

SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



سامانه ویراستاری STES



فیلم های آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی

کارگاه آنلاین
بررسی مقابله ای متون (مقدماتی)

کارگاه آنلاین
پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی

کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو



چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

استنباط آماری بر روی پارامترهای توزیع گاما سه پارامتری براساس داده های کامل و داده های سانسور فزاینده نوع دو

حمیده سیدموسوی* و آرزو حبیبی راد

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
hsm1360@yahoo.com
ahabibi@um.ac.ir

چکیده. هدف این مقاله برآورد پارامترهای توزیع گاما سه پارامتری براساس داده های کامل و داده های سانسور فزاینده نوع دو با کمک روش درستنمایی ماکزیمم می باشد. با توجه به اینکه معادلات درستنمایی جواب صریح ندارند، باید از روش های عددی برای حل معادلات درستنمایی کمک گرفت.

۱. پیش گفتار

توزیع گاما به طور گسترده در موضوعات قابلیت اعتماد-طول عمر، بیمه، هواشناسی، اقلیم شناسی و بسیاری از تحقیقات فیزیکی مورد استفاده قرار می گیرد.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 62F10; Secondary 62G30.
واژگان کلیدی. توزیع گاما سه پارامتری، برآورد درستنمایی ماکزیمم، سانسور فزاینده نوع

دو.
* سخنران

ح. سیدموسوی و آ. حبیبی راد

تابع چگالی احتمال این توزیع در حالت سه پارامتری به صورت زیر می باشد

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\gamma \Gamma(\beta)} \left(\frac{x - \alpha}{\gamma}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x - \alpha}{\gamma}\right)\right\} \quad (x > \alpha, \beta > 0, \gamma > 0). \quad (1.1)$$

که در آن α ، β و γ به ترتیب پارامترهای مکان، شکل و مقیاس هستند.

۲. استنباط درستنمایی در توزیع گاما سه پارامتری با داده های کامل

یک روش موفق برای استنباط درستنمایی در توزیع گاما سه پارامتری، استفاده از تغییر پارامتر می باشد. طرح پیشنهاد شده تقریباً همیشه می تواند وجود برآوردهای درستنمایی ماکزیمم را نشان دهد که از نظر عملی ارزش زیادی دارد. این روش نشان می دهد که استفاده از توزیع گاما تغییر پارامتریافته نسبت به توزیع اصلی خود برای پیدا کردن برآوردهای درستنمایی ماکزیمم موضعی، بهتر است. در ادامه مطالعات شبیه سازی مونت کارلو نیز اثربخشی روش ارائه شده را نشان می دهد.

۱.۲. برآورد پارامترها با استفاده از روش تغییر پارامتر. تغییر پارامترها را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\beta = \lambda^{-2}, \quad \gamma = \delta|\lambda| \quad \alpha = \mu - \delta\lambda^{-1} \quad (1.2)$$

آنگاه با اعمال آن در (۱.۱) خواهیم داشت:

$$f(x; \sigma, \mu, \lambda) = \frac{1}{\sigma \lambda \Gamma(\lambda^{-2})} [\lambda^{-2} \{1 + \lambda(\frac{x - \mu}{\sigma})\}]^{\lambda^{-2}-1} \quad (2.2)$$

$$\times \exp[-\lambda^{-2} \{1 + \lambda(\frac{x - \mu}{\sigma})\}] \quad (\sigma > 0, \lambda \neq 0) \quad (3.2)$$

که μ, σ, λ به ترتیب پارامترهای مکان، مقیاس و شکل هستند. معادلات درستنمایی برای (۲.۲) به شرح ذیل می باشند:

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{1 - z_i^2}{1 + \lambda z_i} = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda + z_i}{1 + \lambda z_i} = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = n \left\{ \frac{2}{\lambda^3} \psi\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + 2 \log \lambda \right\} + \sum \left\{ -\frac{2}{\lambda^3} \log(1 + \lambda z_i) \right. \\ \left. + \frac{\lambda(1 + z_i) + 2z_i}{\lambda^2(1 + \lambda z_i)} \right\} \end{cases}$$

توزیع گاما سه پارامتری

که $z_i = \frac{(x_i - \mu)}{\sigma}$ و ψ تابع دو گامایی نامیده می شود. L تابع درستنمایی و n اندازه نمونه است. از مجموع اولین و دومین معادله $\sum_{i=1}^n z_i = 0$ به دست می آید. بدین ترتیب برآورد درستنمایی پارامترها به صورت زیر است:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

و با قرار دادن $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0$ و $\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = 0$ برآوردهای درستنمایی ماکزیمم برای σ و μ را بدست آوریم. از دیگر مزایای مدل تغییر پارامتر یافته این است که پیدا کردن نقطه شروع در طرح تکراری آسان است و σ خیلی از نقطه بهینه $\hat{\sigma}(\mu)$ به ازای λ های مختلف دور نیست.

۳. استنباط درستنمایی تابع گاما سه پارامتری تحت سانسور فزاینده نوع دو اگر تابع چگالی احتمال توزیع گاما سه پارامتری را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$f(y; \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} (y - \gamma)^{\alpha-1} \exp^{-\frac{y-\gamma}{\beta}} \quad \gamma < y < \infty, \beta > 0, \alpha > 0$$

آنگاه تابع لگاریتم درستنمایی ماکزیمم تحت سانسور فزاینده نوع دو برابر:

$$\begin{aligned} \log L(\theta) = & \text{const.} - m \log \Gamma(\alpha) - m\alpha \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^m (y_j - \gamma) \\ & + (\alpha - 1) \sum_{j=1}^m \log(y_j - \gamma) + \sum_{j=1}^m R_j \log[1 - F(y_j)] \end{aligned}$$

که در آن

$$F(y_j) = \int_{\gamma}^{y_j} f(y) dy$$

سه معادله درستنمایی که باید به طور همزمان برای بدست آوردن برآورد درستنمایی ماکزیمم حل شوند به شرح ذیل می باشند:

ح. سیدموسوی و آ. حبیبی راد

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \log L}{\partial \gamma} = \frac{m}{\beta} - (\alpha - 1) \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j - \gamma} + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{j=1}^m R_j L_j = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{m\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \gamma) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^3}} \sum_{j=1}^m R_j (y_j - \gamma) L_j = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = -m\psi(\alpha) - m \log \beta + \sum_{j=1}^m \log(y_j - \gamma) \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{j=1}^m R_j (y_j - \gamma + \alpha\beta) L_j = 0 \end{array} \right.$$

که در آن $\psi(\alpha) = \frac{\partial \log \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha}$ تابع دی گاما و $L_j = \frac{g(z_j)}{1 - G(z_j)}$ تابع خطر

است. $z_j = \frac{y_j - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{y_j - \gamma - \alpha\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$ که تبدیل استاندارد هست و $g(z_j)$ تابع چگالی احتمال استاندارد توزیع گاما است با میانگین صفر و واریانس یک و پارامتر شکل α و $G(z_j)$ تابع توزیع تجمعی است که بصورت زیر نشان داده می شود

$$G(z_j) = \int_{-\sqrt{\alpha}}^{z_j} g(u) du.$$

با توجه به اینکه حل معادلات فوق به طور همزمان و با وجود $\psi(\alpha)$ تابع دو گامایی بسیار مشکل می باشد از این رو حل این معادلات را با روش های عددی از جمله نیوتن رافسون انجام می دهیم.

مراجع

1. H. Hirose, *Maximum likelihood parameter estimation in the three parameter gamma distribution*(1995), 343-354.
2. Indrani basak, N.balakrishnan, *Estimation for the three parameter gamma distribution based on progressively censored data*, (2012), 305-319.
3. N.balakrishnan,A.C Cohen, *Order statistics and Inference :Estimation Methods*,Academic Press,San Digo ,1991.

SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



سامانه ویراستاری STES



فیلم های آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی

توجه: بررسی مقاله ای متون (مقدماتی)

کارگاه آنلاین
بررسی مقابله ای متون (مقدماتی)

PROPOSAL
پروپوزال

توجه: پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی

کارگاه آنلاین
پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی

ISI
Scopus

توجه: آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو

کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو