چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

معادل‌سازی یک مساله‌ی دوسطحی خطی درجه دوم با مسائل بهینه‌سازی یک هدفه با قیود خطی و روشی برای حل آن

مجید ادیب[۱] * و زهرا سادات کاظمی [۲]

دانشگاه زنجان
[۱] *madib@znu.ac.ir*
[۲] *kazemi@znu.ac.ir*

چکیده. مساله‌ی برنامه ریزی دوسطحی نوعی مدل برنامه‌ریزی است که در آن دو تصمیم گیرنده در دو سطح به‌گونه‌ای با یکدیگر در ارتباط باشند که یک تصمیم گیرنده در یک سطح می‌تواند بر اهداف و تصمیمات سطح دیگر اثر بگذارد. در بسیاری از سازمان‌ها و سیاست‌های اقتصادی تعیین شده توسط دولت فعالیت‌ها به صورت سلسله مراتبی می‌باشند. برنامه‌ریزی دوسطحی ابزارقوی برای مدل‌سازی و حل این‌گونه مسایل می‌باشد. بررسی مسایل برنامه‌ریزی دوسطحی به دلیل عدم تحدب و پیوستگی اساساً بسیار مشکل می‌باشند. بسیاری از مطالعات انجام شده در این زمینه به یافتن نقطه‌ی بهینه‌ی موضعی محدود شده است. در این مقاله ما روشی را برای به‌دست آوردن جواب سراسری رده‌ی خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی درجه دوم دوسطحی که در آن تابع هدف سطح بالا درجه دوم و تابع هدف سطح پایین خطی می‌باشد، با معادل‌سازی آن با یک مساله بهینه‌سازی تک هدفه با قیود خطی، ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمات و معرفی مساله اصلی

قبل از معرفی مساله اصلی به معرفی مقدمات و ارائه الگوریتمی که در بخش بعد جهت حل مساله اصلی بدان نیازمندیم می‌پردازیم. برای این منظور مساله درجه دوم NEQ زیر را که در

2010 Mathematics Subject Classification. 90A00
واژگان کلیدی. برنامه‌ریزی دوسطحی، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم .
* سخنران

آن $\mathbb{E}$ و $\mathbb{I}$ دو مجموعه اندیس هستند، در نظر بگیرید:

$$(NEQ)\min \frac{1}{2}x^TGx+g^Tx$$
$$s.t\ a_i^Tx=b_i, \qquad i\in\mathbb{E}$$
$$a_i^Tx\geq b_i, \qquad i\in\mathbb{I}$$

این مساله را می‌توان با یک فرآیند تکراری حل نمود. الگوریتم زیر یکی از الگوریتم‌های موجود در خصوص مساله‌ی NEQ است [۱].

الگوریتم حل مساله‌ی NEQ [۱]

۱. یک نقطه‌ی شدنی $x^{(1)}$ را انتخاب کنید (مثلا از طریق فاز یک روش سیمپلکس دو فازی) و قرار دهید $k=1$.

۲. مساله‌ی

$$(EQ):\frac{1}{2}s^TGs+s^T(Gx^{(k)}+g)$$
$$s.t:\ a_i^Ts=0, i\in\mathcal{A}$$

را برای به‌دست آوردن مسیر$s^{(k)}$ حل کنید که در آن $\mathcal{A}$ مجموعه اندیس‌های قیود موثر در $x^{(k)}$ است.

۳. اگر $s^{(k)}=0$ آن‌گاه ضرایب لاگرانژ$\lambda^{(k)}$ را به‌دست آورید و p را به‌گونه‌ای مشخص کنید که$\lambda_p=\min\lambda_i^{(k)}$ ، $i\in\mathcal{A}\cap I$. اگر $\lambda_p\geq 0$ آن‌گاه $x^{(k)}$ جواب است و توقف کنید، در غیر این صورت قرار دهید $\mathcal{A}:=\mathcal{A}\setminus\{p\}$ و مجدداً مساله‌ی EQ را حل کنید.

۴. قرار دهید

$$\alpha^{(k)}=\min\{1,\min\{\frac{b_i-a_i^Tx^{(k)}}{a_i^Ts^{(k)}}: i\in I\setminus\mathcal{A}, a_i^Ts^{(k)}<0\}\},$$
$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha^{(k)}s^{(k)}.$$

۵. k را یک واحد اضافه کنید و به قدم ۲ بروید.

توجه کنید که مساله‌ی EQ در گام۲ توسط روش حذفی قابل حل است[۱].

اکنون به معرفی مساله‌ی مورد نظر در این مقاله می‌پردازیم.

هدف اصلی این مقاله ارائه راهکاری برای حل مساله درجه دوم دو سطحی زیر است:

$$\min \quad F(x_1,x_2)=(x_1,x_2)^TQ(x_1,x_2),$$
$$\min_{x_2} \quad f(x_1,x_2)=q^Tx_2$$
$$s.t:\ A_1x_1+A_2x_2\leq b$$
$$x_1,x_2\geq 0 \tag{1.1}$$

که در آن $F(x_1, x_2)$ و $f(x_1, x_2)$ توابع هدف سطح بالایی و سطح پایینی نامیده می‌شوند و $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ به ترتیب متغیرهای تصمیم سطح بالایی و سطح پایینی هستند، به‌علاوه $p \in \mathbb{R}^{n_1}$، $q \in \mathbb{R}^{n_2}$ ، $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$ ، $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$ ، $b \in \mathbb{R}^m$، $n = n_1 + n_2$و Qیک ماتریس متقارن $n \times n$ به صورت زیر است

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}$$

که در آن Q_1، Q_2 و Q_3 ماتریس‌های باابعاد مناسب هستند. در این صورت ناحیه‌ی شدنی مساله (۱.۱)، مجموعه‌ی ناتهی و فشرده زیر است:

$$S = \{(x_1, x_2) : A_1x_1 + A_2x_2 \leq b, x_1, x_2 \geq 0\}.$$

برای برخی $x_1 \geq 0$ و ثابت، ناحیه‌ی شدنی مساله‌ی سطح پایین مساله‌ی (۱.۱) عبارتست از

$$S(x_1) = \{x_2 \geq 0 | A_2x_2 \leq b - A_1x_1\}.$$

تصویرS روی فضای تصمیم مساله سطح بالایی برابراست با

$$S(X_1) = \{x_1 \geq 0 | \text{وجود دارد } x_2 \geq 0; (x_1, x_2) \in S\}.$$

برای برخی $x_1 \in S(X_1)$ و ثابت ، مجموعه E تعریف شده در زیر را نیز ناحیه‌ی القایی مساله (۱.۱) می‌نامیم

$$E = \{(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in S, x_2 \in S(x_1)\}.$$

تعریف ۱.۱. *نقطه‌ی x_1وx_2 را یک جواب شدنی مساله‌ی (۱.۱) می‌نامیم اگر $(x_1, x_2) \in E$ در بخش بعد مساله‌ی (۱.۱) را با مجموعه‌ای از مسائل یک هدفه با قیود خطی معادل می‌کنیم.*

۲. معادل سازی مساله اصلی با یک مجموعه از مسائل یک هدفه با قیود خطی

در قضیه‌ی زیربا استفاده ازشرایط کروش کان تاکر[۱، ۲] در ارتباط با مساله‌ی سطح پایین (۱.۱) و دوگان متناظر آن، شرط بهینه بودن یک جواب مساله‌ی (۱.۱) ارائه شده است.

قضیه ۱.۲. *(x_1^*, x_2^*)جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱.۱) است اگروفقط اگر y^* موجود باشد که (x_1^*, x_2^*, y^*)جواب مساله‌ی برنامه‌ریزی زیر باشد.*

$$\begin{aligned} \min \quad & F(x_1,x_2) = (x_1, x_2)^T Q(x_1, x_2), \\ & s.t: \ A_1x_1 + A_2x_2 \leq b \\ & A_2^T y \leq q, \ q^T x_2 - (b - A_1x_1)^T y = 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0, y \leq 0 \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

توجه کنید که قضیه‌ی فوق مساله برنامه ریزی خطی درجه دوم دوسطحی (۱.۱) را با مساله‌ی برنامه‌ریزی (۱.۲) که تنها دارای یک تابع هدف می‌باشد، معادل کرده است. مشکل مساله(۱.۲) وجود محدودیت غیر خطی $q^T x_2 - (b - A_1x_1)^T y = 0$ است. می‌توان نشان داد که حل

مساله (۱.۲) با حل یک مجموعه از مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم محدب استاندارد با محدودیت های خطی معادل است. این مسائل عبارتند از :

$$\begin{aligned}(QP(y^i))\min \quad & F(x_1,x_2) = (x_1,x_2)^T Q(x_1,x_2),\\ & s.t:\ A_1x_1 + A_2x_2 \le b\\ & A_2^T y \le q,\ q^T x_2 - (b - A_1x_1)^T y^i = 0\\ & x_1, x_2 \ge 0\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

که در آن $\{y^1, y^2, \dots y^r\}$ مجموعه نقاط رأسی چندوجهی S است که به کمک برنامه‌ریزی خطی قابل تعیین هستند. توجه کنید که هریک از مسائل QP فوق توسط الگوریتم ارائه شده در بخش ۱ قابل حل هستند. بنابراین چون مجموعه مسائل (۲.۲) جواب بهینه‌ی خود را در رئوس نواحی شدنی متناظر اخذ می‌کنند [۲] ، جواب بهینه‌ی مساله (۱.۱) نیز در یکی از رئوس ناحیه‌ی شدنی آن به‌دست می‌آید. باتوجه به مطالب فوق فرآیند زیر راهکاری برای حل مساله (۱.۱) خواهد بود.

۱. مجموعه نقاط رأسی $\{y^1, y^2, \dots y^r\}$ از S را به کمک برنامه‌ریزی خطی بیابید.

۲. مسائل $QP(y^i)$ را توسط الگوریتم ارائه شده در بخش ۱ حل کنید. فرض کنید (x_1^k, x_2^k) جواب بهینه مساله $QP(y^i)$ باشد

۳. قرار دهید

$$F(x_1^j, x_2^j) = \max\{F(x_1^k, x_2^k) : k = 1, 2, \dots, r\}$$

۴. قرار دهید $(x_1, x_2)_{opt} = (x_1^j, x_2^j)$

مراجع

1. R. Fletcher, *Practical Methods of optimization* , Second Edition, Wiley, New York, 1987
2. M.S. Bazaara, H. D. Sherali, and C. M.Shetty *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms* ,Third Edition, Wiley, Interscience, 2006