مدل‌های بهینه‌سازی در شرایط عدم اطمینان: مرور و دسته بندی ادبیات

امیر یوسفلی
استادیار گروه مدیریت صنعتی دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین
yousefli@soc.ikiu.ac.ir

فرنوش فرج پور
کارشناسی ارشد مدیریت فناوری اطلاعات، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران
farajpour911@atu.ac.ir

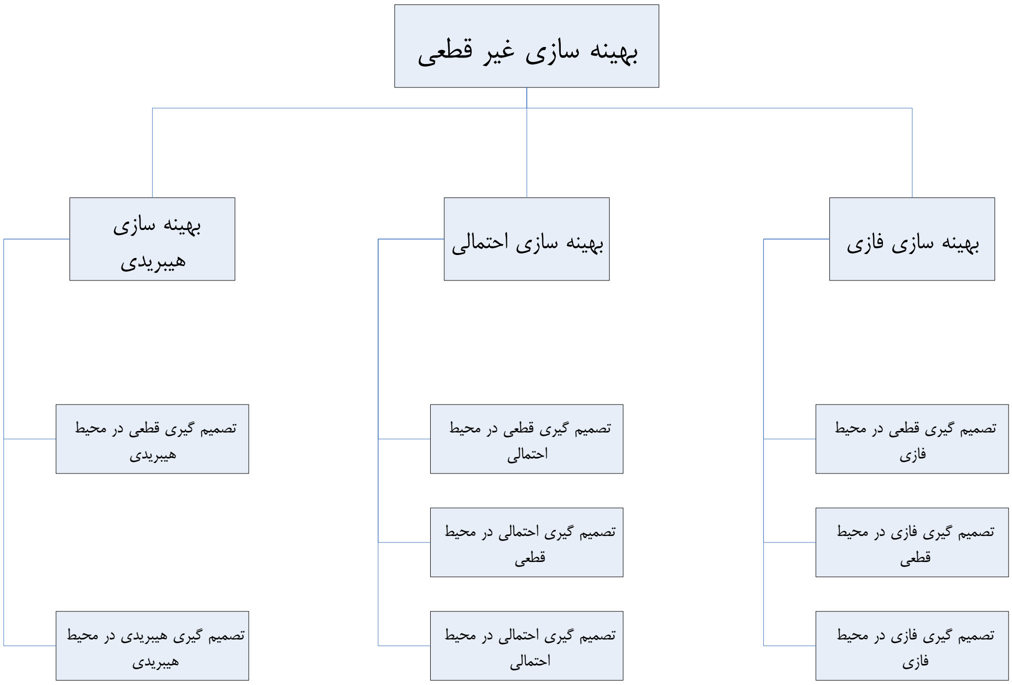
چکیده

با پیچیده‌تر شدن فضای کسب و کار و افزایش عدم قطعیت پارامترهای تاثیر گذار بر سازمان‌ها، ابزارهایی برای تصمیم‌گیری مدیران توسعه داده شده است که آنها را برای مواجهه با شرایط ناپایدار محیطی مجهز می‌نماید. این مدل‌ها به تحلیل‌گران و مدیران کمک می‌نمایند تا شرایط غیر قطعی را فرموله کرده و عدم قطعیت موجود را مدیریت کنند. در این مقاله به بررسی جامع ادبیات موضوع بهینه‌سازی در فضای غیر قطعی می‌پردازیم و آخرین مدل‌ها و ابزارهای توسعه داده شده در این حوزه را بررسی می‌نماییم. مدل-های بهینه‌سازی در فضای فازی، احتمالی و هیبریدی مرور شده و بر اساس ویژگی‌های مشترک طبقه-بندی می‌شوند. مدل‌های ارائه شده در هر یک از محیط‌های غیر قطعی، به سه زیر مجموعه مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در شرایط غیر قطعی، تصمیم‌گیری غیر قطعی در شرایط قطعی و تصمیم‌گیری غیر قطعی در شرایط غیر قطعی تقسیم می‌شوند. در ادامه ادبیات موضوع در هر بخش (فازی، احتمالی و هیبریدی) مورد نقد و بررسی قرار گرفته و مسیرهای قابل توسعه در هر کدام معرفی می‌شوند.

واژگان کلیدی: بهینه سازی فازی، بهینه سازی احتمالی، بهینه سازی هیبریدی، تصمیم گیری غیر قطعی در فضای عدم اطمینان

۱- مقدمه

به‌طور کلی محیط غیر قطعی قابل تقسیم به دو بخش احتمالی و فازی است. فضای تصمیم‌گیری فازی- احتمالی یا فضای هیبریدی، فضایی است که از ادغام این دو فضا به دست آمده است. تا کنون مدل‌های زیادی در این حیطه، یعنی بهینه‌سازی غیر قطعی ارائه شده است. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مقالات (Beale,1995) ، (Bellman,1957) ، (Bellman and Zadeh, 1970) ، (Charnes and Cooper,1959) و (Dantzig,1955) اشاره کرد که در فضاهای احتمالی و فازی ارائه گردیده است. پس از آن نیز طی پنج دهه گذشته، مدل‌های مختلف زیادی در این زمینه توسعه داده شده است که هر یک، از رویکردهای خاصی جهت مدل سازی و حل مسائل استفاده کرده‌اند. بهینه کردن ارزش انتظاری،برنامه ریزی آرمانی، minimax و بهینه سازی بر روی محدودیت‌های منعطف، از جمله این رویکردها بوده است (Sahinidis,2004). از سوی دیگر انواع تصمیم گیری‌هایی که در ادبیات موضوع مورد بررسی قرار گرفته است نیز قابل توجه است. اکثر پژوهش‌هایی که تا کنون در زمینه بهینه سازی غیر قطعی ارائه شده ، منجر به تصمیم گیری قطعی در فضای غیر قطعی گردیده است. بخشی از این پژوهش‌ها در (Liu,1999) و (Zimmerman,1996) ارائه شده است. تصمیم گیری غیر قطعی در فضای قطعی، موضوعی است که برخی محققین مانند (Seifi et al,1999) و (Javid and Seifi,2007) به آن پرداخته‌اند. دسته سوم مدل‌های تصمیم گیری غیر قطعی در فضای غیر قطعی است. (Buckley et al,2001) ، (Tanaka et al,2000) و (Ghazanfari et al,2009) مدل‌هایی را در این زمینه ارائه داده‌اند. شکل (۱) یک دسته بندی کلی از مدل‌های تصمیم‌گیری غیر قطعی را نشان می‌دهد. در این تصویر، تصمیم‌گیری در هر یک از فضاهای احتمالی، فازی به سه بخش تصمیم‌گیری قطعی در محیط غیر قطعی، تصمیم‌گیری غیر قطعی در محیط قطعی و تصمیم‌گیری غیر قطعی در محیط غیر قطعی تقسیم می‌شوند. در فضای هیبریدی، پژوهشی مرتبط با تصمیم‌گیری هیبریدی در محیط قطعی دیده نشد. از این سه دسته، تصمیم‌گیری قطعی در محیط غیر قطعی ادبیاتی غنی تر نسبت به سایر شاخه‌ها دارد.



شکل۱: طبقه بندی مدل‌های بهینه‌سازی غیر قطعی

همچنین برخی پژوهش‌ها برای توسعه مفهوم تصمیم‌گیری غیر قطعی در فضای غیر قطعی انجام شده است که عمده آنها در فضای فازی اتفاق افتاده است. در فضای احتمالی هم مدل‌هایی مانند تصمیم‌گیری بر مبنای سناریو در این دسته قرار می‌گیرند.

در ادامه و در بخش دوم از این مقاله، ابتدا ادبیات تصمیم‌گیری در محیط فازی بررسی می‌شود و در بخش سوم دسته‌بندی مدل‌های بهینه سازی فضای احتمالی ارائه می‌گردد. بهینه سازی در فضای هیبریدی نیز در بخش چهارم بررسی خواهد شد.

۲- بررسی مدل‌های بهینه‌سازی فازی

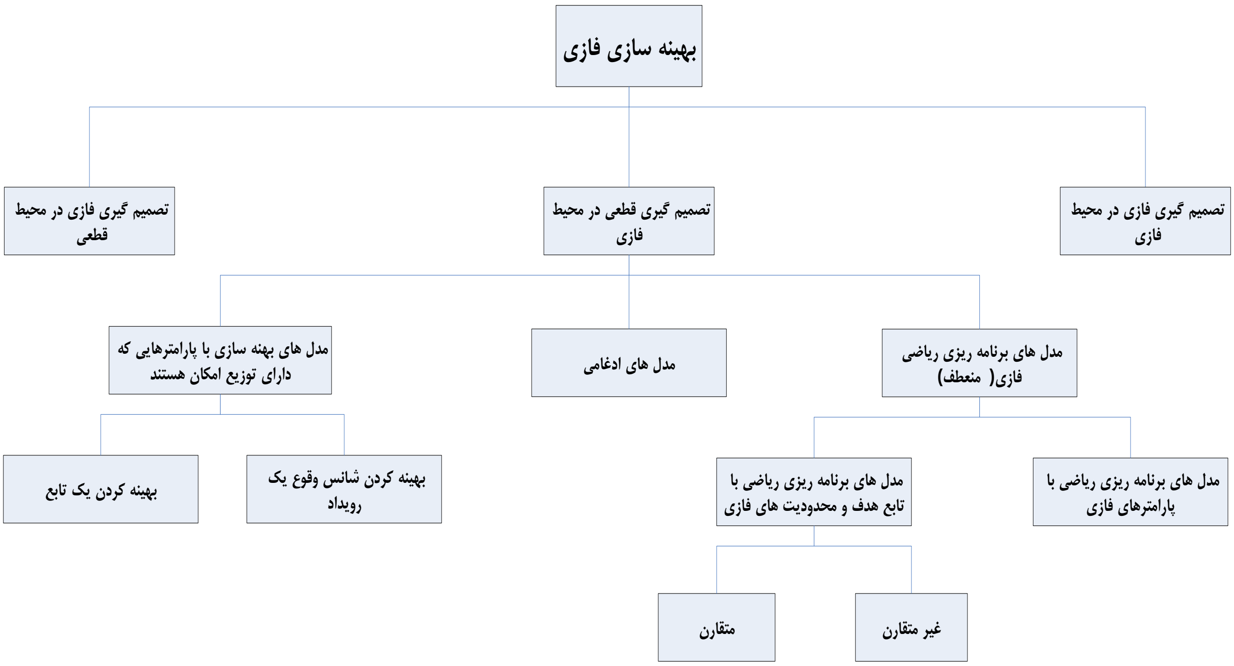
بر اساس طبقه‌بندی مدل‌های بهینه‌سازی غیر قطعی که در شکل (۱) نمایش داده شده است، بهینه‌سازی فازی در حالت کلی به سه بخش مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط فازی، تصمیم‌گیری فازی در محیط قطعی و تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی تقسیم می‌شود. شکل (۲) دسته‌بندی جزئی‌تری از تصمیم‌گیری در محیط فازی را به نمایش می‌گذارد.

۲-۱- مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط فازی

مدل بهینه‌سازی فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\tilde{\max}\ \tilde{C}^T X \\ &S.t \\ &\quad \sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \,\tilde{\leq}\, \tilde{b}_i \quad ; \ i = 1,2,\ldots m \end{aligned} \qquad (۱)$$

همانطور که در مدل (۱) دیده می‌شود، کلیه پارامترها و حتی تابع هدف و محدودیت‌ها می‌توانند به صورت فازی باشند. در این دسته از مدل‌ها متغیرهای تصمیم قطعی هستند. بر اساس تابع تعلق[۱] یا تابع توزیع امکان[۲]، مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط فازی به دو دسته اصلی مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی فازی[۳] (FMP) و برنامه‌ریزی ریاضی امکان[۴] (PMP) تقسیم بندی می‌شوند (Lai and Hwang,1992). همچنین در ادبیات موضوع، برخی از مدل‌ها وجود دارند که به‌صورت ادغامی از مدل‌های برنامه‌ریزی امکان و برنامه‌ریزی فازی هستند که در دسته سوم قرار می‌گیرند.



شکل۲: دسته‌بندی مدل‌های بهینه‌سازی فازی

[1]Membership function
[2]Possibility distribution
[3] Fuzzy mathematical programming
[4] Possibilistic mathematical programming

در مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی فازی، برخی پژوهشگران مانند(Verdegay,1984-1) و (Verdegay,1984-2) و (Clarsson and Korhonen,1986) صرفا پارامترهای تابع هدف و ضرایب تکنولوژیکی و مقادیر سمت راست را فازی در نظر گرفته و بر اساس توابع عضویت پارامترها، روش‌هایی برای حل مسئله ارائه داده‌اند. زمانی که پرامترها قطعی و تابع هدف و محدودیت‌ها فازی باشند، مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی را مدل بهینه سازی منعطف نیز می‌نامند (Zimmerman,1996). این مدلها به دو دسته متقارن و نامتقارن تقسیم بندی می‌شوند. مدل متقارن اولین بار توسط (Zimmerman,1996) توسعه داده شد. از سوی دیگر، (Verdegay,1984-1)، (Werners,1987-1)، (Werners,1987-2) و (Chanas,1983) مدل‌هایی توسعه داده‌اند که در آنها تنها محدودیت‌ها فازی بودند که در دسته مدل‌های نامتقارن قرار می‌گیرند. دسته‌ای دیگر از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی فازی، مدل‌های با توابع هدف فازی هستند که توسط (Carlsson and Fuller,2001) ارائه شده است. آنها در مقاله خود اینگونه بیان می‌کنند که در برخی شرایط بیان و تعیین تابعی که متغییرهای تصمیم را با هدف مسئله مرتبط کند کار سختی است. تحت این حالت استفاده از پایگاه دانشی که شامل یک بلوک از قواعدد اگر-آنگاه فازی[1] است، می‌تواند مفید باشد. در این پایگاه دانش، قسمت مقدم قواعد، متغیرهای تصمیم قرار دارند، که با عبارات زبانی توصیف شده‌اند و در قسمت تالی نیز توصیفات زبانی از تابع هدف قرار می‌گیرد. این مقاله از روش استنتاج Tsukamoto جهت استخراج تابع مرتبط کننده متغیرهای تصمیم و هدف مسئله استفاده می‌کند و تابع هدف به‌دست آمده با توجه به محدودیت‌های مسئله، به روش‌های معمول برنامه‌ریزی ریاضی خطی یا غیر خطی حل می‌گردد. (Carlsson and Fuller, 2000) در مقاله‌ای دیگر، روش فوق را برای حل مسائل چندهدفه بکار گرفته‌اند بطوری‌که در قسمت تالی قواعد،به‌جای یک خروجی، به تعداد توابع هدف خروجی وجود دارد.

دسته دوم مسائل بهینه سازی در فضای فازی، مدل‌های بهینه‌سازی امکانی هستند. در این دسته از مدل‌ها، به جای در نظر گرفتن تابع عضویت برای پارامترهای غیر قطعی، برای هر یک از آنها یک تابع توزیع امکان در نظر گرفته می‌شود. (Ramik and Rimanek,1985) ، (Tanaka et al,1984) و (Dubois,1987) مسئله برنامه‌ریزی امکانی را در حالتی که ضرایب تابع هدف قطعی و پارامترهای محدودیت‌ها دارای توزیع امکان هستند، درنظر گرفتند و با استفاده از رویکردهای مختلف رتبه‌بندی اعداد فازی، روش‌هایی برای حل این مسئله ارائه دادند. (Lai and Hwang, 1992) حالتی را درنظر گرفتند که در آن تنها ضرایب تابع هدف دارای توزیع امکان بود و با تبدیل یک مدل یک هدفه به یک مدل سه هدفه، مسئله را وارد فضای قطعی کرده و با استفاده از روش (Zimmerman,1996) به حل مسئله چند هدفه پرداختند. (Lai and Hwang, 1992) در حالت دوم علاوه بر ضرایب تابع هدف، برای ضرایب محدودیت‌ها نیز توزیع امکان در نظر گرفته و با یک روش رتبه‌بندی خطی محدودیت‌ها را وارد فضای قطعی کرده و مجدداً به حل مسئله سه هدفه پرداخته‌اند. همچنین (Rommelfanger et al, 1989) نیز مسئله بهینه سازی امکانی را تنها در حالتی که پارامترهای تابع هدف دارای توزیع امکان باشند درنظر گرفته و از مفهوم برش- α استفاده کردند و با فرموله کردن یک مسئله تک هدفه و بردن تابع هدف مسئله اصلی در محدودیت‌ها به حل مسئله پرداختند. (Buckley,1988) نیز مدلی جهت تصمیم‌گیری قطعی با درنظر گرفتن توزیع امکان برای تمام پارامترهای تابع هدف، ضرایب تکنولوژیک و سمت راست محدودیت‌ها، ارائه کرد. (Jamison and Lodwick,2001) مسئله PMP را در حالتی که تمام پارامترهای مسئله غیر قطعی هستند مد نظر قرار داده و با روش تابع جریمه، مسئله را بدون محدودیت کرده و با اثبات محدب بودن تابع بدست آمده، از روش کاهش گرادیان برای رسیدن به جواب بهینه استفاده کرده‌اند. (Liu and Liu, 2002) برای پارامترهای مسئله (۱) توزیع اعتبار[2]در نظر گرفتند و مدلی ارائه دادند که حداکثر ارزش انتظاری تابع هدف را با توجه به ارزش انتظاری محدودیت‌ها بدست می‌دهد. همچنی(Liu and Iwamura,1998-1) و (Liu and Iwamura,1998-2) با درنظر گرفتن توزیع امکان برای پارامترهای مسئله، مدل برنامه‌ریزی امکانی را با استفاده از روش برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی (CCP[3])، حل کردند. همچنین (Liu,2008) همین روش را برای زمانی که پارامترها دارای توزیع اعتبار بوده و تابع هدف و محدودیت‌ها قطعی باشند استفاده کرد. (Inuiguchi and Ramik, 2000) دو روش برای مواجهه با مسئله برنامه‌ریزی امکانی ارائه کرده‌اند. در روش اول که با نام Fractile approach ارائه شده است، از روش CCP برای تبدیل مسئله با ضرایبی که دارای

---

[1] Fuzzy if- then rules
[2] Credibility distribution
[3] Chance-constrained programming

توزیع امکان هستند به مسئله قطعی استفاده شده است. آنها از پیمانه‌های امکان و الزام برای سنجش درجه وقوع محدودیت‌ها استفاده کرده‌اند. در روش دوم که با نام Modality approach ارائه شده است، یک آرمان فازی برای تابع هدف درنظر گرفته شده و امکان یا الزام اینکه مقدار تابع هدف بیشتر از سطح آرمانی باشد، حداکثر می‌شود. البته مدل دوم متعلق به دسته مدل-های بهینه سازی درجه وقوع یک رویداد فازی می‌باشد. (Vasant et al, 2008) نیز مسئله برنامه‌ریزی ریاضی امکانی را در حالتی در نظر گرفته‌اند که تنها پارامترهای تابع هدف دارای توزیع امکان از نوع تابع لجستیک بوده و سایر پارامترها قطعی می‌باشند. آنها با استفاده از روش برش- α مسئله را وارد فضای قطعی کرده و برای هر سطح از درجه وقوع پارامترها، یک جواب بهینه برای تابع هدف محاسبه کرده‌اند. آنچه در این قسمت مطرح شد، تنها بخشی از ادبیات بسیار گسترده تصمیم گیری قطعی در محیط غیر قطعی با هدف بهینه کردن یک تابع می‌باشد. منابع (Sahinidis,2004)، (Lai and Hwang, 1992)، (Inuiguchi and Ramik, 2000)، (Rommelfanger, 1996) و (Baykasoglu and Gocken, 2008) نیز مرورهایی بر روی مدل-های تصمیم گیری در محیط فازی کرده‌اند که بخشی از این مدل‌ها به شاخه بهینه‌سازی یک تابع به عنوان هدف مربوط می-شود.

بخش دیگری از مسائل برنامه‌ریزی امکانی مربوط به مدل‌هایی است که در آن شانس وقوع یک رویداد در تابع هدف قرار گرفته و هدف از حل مسئله حداقل کردن یا حداکثر کردن امکان یا اعتبار وقوع آن رویداد می‌باشد. مدل شماره (۲) حالت کلی این دسته از مسائل را نشان می‌دهد. در مدل شماره (۲) ξ بردار پارامترهای فازی مسئله است که دارای توزیع امکان هستند. هدف این مسئله، یافتن بردار تصمیم قطعی x به‌طوری است که امکان وقوع رویداد فازی $h(x,\xi)\le 0$ حداکثر شود.

$$\begin{aligned} &\max \quad Poss\{h(x,\xi)\le 0\} \\ &s.t \\ &\quad g_i(x,\xi)\le 0 \quad ; i=1,2,\dots,m \end{aligned} \tag{۲}$$

(Liu,2000) چارچوبی برای مواجهه با مدل برنامه‌ریزی با ویژگی‌های بالا با نام DCP[1] ارائه داد. وی با ارائه مفاهیمی چون اصل عدم قطعیت، مجموعه پشتیبان یک رویداد، محدودیت‌های فعال، پشتیبان وابسته یک رویداد و رویداد سازگار، به حل مسئله (۲) می‌پردازد. (Liu,2000) از همین رویکرد برای حل مسائل چند هدفه نیز استفاده کرده است. در پژوهشی دیگر (Liu,2008) از توزیع اعتبار برای سنجش درجه وقوع یک رویداد فازی استفاده کرده است و در مدل (۲) به‌جای توزیع امکان، تئوری اعتبار را برای اندازه‌گیری شانس وقوع یک رویداد غیر قطعی در تابع هدف بکار بسته است. (Zhao and Liu, 2005) برای فرموله کردن و حل مسئله نگهداری و تعمیرات از مدل فوق استفاده کردند و در (Zhou and Liu, 2007) کاربردی از مدل DCP در مسئله مکانیابی و تخصیص نمایش داده شده است.

دسته سوم از مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط فازی، مدل‌هایی هستند که هم دارای محدودیت‌ها و تابع هدف فازی بوده و هم پارامترهای آنها دارای توزیع امکان هستند. این دسته از مدل‌ها را مدل‌های ادغامی فازی و یا مدل‌های برنامه‌ریزی استوار فازی (Inuiguchi and Ramik, 2000) می‌نامند. (Negoita et al, 1976) اولین محققینی بودند که چنین مسئله‌ای را فرموله کردند. همچنین (Inuiguchi and Ichihashi, 1990) مدل بهینه سازی با تابع هدف و محدودیت‌های فازی را در حالتی که ضرایب دارای توزیع امکان بودند، توسعه دادند و الگوریتمی ۸ مرحله‌ای برای رسیدن به جواب ارائه کرده‌اند.

۲-۲- مدل‌های تصمیم‌گیری فازی در محیط قطعی

پارامترهای یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی، تعیین کننده فضای تصمیم‌گیری مسئله است. درصورتی که پارامترها به‌صورت قطعی برآورد شوند، به عبارت دیگر تسلط کامل نسبت به فضایی که تصمیم‌گیری در آن رخ می‌دهد وجود داشته باشد، طبیعی به نظر می‌رسد که امکان تصمیم‌گیری قطعی در این فضا وجود دارد. لذا جز در مواردی خاص، از لحاظ مفهومی، تصمیم‌گیری فازی در محیط قطعی چندان معقول به نظر نمی‌رسد. مدل کلی این دسته از مدل‌ها همانند (۳) است.

[1] Dependent- Chance Programming

$$\begin{aligned} &\max \quad f(\tilde{x},\xi) \\ &S.t \\ &\quad g_i(\tilde{x},\xi) \le 0 \quad ; \; i = 1,2,\dots,m \end{aligned} \qquad (۳)$$

با وجود مطالبی که در بالا اشاره شد، مدلی که توسط (Tanaka et al, 1982) برای تعیین ضرایب غیر قطعی در رگرسیون فازی با داده‌های تاریخی قطعی ارائه شد را می‌توان در این دسته از مدل‌های تصمیم‌گیری غیر قطعی دانست. همانطور که پیش‌تر بیان گردید، ما در اینجا خود را محدود به مدل‌های برنامه‌ریزی در محیط پیوسته می‌کنیم و وارد فضای مدل‌های تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه در فضای گسسته (MADM[1]) نخواهیم شد. لیکن در این بخش، اشاره به چند مدل که به‌واقع نشان دهنده کاربردی از تصمیم‌گیری فازی در محیط قطعی است مناسب خواهد بود. این مدل‌ها مربوط به استخراج اوزان معیارها در روش ماتریس مقایسات زوجی است. در این ماتریس ضریبی با نام ضریب ناسازگاری، درجه ثبات تصمیم‌گیرنده در ارائه نظرات خود را تعیین می‌کند. درصورتی که این ضریب بالا باشد، اعتماد چندانی به نظرات تصمیم‌گیرنده نمی‌توان کرد. (Entani and Tanaka, 2007) مدلی جهت استخراج وزن‌های بازه‌ای از ماتریس مقایسات زوجی ارائه داده‌اند که در واقع روشی بود جهت مواجهه با ناسازگاری‌های نظرات تصمیم‌گیرنده. این مدل اگرچه از لحاظ ریاضیاتی به تصمیم‌گیری غیر قطعی در محیط قطعی می‌پردازد، لیکن از لحاظ مفهومی، دارای فضای غیر قطعی است، چراکه به دنبال ارائه وزن‌ها در فضایی با درنظر گرفتن عدم قطعیت‌های موجود در نظرات تصمیم‌گیرنده می‌باشد.

۲-۳- مدل‌های تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی

مدل‌های تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی، با این رویکرد بوجود آمد که عدم قطعیت موجود در پارامترهای یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی، حالات مختلفی را ممکن است برای سیستم مدل شده بوجود آورد که هر یک از این حالات جواب بهینه خاص خود را دارد. درجه وقوع این جواب به عنوان جواب بهینه واقعی سیستم برابر با درجه وقوع حالات متناظر آن یعنی درجه وقوع پارامترهای مسئله است. بدین ترتیب هدف از حل این مسئله، یافتن امکان وقوع هر جواب،به‌عنوان جواب بهینه است به عبارت دیگر، یافتن توزیع غیر قطعی بردار جواب‌های بهینه، منظور این مدل می‌باشد. شکل کلی این دسته از مسائل در (۴) نمایش داده شده است.

$$\begin{aligned} &\max \quad f(\tilde{x},\xi) \\ &S.t \\ &\quad g_i(\tilde{x},\xi) \le 0 \quad ; \; i = 1,2,\dots,m \end{aligned} \qquad (۴)$$

بطوری که ξ بردار پارامترهای غیر قطعی مسئله است که در آن پارامترها دارای توزیع امکان می‌باشند و $\tilde{x}$ بردار متغییرهای غیر قطعی مدل است که پیدا کردن توزیع امکان بهینه آنها هدف مسئله می‌باشد. روش‌های مختلفی برای مواجهه با مدل (۴) ارائه شده است. (Inuiguchi and Sakawa 1994) این مدل را در نظر گرفتند و به‌جای تعیین توزیع امکان جواب بهینه، درجه امکان و الزام بهینه بودن یک جواب شدنی را که در تمام محدودیت‌ها صدق می‌کند را تعیین کردند. آنها در مدل خود تنها ضرایب تابع هدف را غیر قطعی درنظر گرفتند و در دو حالت که پارامترها دارای توزیع امکان مثلثی باشند یا دارای توزیع بازه-ای ، به تعیین درجه امکان و الزام بهینه بودن یک جواب شدنی پرداختند. همچنین (Inuiguchi and Sakawa 1996) از همان رویکرد قبلی،جهت تعیین درجه امکان و الزام بهینه بودن یک جواب شدنی، در یک مسئله چند هدفه، استفاده کردند. در اینجا نیز دو حالت اعداد بازه‌ای و اعداد فازی با توزیع امکان برای ضرایب تابع هدف درنظر گرفته شده بود و سایر ضرایب محدودیت-ها قطعی بودند. (Tanaka et al, 2000) مسئله (۴) را درنظر گرفته و با استفاده از روش رتبه‌بندی SCR[2] مسئله را وارد فضای قطعی کرده و به حل آن با استفاده از روش‌های معمول برنامه‌ریزی ریاضی خطی پرداخته‌اند. Tanaka و همکارانش پیش فرض ساده کننده‌ای را در ابتدای مطالعه خود مطرح کرده‌اند و آن محدود کردن متغیرهای تصمیم به داشتن توزیع امکان مثلثی متقارن، بازه‌ای و نمایی می‌باشد. آنها در حین حل مسئله به دنبال تعیین پارامترهای هر یک از این توزیع‌ها برای متغییرهای

---

[1] Multiple Attribute Decision Making
[2] Strong Comparison Rule

تصمیم بودند.(Guo and Tanaka, 1996) مسئله (۴) را در حالتی درنظر گرفتند که تنها ضرایب سمت راست محدودیت‌ها دارای توزیع امکان است و باقی پارامترها قطعی هستند و تحت این شرایط به دنبال تعیین توزیع امکان بهینه پارامترها بودند. در این پژوهش نیز همانند مدل (Tanaka et al, 2000)، پیش‌فرض مثلثی متقارن برای توزیع امکان متغیرهای تصمیم درنظر گرفته شده است و مرکز توزیع به همراه انحرافات چپ و راستِ (که با توجه به متقارن بودن توزیع با هم برابرند) متغیرهای مسئله باید مشخص شوند. (Ghazanfari et al,2007) نیز مدل (۴) را مد نظر قرارداده‌اند. آنها در پژوهش خود، روشی برای یافتن سطح آرمانی جهت ارائه به تصمیم گیرنده به منظور تعدیل ، توسعه دادند و تابع هدف را با سطح آرمانی مذکور به محدودیت‌ها اضافه کردند. سرانجام از روش رتبه بندی (Cheng, 1998) برای تبدیل مسئله PLP[1] به حالت قطعی استفاده کردند. Ghazanfari و همکارانش در این مقاله مثلثیِ خطی بودن متغیرهای تصمیم را به عنوان پیش فرض مدنظر قرار دادند. لیکن پیش فرضِ متقارن بودن که در (Tanaka et al, 2000) و (Guo and Tanaka, 1996) مد نظر قرار گرفته بود، در اینجا به عنوان فرض اولیه وجود نداشت. در پژوهشی دیگر (Ghazanfari et al, 2008) از همین روش برای فرموله کردن و حل مسئله موازنه هزینه- زمان در محیط کاملاً غیر قطعی استفاده کردند. همچنین (Ghazanfari et al, 2009) مسئله موازنه هزینه- زمان در محیط کاملاً غیر قطعی را مدنظر قرار دادند و این بار با تغییر روش رتبه‌بندی، مدل موازنه هزینه – زمان با متغیرهای تصمیم فازی را به یک مدل قطعی خطی تبدیل کردند و توزیع‌های بهینه فازی را برای بردار تصمیم استخراج کردند. (Yousefli et al, 2008) از مفاهیم این روش برای توسعه مدلی ابتکاری جهت حل مسائل برنامه ریزی پروژه با محدودیت منابع در محیط فازی استفاده کردند و گانت چارتی سه بعدی را برای نمایش زمانبندی فازی پروژه توسعه دادند. (Buckley et al, 2001) مسئله (۴) را در حالت چند هدفه و کاملاً فازی درنظر گرفتند. آنها نیز مثلثی بودن توزیع امکان متغیرهای تصمیم را به عنوان پیش فرض مدل خود قرار دادند و از روش‌های رتبه‌بندی (Chen, 1985) جهت تبدیل مسئله برنامه‌ریزی امکان به مسئله برنامه‌ریزی قطعی استفاده کردند و نشان داند که در برخی شرایط استفاده از روش رتبه‌بندی Chen نتیجه بهتری ارائه می‌کند، هرچند که این روش، اعداد با مجموعه پشتیبان بزرگتر (ابهام بیشتر) را به عنوان مقادیر متغیرهای تصمیم ارائه می‌کند. (Hashemi et al, 2006) مدل (۴) را تحت شرایطی که تمام پارامترها و متغیرهای تصمیم دارای توزیع مثلثی متقارن هستند درنظر گرفتند و یک روش دو فازی جهت حل مساله و بدست آوردن توزیع امکان جواب-های بهینه ارائه دادند. آنها در فاز اول دو مسئله برنامه‌ریزی خطی را حل می‌کنند که حاصل آنها میانگین و انحراف از مرکز توزیع امکان متغیرهای تصمیم است و در فاز دوم، ضرایب ادغام جواب‌های بدست آمده از فاز اول را طوری تعیین می‌کنند که حداقل مجموع انحراف برای بردار جواب نهایی حاصل شود. شایان ذکر است که در این مدل نیز پیش فرض مثلثیِ متقارن بودن تابع توزیع امکان متغیرهای تصمیم، پیش‌فرضی محدود کننده است که درنظر گرفته شده است. (Liu,1999) یک مدل DCP[2] با متغیرهای تصمیم فازی ارائه کرد که در آن تولید توزیع امکان برای متغیرهای تصمیم با استفاده از الگوریتم ژنتیک انجام می‌شود و پس از آن از شبیه‌سازی برای تشخیص درجه شدنی بودن بردار تصمیم فازی تولید شده استفاده می‌شود. همانطور که پیداست، Liu نیز پیش‌فرضی محدود کننده در تعیین توزیع امکان متغیرهای تصمیم دارد. وی کروموزوم‌های فازی را مطرح می کند که هر ژن آن یک عدد فازی است که ساختار توزیع امکان آن از پیش تعیین شده است، ولی به‌صورت تصادفی تعیین می‌شود. (Liu and Iwamura, 2001) با همین رویکرد، مسئله برنامه‌ریزی فازی با متغیرهای تصمیم غیر قطعی را با روش برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی حل کرد. (Yousefli et al, 2014) در پژوهشی، مبانی تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی را توسعه دادند و تعاریف مربوطه را ارائه کردند. آنها در این مقاله متغیرهای تصمیم مسئله برنامه‌ریزی امکانی را غیر قطعی در نظر گرفته و روشی برای محاسبه توزیع امکان متغیرهای تصمیم ارائه داده‌اند. آنها با استفاده از توزیع امکان متغیرهای تصمیم، یک سیستم تصمیم یار بهینه گرا ارائه دادند و سپس با به کار گیری سیستم استنتاج ممدانی، مسئله بهینه سازی امکانی را با پایگاه قواعد فازی معادل جایگزین کردند. (Sadjadi et al, 2010) نیز مسئله قیمت‌گذاری و بازاریابی را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی هندسی امکانی فرموله کرده و متغیرهای تصمیم را با استفاده از روش برش آلفا، به صورت غیر

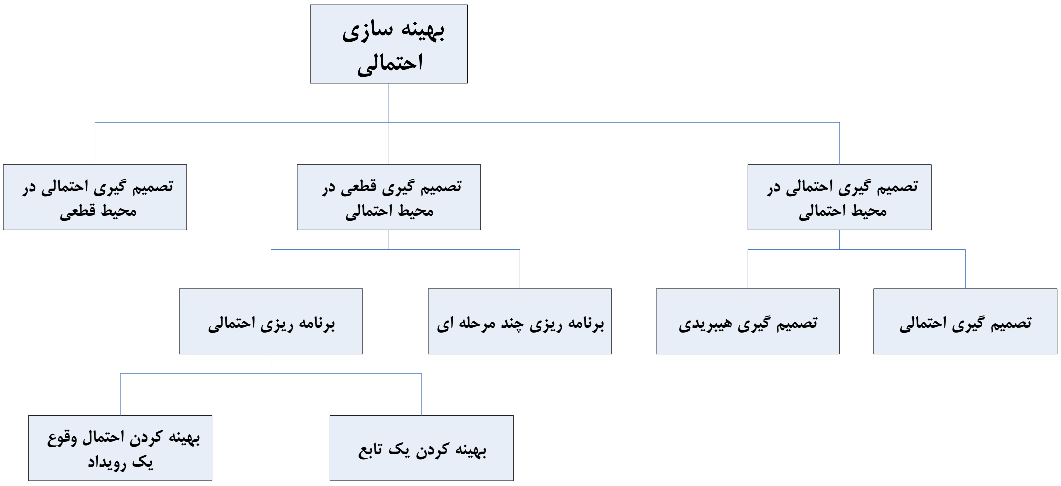
[1]Possibilistic Linear Programming
[2] Dependent-Chance Programming

قطعی محاسبه کردند. آنها برای نشان دادن چگونگی استفاده از متغیرهای تصمیم‌گیری غیر قطعی یک سیستم تصمیم‌یار ارائه دادند و همچنین از پایگاه قواعد فازی و سیستم استنتاج ممدانی برای ایجاد یک سیستم پشتیبان تصمیم قاعده پایه‌ی بهینه گرا استفاده کردند. (Kalantari et al, 2014) نیز از همین رویکرد برای تعیین تابع توزیع امکان محل استقرار نقطه انتقال در یک مسئله مکانیابی استفاده کردند.

مدل‌هایی که تا بدین جا به آنها اشاره شد، مدل‌هایی هستند که در فضای پیوسته به استخراج تصمیمات فازی پرداخته‌اند. از بین مدل‌هایی که تصمیم‌گیری فازی را در فضای گسسته گسترش داده‌اند نیز می‌توان به مدل (Sadi-Nezhad and Akhtari, 2008) و (Yousefli et al, 2009) اشاره کرد که مفهوم تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی را با پیش‌فرض نوع مشخصی از توزیع امکان متغیرهای تصمیم در مدل LINMAP جهت استخراج وزن‌های فازی بکار بردند.

۳- بررسی مدل‌های بهینه‌سازی احتمالی

همانطور که در شکل(۱) نمایش داده شده است بهینه‌سازی تصادفی، دومین شاخه اصلی از بهینه‌سازی در شرایط عدم قطعیت است. همانند بهینه‌سازی فازی، این شاخه از مدل‌های تصمیم‌گیری در محیط غیر قطعی نیز به سه بخش مجزای تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی، تصمیم‌گیری احتمالی در محیط قطعی و تصمیم‌گیری غیر قطعی در محیط تصادفی تقسیم می‌شود.



شکل۳: ساختار سلسله مراتبی بهینه‌سازی تصادفی

همانطور که در شکل (۳) نمایش داده شده است، تصمیم‌گیری غیر قطعی در محیط احتمالی، به دو بخش تصمیم‌گیری احتمالی در محیط احتمالی و تصمیم‌گیری هیبریدی در محیط احتمالی تقسیم می‌شود. این مسئله که یک مدل تصمیم‌گیری احتمالی به کدامیک از دو زیر شاخه تصمیم‌گیری غیر قطعی در محیط احتمالی تعلق دارد، عموماً پس از حل مسئله و تعیین رفتار متغیر تصمیم، مشخص می‌شود.

۳-۱- مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی

مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی، شاخه‌ای از تصمیم‌گیری تصادفی است که دارای ادبیات بسیار غنی می‌باشد. از بالغ بر نیم قرن پیش که (Beale, 1995)، (Dantzig,1955) و سایر محققین پی بردند که برآورد قطعی ضرایب مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی مشکل و در بسیاری از مواقع، این ضرایب دارای توزیع احتمالی هستند، تا کنون مدل‌های متنوع و روش‌های حل مختلفی جهت مواجهه با مسائل برنامه‌ریزی در فضای احتمالی ارائه شده است. در یک دسته‌بندی کلی، مسائل

تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی را می‌توان به دو بخش برنامه‌ریزی چند مرحله‌ای[1] و برنامه ریزی احتمالی[2] تقسیم بندی کرد. تحت فرضیات مدل‌های برنامه‌ریزی چند مرحله‌ای، متغیرهای تصمیم با توجه به تعداد مراحل مسئله به گروه‌هایی تقسیم می‌شوند. مدل کلی مسائل چند مرحله‌ای مشابه (۵) است.

$$\begin{aligned}
&\min \quad C_1^T x_1 + C_2^T x_2 + C_3^T x_3 + \ldots + C_T^T x_T \\
&S.t \\
&\quad A_{11}x_1 = b_1 \\
&\quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\
&\quad A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3 \\
&\quad \vdots \\
&\quad A_{T1}x_1 + A_{T2}x_2 + A_{T3}x_3 + \ldots + A_{TT-1}x_{T-1} + A_{TT}x_T = b_2 \\
&\quad x_1, x_2, \ldots, x_T \geq 0
\end{aligned} \qquad (۵)$$

به‌طوری که C_1, A_{11}, b_1 مقادیر قطعی و سایر پارامترها تصادفی هستند. حالت خاصی از مدل‌های چند مرحله‌ای، مدل‌های برنامه‌ریزی خطی تصادفی دو مرحله‌ای است که حالت کلی آن همانند مدل (۵) با T=2 است . (Kall and Wallace, 1994) و و همچنین (Birge and Louveaux, 1997) روش‌هایی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی تصادفی دو مرحله‌ای ارائه داده‌اند. (Birge and Louveaux, 1988) در پژوهشی دیگر روشی بر مبنای مدل‌های جداسازی[3] ارائه نمودند. مرور جامعی بر روش‌های جداسازی توسط (Ruszczynski and Shapiro, 2003) ارائه شده است. برای حالتی که توزیع پارامترهای تصادفی، پیوسته باشند، (Sahinidis, 2004) مراجعی را معرفی کرده است که به حل مسئله تحت فرضیات فوق پرداخته‌اند. اکثر مدل‌هایی که برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند مرحله‌ای تصادفی توسعه داده شده اند بر مبنای میانگین تابع هدف هستند این در حالی است که مقداری که پارامترهای تصادفی ممکن است در آن محقق شوند، کاملاً با میانگین متفاوت باشد. این امر می‌تواند در برخی مسائل پیامدهای بسیار بد و جبران ناپذیری را به همراه داشته باشد. به منظور دوری از نتایج نامطلوب، برخی محققین تلاش کردند که راه‌حل هایی به منظور دستیابی به جواب‌هایی که در برابر تغییرات مرتبط با پارامترهای تصادفی، استوار باشند، ارائه کنند. (Mulvey et al, 1995) یک مدل استوار برای حل مساله برنامه‌ریزی احتمالی ارائه دادند. مدل‌های دیگری از بهینه‌سازی استوار توسط (Sahinidis, 2004) و(Ruszczynski and Shapiro, 2003) جمع‌آوری شده است.

همانطور که در بالا بیان شد، دسته دوم مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی، مدل‌های برنامه‌ریزی احتمالی هستند. تمرکز مدل‌های برنامه‌ریزی احتمالی بر قابلیت اطمینان سیستم است (Sahinidis, 2004). این دسته از مدل‌ها به دو بخش اصلی بهینه کردن یک تابع تحت محدودیت‌های احتمالی و بهینه کردن احتمال وقوع یک رویداد تحت محدودیت‌های احتمالی، تقسیم می‌شوند. در حالت بهینه کردن یک تابع تحت محدودیت‌های احتمالی، تابع هدف ممکن است احتمالی باشد یا قطعی. این دسته از مدل‌ها اولین بار توسط (Charnes and Cooper, 1959) مورد توجه قرار گرفت. آنها مدل برنامه ریزی با محدودیت‌های شانسی (CCP[4]) را جهت مواجهه با این مسئله توسعه دادند که در آن برای هر محدودیت سطحی از احتمال قرار داده می‌شود که اگر محدودیت با آن درجه احتمال برآورده شود، برای تصمیم‌گیرنده مطلوب و راضی کننده خواهد بود. مدل کلی روش CCP همانند (۶) است:

$$\begin{aligned}
&\max \quad f(x) \\
&s.t \\
&\quad P(g_i(x,\xi) \leq 0) \geq \alpha_i \quad ; i = 1,2,\ldots,m
\end{aligned} \qquad (۶)$$

[1] Multi stage stochastic programming
[2] Probabilistic programming
[3] Decomposition based approach
[4] Chance Constrained Programming

به‌طوری‌که $f(x)$ یک تابع قطعی از x و ξ بردار پارامترهای غیـر قطعـی در محـدودیت‌هـا اسـت. روش‌هـای دیگـر تبـدیل محدودیت‌های احتمالی به محدودیت‌های استاندارد، توسط (Prekopa, 1995) مورد بررسی قرار گرفته است. (Liu, 1999) مدل برنامه‌ریزی احتمالی را تحت شرایطی مد نظر قرار داد که علاوه بر محدودیت‌ها، تـابع هـدف نیـز احتمـالی بـود. را در حـالتی توسعه داد که نه تنها محدودیت‌ها بلکه تابع هدف نیز احتمالی است. (Liu, 1999) روش برنامه‌ریزی با محدودیت‌هـای شانسـی با دو تابع Maximax و Minimax را برای حل این مسئله ارائه کرد. (Ke and Liu, 2003) از این روش جهت زمانبندی پروژه با زمان‌های احتمالی استفاده کرده‌اند. دسته دوم مدل‌های برنامه‌ریزی احتمالی توسـط (Liu, 1997) ارائـه شـد کـه در آن هـدف بهینه کردن احتمال وقوع یک رویداد احتمالی بود.

$$
\begin{aligned}
&\max \quad Pr\{f(x,\xi)\le 0\}\\
&s.t \qquad\qquad\qquad\qquad (۷)\\
&\quad g_i(x,\xi)\le 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,m
\end{aligned}
$$

(Liu, 1997) برای حل مسئله (۷) مفاهیم جدیدی ارائه و درنهایت با توسعه یک روش هیبریدی بر اساس شبیه‌سازی، الگوریتم ژنتیک و شبکه‌های عصبی به حل مدل فوق پرداخت. Liu کاربردهای مختلفی از مدل توسعه داده شده خود را در(Liu, 2008) ارائه کرده است.

همانطور که پیش‌تر اشاره شد، مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی دارای ادبیات بسیار گسترده‌ای مـی‌باشـند کـه مدل‌های پایه‌ای بررسی شده در اینجا، تنها بخش کوچکی از پژوهش‌های انجام شده در این حیطه می‌باشد. لیکن بخش اصـلی مدل‌های پایه‌ای که ارتباط معنایی با موضوع این رساله دارند، را می‌توان در قالب مدل‌های مرور شـده دانسـت. شـاخه‌ی دیگـر برنامه‌ریزی تصادفی که بسیار هم مورد توجه بوده و ابزار بسیار قدرتمندی برای فرموله کردن و حل مسائل برنامه‌ریزی احتمالی می‌باشد، برنامه‌ریزی پویای احتمالی است، لیکن با توجه به آنکه این دسته از مسائل در حیطه این رسـاله قـرار نمـی‌گیرنـد، از بررسی مدل‌های آن در اینجا صرفنظر شده است. منبع (Ross, 1983) به‌طـور کامـل بـه ایـن شـاخه از بهینـه‌سـازی تصـادفی پرداخته است. مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی دارای کاربردهای بسیار زیادی است کـه بخشـی از کاربردهـای آن در (Nahmias and Moinzadeh, 1997)، (Liu, 2008)، (Dupacova, 2002) و (Ruszczynski and Shapiro, 2003) ارائـه شده است.

۳-۲- مدل‌های تصمیم‌گیری احتمالی در محیط قطعی

این دسته شامل مدل‌هایی است که پارامترهای سیستم را که تعیین کننده وضعیت و فضای سیستم است، قطعی درنظـر مـی-گیرند، درحالی که پاسخ سیستم را که همان متغیرهای تصمیم مسئله هستند همراه با عدم قطعیت از نوع احتمالی مـی‌داننـد. مدل کلی تصمیم‌گیری احتمالی در محیط قطعی همانند (۸) است.

$$
\begin{aligned}
&\max \quad C^T\bar{x}\\
&S.t \qquad\qquad\qquad\qquad (۸)\\
&\quad A\bar{x}\le b
\end{aligned}
$$

به‌طوری که C,A,b ضرایب قطعی و $\bar{x}$ بردار متغیرهای تصمیم مسئله است که می‌بایست توزیع احتمالی آن مشخص شود.
ازجمله پژوهش‌هایی که در این زمینه می‌توان از آنها نام برد،فعالیت‌هایی است کـه در زمینـه بیشـینه‌سـازی بـازده تولیـد[1] در محیط تصادفیانجام شده است. این مدل‌ها به دنبال تعیین مشخصات طراحی هستند به‌طوری که حداکثر بـازدهی از محصـول طراحی شده بدست آید. لیکن با توجه به عدم قطعیت‌های موجود در فضای تولید، اجزای محصول دارای ویژگی‌های متغیـر بـا تلرانس مشخصی هستند. دسته مدل‌هایی که در این زمینه توسعه داده شده‌اند، به‌دنبال تعیین مشخصات اجـزاء محصـول بـه-گونه‌ای هستند که احتمال اینکه طراحی انجام شده، ویژگی‌ها و بازده مورد انتظار از محصول را بـرآورده کنـد، حـداکثر کننـد. کارایی محصول مورد نظر با یک دسته محدودیت‌های از پیش تعیین شده که قطعی هم هستند تعریف می‌شـود، بـه‌طـوری‌کـه

[1] Manufacturing yield maximization

اگر محصول طراحی شده، این محدودیت‌ها را ارضاء کرد، کارا خواهد بود. با وجود این محدودیت‌ها، هدف پیدا کردن نقطه، بازه و یا توزیع پارامترهای طراحی به‌گونه‌ای است که حداکثر بازده حاصل شود. (Wojciechowski et al, 1997) به دنبال نقطه‌ای می‌گردند که این احتمال را حداکثر کند. (Seifi et al, 2000) به دنبال بازه‌ای برای پارامترهای طراحی می‌گردند که حداکثر بازده را ایجاد نماید و (Javied and Seifi, 2007) پارامترها را دارای توزیع از پیش تعیین شده‌ای فرض کرده‌اند و به‌دنبال مشخص کردن پارامترهای این توزیع هستند تا حداکثر بازده حاصل شود.

۳-۳- مدل‌های تصمیم‌گیری احتمالی در محیط احتمالی

مبحث تصمیم‌گیری احتمالی در محیط احتمالی از آنجایی ناشی می‌شود که وجود عدم قطعیت از نوع احتمالی در پارامترهای مسئله، باعث می‌شود که هر یک از این پارامترها با مقدار نامعلومی درآینده محقق شوند. تحقق پارامترها با مقادیر مختلف، حالات متفاوتی را برای سیستم بوجود می‌آورد که هر یک از این حالات دارای جواب بهینه خاص خود هستند. احتمال اینکه، جواب بهینه یک حالت ، جواب بهینه واقعی سیستم باشد، برابر با احتمال وقوع آن حالت می‌باشد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که برای یک سیستم تصادفی، جواب‌های بهینه مختلفی وجود داردکه هر یک دارای احتمالی برای وقوع می‌باشند. برآورد توزیع احتمالی متغیرهای تصمیم، تمام حالات مختلف مقادیر بهینه سیستم را با احتمال وقوع آنها تجمیع کرده و دید مناسبی نسبت به آینده سیستم بوجود می‌آورد.

مدل کلی تصمیم‌گیری احتمالی در محیط احتمالی به شکل زیر است.

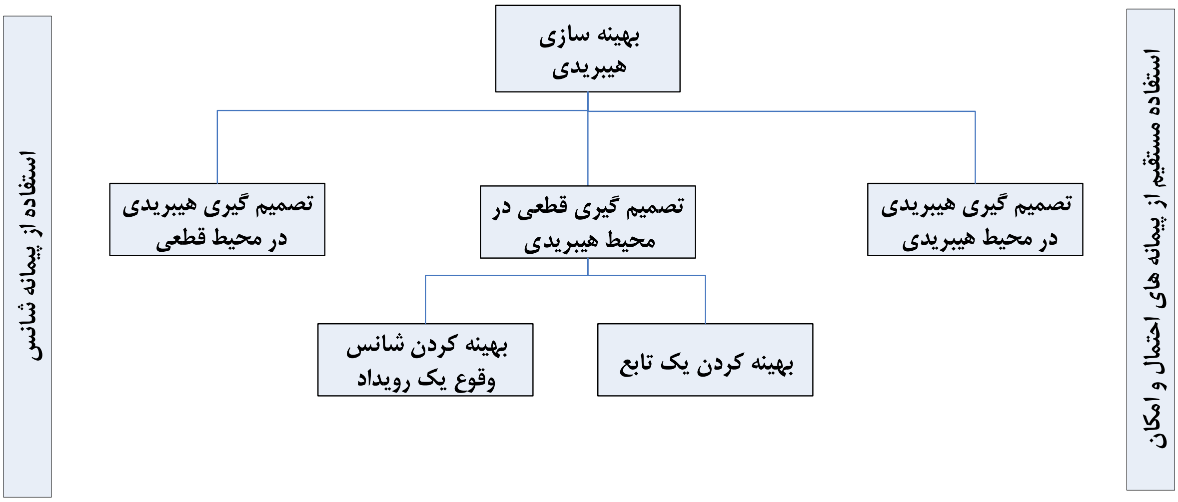
$$\begin{aligned} &\max \quad f(\bar{x},\xi) \\ &s.t \\ &\qquad g_i(\bar{x},\xi) \le 0 \qquad ; \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned} \qquad (۹)$$

به‌طوری‌که ξ بردار پارامترهای احتمالی با توزیع مشخص و $\bar{x}$ بردار متغیرهای تصمیم احتمالی است که می‌بایست توزیع آنها مشخص شود. مجموعه متدهای طراحی سناریو[1] که هر سناریو دارای احتمال مشخصی برای وقوع می‌باشد، می‌توانند جزء این دسته از مدل‌های برنامه‌ریزی احتمالی باشند. مروری بر این روش‌ها در(Ruszczynski and Shapiro, 2003) ارائه شده است. اما در شرایط مدل (۹) و بویژه هنگامی که پارامترهای تصادفی دارای توزیع احتمالی پیوسته هستند، تنها Yousefli و Ghazanfari [AFS] مدلی برای استخراج توزیع احتمالی بهینه کتغیرهای تصمیم ارائه دادند. آنها مسئله تعیین اندازه اقتصادی سفارش احتمالی را مد نظر قرار دادند و با فرض غیر قطعی بودن متغیرهای تصمیم، روشی برای استخراج توزیع بهینه متغیرهای تصمیم ارائه کردند. آنها همچنین یک سیستم استنتاج قاعده پایه احتمالی توسعه دادند که جایگزین مسئله تعیین اندازه اقتصادی سفارش می‌شد و بدون حل مستقیم مسئله، جواب‌های بهینه متغیرهای تصمیم را استنتاج می‌کرد.

۴- بررسی مدل‌های بهینه‌سازی هیبریدی

در بسیاری از شرایط، پارامترهای تاثیر گذار بر یک سیستم با عدم قطعیت همراه هستند به‌طوری‌که این عدم قطعیت هم دارای ماهیت احتمالی و هم از نوع فازی است. تحت این شرایط برنامه‌ریزی فازی یا احتمالی دارای کارایی مناسبی نخواهد بود. بنابراین ایجاد مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی، جهت تصمیم‌گیری در محیط هیبریدی فازی- احتمالی، ضروری به نظر می‌رسید. ادبیات موضوع بهینه‌سازی هیبریدی به سه بخش تصمیم‌گیری قطعی در محیط هیبریدی، تصمیم‌گیری هیبریدی در محیط قطعی و تصمیم‌گیری هیبریدی در محیط هیبریدی تقسیم می‌شود. این تقسیم بندی به همراه سطوح پایین تر آن در شکل (۳) نمایش داده شده است.

[1] Scenario Planning



شکل۴: ساختار سلسله مراتبی بهینه‌سازی هیبریدی

همانطور که در شکل (۳) نمایش داده شده است، دو رویکرد مختلف جهت فرموله‌کردن فضای هیبریدی وجود دارد، اول استفاده از دو پیمانه امکان و احتمال به صورت مستقیم و فرموله کردن مسائل با استفاده از این دو پیمانه، و دوم استفاده از یک پیمانه جدید به نام پیمانه شانس[1] که تابعی از دو پیمانه اعتبار و احتمال است.

۴-۱- مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط هیبریدی

همانطور که در شکل (۳) نمایش داده شده است، مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط هیبریدی به دو بخش مدل‌هایی با تابع هدف بهینه سازی یک تابع غیر قطعی و مدل‌هایی با تابع هدف بهینه‌سازی احتمال وقوع یک رویداد غیر قطعی تقسیم می‌شوند. روش‌های ارزش انتظاری و برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی، راه‌های مواجهه با مدل‌های با تابع هدف بهینه‌سازی یک تابع غیر قطعی می‌باشندکه بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند و DCP روش حل نوع دوم دسته مسائل تصمیم‌گیری قطعی در محیط هیبریدی می‌باشد. مدل کلی بهینه‌سازی یک تابع در فضای هیبریدی در زیر نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} & \max \quad f(x,\xi) \\ & s.t \\ & \quad g_i(x,\xi) \le 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots m \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

به‌طوری‌که ξ بردار پارامترهای فازی- احتمالی مدل و x بردار متغیرهای تصمیم مسئله می‌باشد.

(Liu, Y.K. and Liu, B., 2003-1) و (Liu, Y.K. and Liu, B., 2003-2) از روش ارزش انتظاری جهت حل مدل (۱۰) برای متغیرهای فازی-احتمالی و احتمالی-فازی استفاده کرده‌اند. همچنین(Liu, 2008) با معرفی پیمانه شانس به عنوان سنجه‌ای جهت اندازه گیری درجه شواهد وقوع رویدادی در فضای هیبریدی، مدل (۱۰) را مجدداً فرمول‌بندی و با استفاده از روش‌های ارزش انتظاری و CCP به حل آن اقدام کرد. وی در مدل CCP خود علاوه بر محدودیت‌ها، تابع هدف را نیز غیر قطعی درنظر گرفت و با تعیین یک حداقل شانس برای بیشتر شدن تابع هدف از یک سطح آرمانی، تابع هدف را وارد محدودیت‌ها کرده و مدل را به فضای قطعی انتقال می‌دهد. (Li et al, 2006) از پیمانه شانس و مفهوم برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی، جهت مسائل چند هدفه در فضای هیبریدی استفاده کردند. کاربردهای فراوانی بر پایه مدل‌های Liu و همکارانش توسعه داده شده است که مروری بر این کاربردها در منبع (Liu, 2008) ارائه شده است.

در دسته دوم از مسائل تصمیم گیری قطعی در محیط هیبریدی به‌جای آنکه به دنبال بهینه سازی یک تابع از متغیرهای تصمیم مسئله باشند، در پی ایجاد تصمیمی هستند که شانس وقوع یک رویداد غیر قطعی در فضای هیبریدی را بهینه می‌کنند. مدل کلی بهینه سازی شانس وقوع یک رویداد در فضای هیبریدی در زیر نمایش داده شده است.

[1] Chance measure

$$
\begin{aligned}
& max \quad ch\{f(x,\xi)\geq 0\} \\
& s.t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (۱۱) \\
& \quad g_i(x,\xi)\leq 0 \qquad ; \quad i=1,2,\ldots m
\end{aligned}
$$

به‌طوری که ξبردار پارامترهای هیبریدی مسئله و $ch\{.\}$ پیمانه شانس می‌باشد. (Liu, 2002) مدلی جهت حل مسئله (۱۱) با پارامتر فازی- احتمالی توسعه داده است. وی همچنین یک الگوریتم هیبریدی از شبیه سازی، الگوریتم ژنتیک و شبکه‌های عصبی برای حل مدل توسعه داده شده ارائه کرده است. برخی از کاربردهای این مدل نیز در مقاله (Liu, 2008) مرور شده است.

۴-۲- مدل‌های تصمیم گیری هیبریدی در فضای هیبریدی

این دسته از مدل‌ها به دنبال یافتن توزیع فازی-احتمالی متغیرهای تصمیم به‌گونه‌ای هستند که یک تابع به عنوان هدف،کمینه یا بیشینه شود. مدل کلی این مسائل همانند (۱۲) است.

$$
\begin{aligned}
& min \quad f(\tilde{\tilde{x}},\xi) \\
& s.t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (۱۲) \\
& \quad g_i(\tilde{\tilde{x}},\xi)\leq 0 \qquad ; \quad i=1,2,\ldots m
\end{aligned}
$$

به‌طوری‌که ξ بردار پارامترهای هیبریدی و $\tilde{\tilde{x}}$ بردار تصمیم هیبریدی مسئله است که می‌بایست توزیع آن مشخص شود. (Guangyuan and Zhong, 1993) مسئله (۱۲) را در دو حالت درنظر گرفتند. حالت اول زمانی که فقط ضرایب محدودیت‌ها دارای توزیع هیبریدی باشند و حالت دوم زمانی که علاوه بر محدودیت‌ها، ضرایب تابع هدف نیز دارای توزیع فازی احتمالی باشند و در هر دو مسئله به دنبال یافتن توزیع متغیرهای تصمیم هستند، به‌طوری‌که حداقل مقدار برای تابع هدف حاصل شود. آنها از مفهوم برش آلفا برای رهایی از عدم قطعیت فازی استفاده کردند و برای هر سطح از قطعیت α، بازه‌ای برای پارامترهای هیبریدی بدست آوردند که کران‌های بازه متغیرهای تصادفی بودند. در ادامه با استفاده از بازه‌های محاسبه شده، هر محدودیت به دو محدودیت و برای حالتی که تابع هدف نیز غیر قطعی است، یک تابع هدف به دو تابع هدف تبدیل شده است. در نهایت با استفاده از الگوریتم سیمپلکس احتمالی به حل مسئله برنامه‌ریزی تصادفی حاصله پرداخته و پس از حل مسئله برای برش‌های آلفای مختلف، توزیع هیبریدی متغیرهای تصمیم را محاسبه کردند. (Zhong and Guangyuan, 1993) در پژوهشی دیگر، با همان رویکرد کار قبل، دو مدل دیگر برنامه‌ریزی خطی در محیط هیبریدی را مورد بررسی قرار دادند. آنها در مدل اول حالتی را درنظر گرفتند که ضرایب تابع هدف دارای توزیع هیبریدی هستند در حالی که محدودیت‌ها قطعی باشند و در مدل دوم تمام متغیرها و پارامترهای مسئله را غیر قطعی فرض کردند و به حل مسئله با روش ذکر شده در بالا پرداختند. (Zhong et al, 1994)، مدل دوم مقاله (Zhong and Guangyuan, 1993) را درنظر گرفتند و این بار با روشی جدید به حل همان مسئله پرداختند. آنها در این پژوهش، در ابتدا با استفاده از برش آلفا مسئله را از فضای هیبریدی وارد فضای احتمالی کردند و آنگاه یک مسئله را به شش مسئله جداگانه تبدیل نمودند و سرانجام با تجمیع نتایج این شش مسئله در سطوح مختلف α به استخراج توزیع هیبریدی متغیرهای تصمیم پرداختند.

۵- بحث و بررسی

همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده، اولین سطح دسته‌بندی مدل‌های بهینه‌سازی غیر قطعی بر مبنای نوع عدم قطعیت و فضای غیر قطعیی است که مدل درآن توسعه داده شده است. بهینه‌سازی فازی، بهینه‌سازی احتمالی و بهینه‌سازی هیبریدی سه دسته مسائل بهینه‌سازی غیر قطعی هستند. آنچه در این سه دسته به وضوح قابل تشخیص است، حجم بسیار زیاد پژوهش‌های انجام شده در زیر شاخه تصمیم گیری قطعی در محیط غیر قطعی می‌باشد. انواع مدل‌های ارزش انتظاری و برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی و سایر روش‌های رتبه‌بندی اعداد فازی، احتمالی و هیبریدی، روش‌های مختلفی جهت تبدیل مسئله از فضای غیر قطعی به محیط قطعی هستند که به کرات مورد استفاده پژوهشگران قرار گرفته‌اند. آنچه در این

بخش کاملاً مشهود و چشم‌گیر است، حجم انبوه پژوهش‌ها در سه حوزه برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی امکان، و برنامه‌ریزی ادغامی یا استوار است که مدل‌های مختلفی بر مبنای روش‌های رتبه‌بندی فازی یا سایر مبانی اولیه تصمیم‌گیری فازی انجام شده است.

در موضوع تصمیم‌گیری قطعی در فضای فازی، از بین تمام مقالات و مدل‌های ارائه شده، مدل‌های (Carlsson and Fuller, 2000,2001) از ویژگی خاصی برخوردار است. استفاده از قواعد اگر- آنگاه فازی، به عنوان یک موتور استنتاج تابع هدف، تحت شرایطی که برآورد تابع هدف به راحتی امکان پذیر نیست، این مدل را از سایر مدل‌های موجود در این حوزه مستثنی کرده است. به‌طور کلی می‌توان گفت که این نوع نگاه به مسائل برنامه‌ریزی ریاضی، نگاهی است که باعث کاهش پیچیدگی‌های فرمولبندی مسائل برنامه‌ریزی ریاضی می‌شود و استفاده از مدل‌ها را برای تصمیم‌گیرندگان جذاب‌تر می‌کند.این پژوهشگران در مقاله خود از پایگاه قواعد ممدانی استفاده کردند و از استنتاج Tsukamoto جهت تعیین تابع هدف استفاده نمودند.

حوزه تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی، طی چند سال اخیر به شدت مورد توجه محققین قرار گرفته است و پژوهشگران مختلف، روش‌های متفاوتی جهت حل مسائل این حوزه ارائه کرده‌اند. به‌طور کلی مدل‌هایی که تا کنون در این زمینه ارائه شده است را می‌توان به دو بخش عمده زیر تقسیم نمود:

۱- مدل‌هایی که پیش‌فرضی برای توزیع امکان متغیرهای تصمیم در نظر گرفته‌اند، و به دنبال تعیین پارامترهای این توزیع امکان هستند.

۲- مدل‌هایی که برای حل مسئله از روش برش- α و شبیه سازی استفاده کرده‌اند.

در مورد دسته اول باید گفت که این دسته از مدل‌ها، محدودیت انکار ناپذیری را بر رفتار متغیرهای تصمیم اعمال کرده‌اند. پر واضح است که رفتار متغیر تصمیم در یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی، تنها تحت شرایط مسئله تعیین می‌شود و اینکه از پیش تعیین شود که متغیر دارای توزیع امکان مثلثی یا ذوزنقه‌ای باشد، باعث می‌شود که نتوان هیچ ادعایی بر بهینه بودن توزیع‌های بدست آمده برای متغیرهای تصمیم داشت. چرا که در صورت عدم استفاده از این روش و عدم اعمال محدودیت بر رفتار متغیرهای تصمیم، ممکن است توزیعی کاملاً متفاوت از آنچه فرض شده است به‌دست آید. به‌خصوص که تمام مدل‌های ارائه شده در این حوزه، توزیع امکان متغیرهای تصمیم را به‌صورت خطی در نظر گرفته‌اند که این امر به هیچ وجه قابل تضمین نیست.

برخی دیگر از مدل‌ها، علاوه بر فرضیات فوق، پیش فرض متقارن بودن توزیع امکان متغیرهای تصمیم را نیز درنظر گرفته‌اند، که این امر، جواب‌های حاصله را بیشتر از حالت بهینه دور می‌کند.

به‌طور کلی می‌توان گفت که این دسته از مدل‌ها اگر چه گام‌های ارزنده‌ای در مسیر پیشبرد تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی هستند، لیکن به علت پیش‌فرض‌های ساده کننده بسیار زیاد، جواب‌های قابل اعتمادی ارائه نمی‌کنند.

از سوی دیگر مدل‌هایی نیز در ادبیات موضوع ارائه شده‌اند که از روش برش- α و شبیه سازی استفاده می‌کنند. این مدل‌ها هیچ پیش‌فرضی بر روی توزیع امکان متغیرهای تصمیم ندارند، لیکن از آنجایی که اکثر پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، در قالب مدل‌های کاربردی بوده ، به ابعاد مختلف مسئله از دیدگاه تصمیم‌گیری، به‌طور کامل توجهی نشده است.

درصورت استفاده از روش برش‌های- α و شبیه سازی نیز، هیچ تضمینی برای عدد فازی بودن توزیع بدست آمده برای متغیر تصمیم وجود ندارد، چراکه توزیع بدست آمده ممکن است محدب نباشد. همچنین ممکن است مجموعه‌های فازی بدست آمده بهتر باشد که در قالب مجموعه‌های مبهم[1] نمایش داده شود یا تقریب‌هایی برای رسیدن به توزیع امکان شناخته شده‌ای برای متغیرهای تصمیم اعمال شود. از طوی دیگر به غبر از تعداد معدودی از پژوهش‌ها که از تصمیم‌های غیر قطعی به عنوان شالوده یک سیستم پشتیبان تصمیم استفاده کرده اند، سایر مقالات صرفا به استخراج جواب بهینه به صورت غیر قطعی پرداخته‌اند و کاربردی برای آن ارائه نکرده‌اند.

در حوزه بهینه سازی احتمالی نیز مدل‌های مختلفی در حوزه تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی ارائه شده است و با درجه اطمینان بالایی می‌توان گفت که این حوزه، محور اصلی پژوهش‌های محققین از دهه ۱۹۵۰ تا کنون بوده است. مدل‌های ارائه

[1] Vague sets

شده تحقیقات بسیار ارزشمندی هستند که بارها و بارها در عمل پیاده شده‌اند و جواب‌های قانع کننده‌ای را هم به دنبال داشته‌اند. ارزش انتظاری، برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی و DCP سه مدلمهم و پایه‌ای بوده‌اند که محققین به طرق مختلف از آنها برای توسعه مدل‌ها و الگوریتم‌های خود استفاده کرده‌اند. آنچه در اینجا مورد بحث است، ***درجه ثبات*** جواب‌های بدست آمده از این مدل‌ها می‌باشد.

زمانی که پارامترهای تاثیرگذار بر یک سیستم حالت تصادفی دارند و از یک توزیع احتمالی خاص پیروی می‌کنند، بدین معناست که مقادیر مختلفی با احتمالات متفاوت می‌توانند داشته باشند. به عبارت دیگر هر یک از این پارامترها در آینده با مقدار مشخصی محقق می‌شوند، لیکن در حال حاضر به علت نداشتن دانش کافی نسبت به آینده‌ی پارامتر، این مقدار با درجه-ای از احتمال برای وقوع همراه است. اگر مجموعه‌ای از مقادیر برای پارامترهای احتمالی یک سیستم را به عنوان حالات آن سیستم در نظر بگیریم، احتمال قرار گرفتن سیستم دراین حالت، در صورت مستقل بودن پارامترها، برابر ضرب احتمال محقق شدن هر پارامتر در مقدار مورد نظر آن حالت است. بنابراین بردار جواب‌های بهینه‌ای که برای هر حالت بدست می‌آید، دارای احتمالی برابر احتمال حالت سیستم برای برای جواب بهینه بودن واقعی است. اکنون حالتی را در نظر بگیرید که تعداد پارامترهای احتمالی موثر بر سیستم زیاد باشد، در این صورت احتمال وقوع هر حالت از سیستم، عددی ناچیز و جواب‌های بهینه حاصل از آن دارای ریسک بالایی خواهند بود. بنابراین به نظر می‌رسد که جواب‌های بهینه هیچ یک از حالات سیستم این قابلیت را نداشته باشند که به عنوان جواب بهینه کلی سیستم مورد اعتماد قرار گیرند. این مشکل تقریباً در ارتباط با تمام مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی می‌تواند باشد. بویژه زمانی که پارامترهای مدل دارای توزیع احتمالی پیوسته باشند، احتمال وقوع هر حالت قطعی از سیستم برابر صفر است.

حال به بررسی جواب‌های بدست آمده از دو روش ارزش انتظاری و برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی می‌پردازیم.

در روش ارزش انتظاری بدین صورت عمل می‌شود که میانگین هریک از پارامترها، با مقدار احتمالی آن جایگزین شده و بدین ترتیب مسئله وارد فضای قطعی می‌شود. جواب بهینه حاصل از این سیستم (که در واقع یک حالت از بین بینهایت حالت ممکن برای سیستم، تحت شرایطی است که پارامترها دارای توزیع پیوسته باشند) دارای چه مفهومی خواهد بود؟ تنها تفسیری که در رابطه با این جواب می‌توان داشت، این است که این جواب دارای این ویژگی است که احتمالاً کمترین انحراف را نسبت به جواب بهینه سایر حالات خواهد داشت. لیکن از آنجایی که ما هیچ دانشی نسبت به توزیع احتمالی متغیر تصمیم نداریم، با قطعیت نمی‌توانیم اظهار کنیم که جواب بدست آمده میانگین جواب‌های بهینه حالات مختلف سیستم است.

مدل‌های برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی نیز دارای همین وضعیت هستند. در این مدل‌ها حداقلی از درجه احتمال، به عنوان سطح رضایتمندی تصمیم گیرنده جهت برآورده شدن هر محدودیت در نظر گرفته می‌شود. یعنی جوابی که از یک مدل بهینه‌سازی تصادفی بدست می‌آید، با حداقل درجه احتمال P_i محدودیت iام را ارضاء می‌کند. بنابراین درصورت مستقل بودن محدودیت‌ها، احتمال شدنی بودن جواب بهینه بدست آمده برابر $\prod_i P_i$ خواهد بود. درصورتی که تعداد محدودیت‌ها زیاد باشد، ممکن است این احتمال حتی به صفر میل کند. لذا به نظر می‌رسد جواب حاصل از مدل برنامه‌ریزی شانسی نیز با ریسک بالایی همراه باشد.

با توجه به مباحث ذکر شده، به نظر می‌رسد نتایج حاصل از مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط احتمالی، در عین ساده‌گی، کاربردی و قابل فهم بودن دارای ریسک بالایی برای تصمیم‌گیری‌های حساس هستند. این نقطه ضعف در مدل‌های تصمیم-گیری احتمالی در فضای احتمالی تا حدودی برطرف می‌شود. در فضای هیبریدی نیز مشکلات مرتبط با مدل‌های تصمیم‌گیری قطعی در محیط هیبریدی همچنان پابرجا است. در ارتباط با مدل‌های تصمیم‌گیری هیبریدی در محیط هیبریدی هم که توسط برخی از محققین انجام شده است، باید گفت که این پژوهشگران نیز به واقع یک سیستم تصمیم‌یار جهت ایجاد دیدی نسبت به آینده بهینه سیستم بوجود آورده‌اند، لیکن در ارتباط با چگونگی استفاده از توزیع‌های هیبریدی بدست آمده برای متغیرهای تصمیم، سخنی به میان نیاورده‌اند.

۶- نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات برای تحقیقات آینده

در این مقاله مروری اجمالی بر مدل‌های تصمیم‌گیری در سه فضای احتمالی، فازی و هیبریدی انجام شد و دسته‌بندی جامعی بر روی این روش‌ها صورت گرفت. نقاط قوت و ضعف ادبیات در هر حوزه بحث شد و مواردی در هر بخش مورد اشاره قرار گرفت. بر اساس مجموعه مطالعاتی که در حوزه تصمیم گیری در محیط غیر قطعی انجام شده است، پیشنهادات زیر به عنوان مسیرهایی برای تحقیقات آینده جهت توسعه علم تصمیم‌گیری غیر قطعی ارائه می‌شود:

بر اساس مطالبی که در این فصل بیان شد، و با رویکرد مورد نظر در این نوشتار، موارد زیر به‌صورت خلاصه، به عنوان مسیرهایی جهت تحقیقات آینده در حوزه تصمیم‌گیری در فضای غیر قطعی پیشنهاد می‌شود:

- استفاده از قواعد اگر- آنگاه فازی جهت استخراج محدودیت‌هایی که به راحتی قابل تعریف نیستند.
- استفاده از کنترلرهای انواع فازی جهت مدلسازی توابع هدف چند ضابطه‌ای به‌طوری‌که تابع هدف در رنج‌های غیرقطعی از متغیرهای تصمیم، متفاوت باشد.
- بهبود چارچوب جهت تصمیم‌گیری فازی در محیط فازی و ارائه روش‌های جدید جهت استخراج صحیح توزیع امکان بهینه متغیرهای تصمیم.
- توسعه چارچوبی مفهومی جهت توصیف به منظور تحلیل آینده بهینه یک سیستم.
- توسعه سیستم پشتیبان تصمیم به منظور کنترل وضعیت سیستم به صورت به‌هنگام و ارائه پاسخ بهینه یا نزدیک به بهینه سیستم
- توسعه مدل‌های تصمیم‌گیری فازی جهت استخراج توزیع الزام یا اعتبار متغیرهای تصمیم.
- بهبود چارچوب تصمیم گیری احتمالی در محیط احتمالی و استخراج توزیع احتمال متغیرهای تصمیم در مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی تصادفی.
- بهبود چارچوب تصمیم‌گیری غیر قطعی در محیط هیبریدی

مراجع

Ahmadi Javid A., Seifi A. (2007). The use of stochastic analytic center for yield maximization of systems with general distributions of component values, Applied Mathematical Modelling, 31, 832–842.

Baykasoglu, A., Gocken, T. (2008). A review and classification of fuzzy mathematical programs, Journal of intelligent and fuzzy Systems, 19, 205–229.

Beale, E. M. L. (1995). On minimizing a convex function subject to linear inequalities. Journal of the Royal Statistical Society, 17B, 173–184.

Bellman, R. E. (1957). Dynamic programming. Princeton, PA: Princeton University Press.

Bellman, R., and Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. Management Science, 17, 141–161.

Birge,J.R, Louveaux,F.V (1997). Introduction to the stochastic programming, New York, Springer.

Birge,J.R, Louveaux,F.V. (1988). A multicut algorithm for two-stage stochastic linear programming, European journal of operational research, 34, 384-392.

Buckley,J.J. (1988). Possibilistic linear programming with triangular fuzzy numbers, Fuzzy sets and systems, 26, 135-138.

Buckley, J.J., Feuring, T. and Hayashi, Y. (2001). Multi-objective fully fuzzified linear programming, international journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems, 9, 605-621.

Carlsson, C., Fuller, R. (2000). Multiobjective linguistic optimization, Fuzzy sets and systems, 115, 5-10.

Carlsson, C., Fuller, R. (2001). Optimization under fuzzy if-then rules, Fuzzy sets and systems, 19, 111-120.

Chanas, S. (1983). The use of parametric programming in FLP, Fuzzy sets and systems, 11, 243-251.

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1959). Chance-constrained programming. Management Science, 6,73–79.

Chen, S.H. (1985). Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, Fuzzy sets and systems, 17, 113-129.

Cheng, C-H. (1998). New approach for ranking fuzzy numbers by distance method, Fuzzy sets and systems, 95, 307-317.

Clarsson, C., Korhonen, P. (1986). A parametric approach to fuzzy linear programming, Fuzzy sets and systems, 20, 17-30.

Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. Management Science, 1, 197–206.

Dubois, D. (1987), Linear programming with fuzzy data, The analysis of fuzzy information, 3,241-263.

Dupacova, J. (2002). Applications of stochastic programming: Achievements and questions, European journal of operational research,140, 281–290.

Entani, T., Tanaka, H. (2007). Interval estimations of global weights in AHP by upper approximation, Fuzzy sets and systems, 158, 1913 – 1921.

Ghazanfari M, Shahanaghi K, Yousefli A. (2008). An application of possibility goal programming to the time–cost trade off problem. JUS, World academic press, 2, 1, 22–28.

Ghazanfari M., Shahanaghi K., Yousefli A., Abiry M.B. (2007). A New Approach to Obtain Possibility Distributions of Fuzzy Decision Variables in Possibility Linear Programming Problems, Frontiers science Series, 49, 59-60.

Ghazanfari. M., Yousefli A., Jabal Ameli M. S., Bozorgi-Amiri A. (2009). A new approach to solve time–cost trade-off problem with fuzzy decision variables, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 42, 3-4,.

Guangyuan, W., Zhong, Q. (1993). Linear programming with fuzzy random variable coefficients, Fuzzy sets and systems, 57, 295-311.

Guo, P., Tanaka, H. (1996). Fuzzy decision in possibility programming problems, Proceeding of asian fuzzy systems symposium, 278-283.

Hashemi, S.M., Modarres, M., Nasrabadi, E., Nasrabadi, M.M. (2006). Fully fuzzified linear programming, solution and duality, Journal of intelligent and fuzzy systems, 17, 253–261.

Inuiguchi, M., Ichihashi, H. (1990). Relative modalities and their use in possibilistic linear programming, Fuzzy sets and systems, 35, 303-323.

Inuiguchi, M., Ramik, J. (2000). Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem, Fuzzy sets and systems, 111, 3-28.

Inuiguchi, M., Sakawa, M. (1994). Possible and necessary optimality tests in possibilistic linear programming problems, Fuzzy sets and systems, 67, 29-46.

Inuiguchi, M., Sakawa, M. (1996). Possible and necessary efficiency in possibilistic multi objective linear programming problems and possible efficiency test, Fuzzy sets and systems, 231-241.

Jamison, K.D., Lodwick, W.A. (2001). Fuzzy linear programming using a penalty method, Fuzzy sets and systems, 119, 97-110.

Kalantari, H., Yousefli, A., Ghazanfari, M., & Shahanaghi, K. (2014). Fuzzy transfer point location problem: a possibilistic unconstrained nonlinear programming approach. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 70(5-8), 1043-1051.

Kall, P., Wallace, S.W. (1994). Stochastic Proframming, New York, Wiley.

Ke, H., Liu, B. (2003). Project scheduling problem with stochastic activity duration times, Applied mathematics and computation, 168, 342-353.

Lai, Y.J., Hwang, C.L. (1992). A new approach to some possibilistic linear programming problems, Fuzzy sets and Systems, 49, 121-133.

Lai, Y.J., Hwang, C.L. (1992). Fuzzy mathematical programming, Springer- Verlag, New York.

Li, J., Xua, J., Genb, M. (2006). A class of multiobjective linear programming model with fuzzy random coefficients, Mathematical and computer modeling, 44, 1097–1113.

Liu, B. (1997). Dependent-chance programming: A class of stochastic optimization, Computers and mathematics with applications, 34, 89-104.

Liu, B. (1999). Dependent-chance programming with fuzzy decisions, IEEE transactions on fuzzy systems, 7, 3, 354-360.

Liu, B. (1999). Uncertain Programming, Wiley, New York.

Liu, B. (2000). Dependent-chance programming in fuzzy environments, Fuzzy sets and systems, 109, 97-106.

Liu, B. (2002). Random fuzzy dependent-chance programming and its hybrid intelligent algorithm, Information sciences, 141, 259–271.

Liu, B. (2008). Theory and practice of uncertain programming, second edition, Springer- Verlag.

Liu, B., Iwamura, K. (1998-1). Chance constrained programming with fuzzy parameters, Fuzzy sets and systems, 94, 227-237.

Liu B., and Iwamura K. (1998-2). A note on chance constrained programming with fuzzy coefficients, Fuzzy sets and systems, 100, 229-233.

Liu, B., Iwamura, K. (2001). Fuzzy programming with fuzzy decisions and fuzzy simulation-based genetic algorithm, Fuzzy sets and systems, 122, 253–262.

Liu, B., Liu, Y.K. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models, IEEE transactions on fuzzy systems, 10, 4, 445-450.
Liu, Y.K., Liu, B. (2003). A class of fuzzy random optimization: Expected value models, Information sciences, 155, 89-102.
Liu, Y.K., Liu, B. (2003). Expected value operator of random fuzzy variable and random fuzzy expected value models, International journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems, 11, 195-215.
Mulvey, J. M., Vanderbei, R. J., & Zenios, S. A. (1995). Robust optimization of large-scale systems. Operations research, 43(2), 264-281.
Nahmias, S., Moinzadeh, K. (1997). Lot sizing with randomly graded yields, Operations research, 45, 974-986.
Negoita, C. V., Minoiu, S., & Stan, E. (1976). On considering imprecision in dynamic linear programming. Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 3(1), 83-96. In (Inuiguch and Ramik, 2000)
Prekopa, A. (1995). Stochastic programming, Dordrecht, The Netherlands kluwer academic publication.
Ramik, J., Rimanek, J. (1985). Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization, Fuzzy sets and systems, 16, 123-138.
Rommelfanger, H. (1996). Fuzzy linear programming and applications, European journal of operational research, 92, 512-527.
Rommelfanger, H., Hanuscheck, R., Wolf, J. (1989). Linear programming with fuzzy objectives, Fuzzy sets and systems, 29, 31-48.
Ross, S. (1983). Introduction to stochastic dynamic programming, Academic press.
Ruszczynski, A., Shapiro, A. (2003). Handbooks in operations research and management science, volume 10, Stochastic programming, chapter 3, 141-209.
Sadi-Nezhad, S., Akhtari P. (2008). Possibilistic programming approach for fuzzy multidimensional analysis of preference in group decision making, Applied Soft Computing, 1703-1711.
Sadjadi, S. J., Ghazanfari, M., & Yousefli, A. (2010). Fuzzy pricing and marketing planning model: A possibilistic geometric programming approach. Expert Systems with Applications, 37(4), 3392-3397.
Sahinidis, N.V. (2004). Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities, Computers and Chemical Engineering, 28, 971–983.
Seifi A., Ponnambalam K., Vlach J. (1999). A unified approach to statistical design centering of integrated circuits with correlated parameters, IEEE transactions on circuits and systems, I46, 1, 190–196,.
Seifi, A., Ponnambalam, K., Vlach, J. (2000). Maximization of manufacturing yield of systems with arbitrary distributions of component values, Annals of operations research, 99, 373–383.
Tanaka H., Guo P., Zimmermann H.-J. (2000). Possibility distributions of fuzzy decision variables obtained from possibilistic linear programming problems, Fuzzy Sets and Systems, 113, 323-332.
Tanaka, H., Ichihashi, H., Asai, K. (1984). A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers, Control and cybernetic, 13, 186-194.
Tanaka, H., Uejima, S., Asia, K. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model, IEEE transaction on systems, management and cybernetic, 12, 903-907.
Vasant, M., Barsoumb, N.N., Bhattacharya, A. (2008). Possibilistic optimization in planning decision of construction industry, International journal of production economics, 111, 664–675.
Verdegay,J.L. (1984-1). A dual approach to solve the fuzzy linear programming, Fuzzy sets and Systems, 14, 131-141.
Verdegay,J.L. (1984-2). Application of fuzzy optimization in operational research, Control and Cybernetics, 13, 229-239.
Werners, B. (1987-1). Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints, European Journal of operational research, 31, 342-349.
Werners, B. (1987-2). An interactive fuzzy programming system, Fuzzy sets and systems, 23, 131-147.
Wojciechowski, J., Vlach, J., Opalski, L. (1997). Design for nonsymmetrical statistical distributions, IEEE transaction on circuits and systems, 44, 29-37.
Yousefli, A., Ghazanfari, M., Abiri, M. B. (2014). An Integrated Model for Optimization Oriented Decision Aiding and Rule Based Decision Making in Fuzzy Environment. Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, 2014, 1-13.
Yousefli A., Ghazanfari M., Shahanaghi K., Heydari M. (2008). A new heuristic model for fully fuzzy project scheduling. JUS, world academic press, 2, 73–78,.
Yousefli A., Heydari M., Shahanaghi K. (2009). Development of Linear Programming Technique for Multidimensional Analysis of Preference in Fuzzy Environment, JUS, world academic press, 3, 2, 108-113.

Zhao, R., Liu, B. (2005). Standby redundancy optimization problems with fuzzy lifetimes, Computers and industrial engineering, 49, 318-338.

Zhong, Q., Yue, Z., Guangyuan, W. (1994). On fuzzy random linear programming, Fuzzy sets and systems, 65, 31-49.

Zhong, Q., Guangyuan, W. (1993). On solutions and distribution problems of the linear programming with fuzzy random variable coefficients, Fuzzy sets and systems, 58, 155-170.

Zhou, J., Liu, B. (2007). Modeling capacitated location-allocation problem with fuzzy demands, Computers and industrial engineering, 53, 454-468.

Zimmerman H-J. (1996). Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers.