,0) به نقطهٔ (a,0) منتقل می شود. جهت بررسی پایداری نسبی دو حالت در نظر می گیریم، یکی سیستمهای پایدار و دیگری سیستمهای ناپایدار.

سیستمهای پایدار

روش بررسی پایداری نسبی در سیستم های پایدار به صورت زیر ساده می باشد:

1) ابتدا در معادله مشخصه سیستم اصلی، متغیر s را به متغیر $w - a$ تبدیل می کنیم.
2) معیار پایداری روث را در مورد معادله مشخصه جدید به کار می بریم.
3) اگر معیار پایداری روث، معادله مشخصه جدید را هم پایدار نشان داد آنگاه قطبهای سیستم اصلی در نیم صفحهٔ زیر قرار دارند:

$$\mathrm{Re}(s) < -a$$

4) اگر معیار پایداری روث، معادله مشخصه جدید را ناپایدار نشان داد آنگاه سیستم اصلی دارای قطب یا قطب هایی در نوار زیر می باشد که تعداد این قطب ها از روی تعداد تغییر علامت ستون اول جدول بدست می آیند:

$$-a < \mathrm{Re}(s) < 0$$

سیستمهای ناپایدار

در سیستمهای ناپایدار روش کار به صورت زیر است:

1) ابتدا در معادله مشخصه سیستم اصلی، متغیر s را به متغیر $w + a$ تبدیل می کنیم.
2) معیار پایداری روث را در مورد معادله مشخصه جدید به کار می بریم.
3) اگر معیار پایداری روث، معادله مشخصه جدید را هم ناپایدار نشان داد آنگاه :
   i. اگر تعداد تغییر علامت های ستون اول جدول جدید با جدول اصلی یکسان بود آنگاه همه قطب های ناپایدار سیستم اصلی در نیم صفحهٔ زیر قرار دارند:

$$\mathrm{Re}(s) > a$$

   ii. اگر تعداد تغییر علامت های ستون اول جدول جدید کمتر از جدول اصلی بود آنگاه سیستم اصلی به اندازه اختلاف این تغییر علامت ها قطب ناپایدار در نوار $0 < \mathrm{Re}(s) < a$ داشته و مابقی قطبهای ناپایدار سیستم در نیم صفحهٔ زیر قرار دارند:

$$\mathrm{Re}(s) > a$$

4) اگر معیار پایداری روث، معادله مشخصه جدید را پایدار نشان داد آنگاه :
   i. قطب های سیستم اصلی در نیم صفحهٔ زیر قرار دارند:

$$\mathrm{Re}(s) < a$$

ii. قطبهای ناپایدار سیستم اصلی، در نوار زیر قرار دارند که تعداد آنها را از روی تغییر علامت های جدول روث سیستم اصلی می توان تعیین نمود:

$$0 < \mathrm{Re}(s) < a$$

چند مثال

سیستم درجه چهارم زیر را در نظر می گیریم:

$$P(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$

الف) ابتدا سیستم پایداری را در نظر می گیریم که قطب های آن در نقاط {-5, -2+3i, -2-3i, -1} قرار داشته باشند. نتایج به ازاء مقادیر مختلف پارامتر a در جدول شماره 1 آورده شده است.

جدول شماره 1 :

	سیستم اصلی	a =6	a =3.3	a =2.1	a =1.3	a =0.4
a_0	1	1	1	1	1	1
a_1	10	-14	-3.2	1.6	4.8	8.4
a_2	42	78	8.34	5.46	13.14	30.96
a_3	98	-190	3.752	16.856	30.712	68.944
a_4	65	125	-41.7979	-28.7419	-10.5339	31.9056
$S^4 = a_0$	1	1	1	1	1	1
$S^3 = a_1$	10	-14	-3.2	1.6	4.8	8.4
$S^2 = p$	32.2	64.4286	9.5125	-5.075	6.7417	22.7524
$S^1 = q$	77.8137	-162.8381	-10.3088	7.7945	38.212	57.1647
$S^0 = a_4$	65	125	-41.7979	-28.7419	-10.5339	31.9056
نتیجه گیری	پایدار	چهار تغییر علامت. **بخش حقیقی هر چهار قطب سیستم اصلی از 6- بزرگتر است**	سه تغییر علامت. بخش حقیقی سه قطب از چهار قطب سیستم اصلی از 3.3- بزرگتر و از صفر کوچکتر است	سه تغییر علامت. بخش حقیقی سه قطب از چهار قطب سیستم اصلی از 2.1- بزرگتر و از صفر کوچکتر است	یک تغییر علامت. بخش حقیقی یک قطب از چهار قطب سیستم اصلی از 1.3- بزرگتر و از صفر کوچکتر است	بدون تغییر علامت. **بخش حقیقی هر چهار قطب سیستم اصلی از 0.4- کوچکتر است**

$$p = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$q = \frac{p a_3 - a_1 a_4}{p}$$

ب) سیستم ناپایداری را در نظر می گیریم که قطب های آن در نقاط {-1, +1.5+3i, +1.5-3i, +4} قرار داشته باشند. نتایج به ازاء مقادیر مختلف پارامتر a در جدول شماره 2 آورده شده است.

جدول شماره 2 :

	سیستم اصلی	a =-2	a =0.7	a =1.6	a =3.8	a =4.2
a_0	1	1	1	1	1	1
a_1	-6	-14	-3.2	0.4	9.2	10.8
a_2	16.25	76.25	6.59	2.81	34.49	46.49
a_3	-21.75	-190.75	-6.448	0.554	61.318	93.582
a_4	-45	127.5	-54.0804	-56.2224	-13.7184	16.9416
$S^4= a_0$	1	1	1	1	1	1
$S^3= a_1$	-6	-14	-3.2	0.4	9.2	10.8
$S^2= p$	12.625	62.625	4.575	1.425	27.825	37.825
$S^1= q$	-43.1361	-162.247	-44.2747	16.3357	65.8538	88.7447
$S^0= a_4$	-45	127.5	-54.0804	-56.2224	-13.7184	16.9416
نتیجه گیری	سه تغییر علامت. سه ریشه ناپایدار	چهار تغییر علامت. **بخش حقیقی هر چهار قطب سیستم اصلی از 2- بزرگتر است**	سه تغییر علامت. بخش حقیقی هر سه قطب ناپایدار سیستم اصلی از 0.7 بزرگتر است	یک تغییر علامت. بخش حقیقی دو قطب از سه قطب ناپایدار سیستم اصلی بین 0 و 1.6 بوده و بخش حقیقی قطب ناپایدار سوم آن بزرگتر از 1.6 است	یک تغییر علامت. بخش حقیقی دو قطب از سه قطب ناپایدار سیستم اصلی بین 0 و 3.8 بوده و بخش حقیقی قطب ناپایدار سوم آن بزرگتر از 3.8 است	بدون تغییر علامت. **بخش حقیقی همه قطب های سیستم اصلی کوچکتر از 4.2 و بخش حقیقی هر سه قطب ناپایدار آن بین 0 و 4.2 است**

$$p = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$q = \frac{p a_3 - a_1 a_4}{p}$$

یک تبدیل ساده و مؤثر جهت تعیین پایداری نسبی در سیستمهای کنترل دیجیتال

معیار پایداری جوری همان نقش معیار پایداری روث را ایفا می نماید اما در سیستمهای دیجیتال. بر خلاف سیستمهای پیوسته، ناحیه پایدار در سیستمهای گسسته یک نیم صفحه نیست بلکه یک دایره است. از اینرو تبدیل مورد نظر می بایست که یک دایره را به دایره دیگری تبدیل نماید. از آنجا که متغیر z یک متغیر مختلط است این تبدیل در صفحه مختلط به صورت زیر خواهد بود :

$$w = az \Rightarrow z = \frac{w}{a}$$

که در آن a یک متغیر حقیقی مثبت است. این تبدیل ساده، دایره واحد را به درون دایره ای به شعاع a می نگارد. در اینجا هم جهت بررسی پایداری نسبی دو حالت در نظر می گیریم، یکی سیستمهای پایدار و دیگری سیستمهای ناپایدار.

سیستمهای پایدار

روش بررسی پایداری نسبی در سیستم های پایدار، به صورت ساده زیر می باشد:

1) ابتدا در معادله مشخصه سیستم اصلی، متغیر z را به متغیر $\frac{w}{a}$ تبدیل می کنیم.

2) معیار پایداری جوری را در مورد معادله مشخصه جدید به کار می بریم.

3) اگر معیار پایداری جوری، معادله مشخصه جدید را هم پایدار نشان داد آنگاه قطبهای سیستم اصلی تماماً درون دایره زیر قرار دارند:

$$|z| < \frac{1}{a}$$

4) اگر معیار پایداری جوری معادله مشخصه جدید را ناپایدار نشان داد آنگاه سیستم اصلی دارای قطب یا قطب هایی در طوق زیر می باشد:

$$\frac{1}{a} < |z| < 1$$

سیستمهای ناپایدار

در سیستمهای ناپایدار روش کار به صورت زیر است:

1) ابتدا در معادله مشخصه سیستم اصلی، متغیر z را به متغیر aw تبدیل می کنیم.

2) معیار پایداری جوری را در مورد معادله مشخصه جدید به کار می بریم.

3) اگر معیار پایداری جوری، معادله مشخصه جدید را هم ناپایدار نشان داد آنگاه سیستم اصلی قطب یا قطب های ناپایداری در ناحیه زیر دارد (البته ممکن است سیستم اصلی در طوق($1 < |z| < a$ هم قطب های ناپایداری داشته باشد):

$$|z| > a$$

4) اگر معیار پایداری جوری معادله مشخصه جدید را پایدار نشان داد آنگاه

i. قطب های سیستم اصلی در دایره زیر قرار دارند:

$$|z| < a$$

ii. قطب های ناپایدار سیستم اصلی در طوق زیر قرار دارند:

$$1 < |z| < a$$

چند مثال

معادله مشخصهٔ درجه چهارم زیر را در نظر می گیریم:

$$P(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$$

شراشرایط پایداری جوری برای معادلهٔ بالا عبارتند از:

1. $|a_4| < |a_0|$
2. $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$
3. $N = 4 =$ زوج $\quad P(-1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$
4. $|b_3| > |b_0|$
   $|c_2| < |c_0|$

که مقادیر b_3 ، b_0 ، c_2 و c_0 از روابط زیر محاسبه می شوند:

$b_3=(a_4 \times a_4)-(a_0 \times a_0);$
$b_2=(a_4 \times a_3)-(a_1 \times a_0);$
$b_1=(a_4 \times a_2)-(a_2 \times a_0);$
$b_0=(a_4 \times a_1)-(a_0 \times a_3);$
$c_2=(b_3 \times b_3)-(b_0 \times b_0);$
$c_0=(b_3 \times b_1)-(b_2 \times b_0);$

الف) ابتدا سیستم پایداری را در نظر می گیریم که قطب های آن در نقاط {-0.4, -0.3+0.4i, -0.3-0.4i, 0.9} قرار داشته باشند. نتایج به ازاء مقادیر مختلف پارامتر a در جدول شماره 3 آورده شده است.

جدول شماره 3 :

	سیستم اصلی	a =(100/91)	a =(100/89)	a =(10/6)	a =(100/45)	a =(100/35)
a_0	1	1	1	1	1 ◄	1 ◄
a_1	0.1	0.1099	0.1124	0.1667	0.2222	0.2857
a_2	-0.41	-0.4951	-0.5176	-1.1389	-2.0247	-3.3469
a_3	-0.341	-0.4525	-0.4837	-1.5787	-3.7421	-7.9534
a_4	-.09	-0.1312	-0.1434	-0.6944	-2.1948 ◄	-5.9975 ◄
P(1)	0.259	0.031	-0.0324 ◄	-2.2454 ◄	-6.7394 ◄	-16.0121 ◄
P(-1)	0.741	0.7163	0.7103	0.5787	0.3004	-0.6768 ◄
$\|b_3\|$	0.9919	0.9828	0.9794	0.5177 ◄	3.8171	34.97
$\|b_0\|$	0.332	0.4381	0.4676	1.463 ◄	3.2544	6.2398
$\|c_2\|$	0.8736	0.7739	0.7406	1.8722 ◄	3.9792	1184
$\|c_0\|$	0.4203	0.5283	0.5596	2.3592 ◄	1.3148	523.1488
نتیجه گیری	هر چهار قطب سیستم اصلی پایدار (درون دایره واحد) هستند	قطب های سیستم اصلی تماماً درون دایره زیر قرار دارند $\|z\| < 0.91$	سیستم اصلی دارای قطب یا قطب هایی در طوق زیر است $0.89 < \|z\| < 1$	سیستم اصلی دارای قطب یا قطب هایی در طوق زیر است $0.6 < \|z\| < 1$	سیستم اصلی دارای قطب یا قطب هایی در طوق زیر است $0.45 < \|z\| < 1$	سیستم اصلی دارای قطب یا قطب هایی در طوق زیر است $0.35 < \|z\| < 1$

*** قطب های سیستم اصلی تماماً درون دایره روبرو قرار دارند** $|z| < 0.91$

*** آن قطب های سیستم که دارای بزرگترین اندازه هستند در طوق روبرو قرار دارند** $0.89 < |z| < 0.91$

ب) سیستم ناپایداری را در نظر می گیریم که قطب های آن در نقاط {-0.9, +1.5+3i, +1.5-3i, +4} قرار داشته باشند.

نتایج به ازاء مقادیر مختلف پارامتر a در جدول شماره 4 آورده شده است.

جدول شاره 4 :

	سیستم اصلی	a = 1.2	a = 2	a = 3.9	a = 4.1
a_0	1 ◄	1 ◄	1 ◄	1	1
a_1	-6.1	-5.0833	-3.05	-1.5641	-1.4878
a_2	16.95	11.7708	4.2375	1.1144	1.0083
a_3	-24.075	-13.9323	-3.0094	-0.4059	-0.3493
a_4	-40.5 ◄	-19.5313 ◄	-2.5313 ◄	-0.1751	-0.1433
P(1)	-52.725 ◄	-25.7760 ◄	-3.3531 ◄	-0.0306◄	0.0279
P(-1)	7.625	12.2552	8.7656	3.9093	3.7021
$\|b_3\|$	1.6393e+03	380.4697	5.4072 ◄	0.9694	0.9795
$\|b_0\|$	271.1250	113.2161	10.7297 ◄	0.6797	0.5626
$\|c_2\|$	2.6136e+06	1.3194e+05	85.8881 ◄	0.4777	0.6429
$\|c_0\|$	1.4191e+06	1.2333e+05	195.3707◄	0.1580	0.264
نتیجه گیری	ناپایدار	سیستم اصلی قطب یا قطب های ناپایداری در ناحیه زیر دارد $\|z\| > 1.2$	سیستم اصلی قطب یا قطب های ناپایداری در ناحیه زیر دارد $\|z\| > 2$	سیستم اصلی قطب یا قطب های ناپایداری در ناحیه زیر دارد $\|z\| > 3.9$	قطب های سیستم اصلی تماماً در دایره زیر قرار دارند $\|z\| < 4.1$

* **قطب های سیستم اصلی تماماً درون دایره روبرو قرار دارند** $|z| < 4.1$

* **آن قطب های سیستم که دارای بزرگترین اندازه هستند در طوق روبرو قرار دارند** $3.9 < |z| < 4.1$

جمع بندی و نتیجه گیری

روش ارائه شده در این مقاله در مورد سیستمهای دیجیتال، در یافتن شعاع دایره ای که همه ریشه های سیستم را در بر می گیرد و همچنین در پیدا کردن آن طوقی که حاوی آن بخش از ریشه های سیستم است که دارای بزرگترین اندازه هستند، یاری دهنده است. اما در خصوص توزیع ریشه های سیستم در طوق های مختلف اطلاعاتی بدست نمی دهد. یافتن شعاع این دایره ها با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله، از طریق جستجو و سعی و خطا حاصل می شود. در مورد سیستمهای پیوسته نیز وضع به همین منوال است. از اینرو پیدا کردن توزیع ریشه ها و یافتن تعداد آنها در طوق های مختلف و همچنین یافتن کران بالای ریشه ها با یک روش تحلیلی می تواند به عنوان یک کار با ارزش مورد توجه، بررسی و کنکاش قرار گیرد.

منابع:

1. سپیدنام قدرت، 1382، سیستم های کنترل مدرن، انتشارات خراسان.
2. جبه دار مارالانی پرویز، خاکی صدیق علی، 1373، سیستم های کنترل دیجیتال، جلد اول، انتشارات دانشگاه تهران.