چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

روش سینوس-کسینوس برای به دست آوردن جواب‌های با ساختار فشرده و غیرفشرده

کامیار نجومی ریک [۱] *، رشید خضری‌پور قرائی[۲]، و اکبر امیری ریک [۳]

kamyar_72000@yahoo.com [۱]
rashid.khezri@yahoo.com [۲]
a_amiri53@yahoo.com[۳]

چکیده. در این تحقیق، ما جواب‌های فشرده و غیرفشرده را برای معادلات پاشنده غیرخطی بیان می‌کنیم. روش سینوس-کسینوس برای بیان کردن این کار استفاده می‌شود. ساختارهای مختلف فیزیکی از شاخه‌های متمرکز و غیرمتمرکز مورد تاکید است. مدل‌های بسیاری برای نشان دادن نتایج اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱. پیش‌گفتار

در ریاضیات و فیزیک، سولیتون یک موج منزوی خود-تقویت‌کننده (یک بسته موج یا پالس) است که وقت با سرعت ثابت حرکت می‌کند شکلش را حفظ می‌کند. سولیتون‌ها در نتیجه خنثی سازی آثار غیرخطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شوند.'' آثار پاشندگی''، به رابطه پراش بین فرکانس و سرعت امواج بر می‌گردند.

۲. معادله کورت وگ-د-ورایزKDV

معادله کورت وگ-د-ورایز (Korteweg de-Vrise) مدل ریاضی برای امواج آب در نواحی کم عمق است و مثالی برای مطالعه امواج غیرخطی در دینامیک سیالات، پلاسما، و الاستیک رساناهاست. صورت‌های گوناگون این معادله عبارت است از

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial^{3} \phi}{\partial x}+6\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}=0,$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. کامپکتن، سولیتون، معادله تعمیم یافته، KDV .

* سخنران

که در اینجا ϕ تابعی از دو متغیر حقیقی t و x است.[۱] با جایگزینی این جواب در معادله اصلی KDV، معادله دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad (۱.۲)$$

معادله KDV یکی از مهم‌ترین معادلات اساسی است که در پدیده‌های غیرخطی نقش محوری ایفا می‌کند. برای تعیین جواب معادله فوق تغییر متغیر زیر را

$$u = u(x,t) = z(x - ct), \qquad (۲.۲)$$

که در آن C یک ثابت غیر صفر می‌باشد. در اینصورت با اختیار تغییر متغیر

$$\xi = x - ct, \qquad (۳.۲)$$

اگر در معادله (۱.۲) به جای u_{xxx} و uu_x و u_t مساویشان را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$-Cz_\xi + 3(z^2)_\xi + z_{\xi\xi\xi} = 0, \qquad (۴.۲)$$

اگر از طرفین رابطه (۴.۲) نسبت به ξ انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$-Cz + 3z^2 + z_{\xi\xi} = A, \qquad (۵.۲)$$

که در آن A ثابت انتگرال گیری می‌باشد. حال اگر از طرفین رابطه (۵.۲) نسبت به z انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$-\frac{1}{2}Cz^2 + z^3 + \int z_{\xi\xi}dz = Az,$$
$$-\frac{C}{2}z^2 + z^3 + \frac{1}{2}(z_\xi)^2 = Az + B,$$

که در آن B ثابت انتگرال گیری می باشد. [۲]
در نتیجه

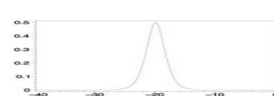
$$d\xi = \frac{dz}{z\sqrt{C - 2z}}, \qquad (۶.۲)$$

حال با جایگذاری روابط به دست آمده در رابطه (۶.۲) داریم:

$$w = \operatorname{sech}^{-1}\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v}}\sqrt{z}\right], \qquad (۷.۲)$$

بنا به روابط (۷.۲) و (۳.۲) (۲.۲) داریم

$$u(x,t) = \frac{1}{2}v\,\operatorname{sech}^2\left[-\frac{1}{2}\sqrt{C}(x - Ct)\right].$$



شکل ۱: جواب زنگوله‌ای معادله‌ای KDV

۱.۲. روش سینوس-کسینوس. مرحله اول) معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای با دو متغیر مستقل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots) = 0, \qquad (۸.۲)$$

که در آن $u(x,t)$ یک تابع مجهول است و P رابطه‌ای برحسب $u = u(x,t)$ و مشتقات پاره‌ای آن به صورت خطی و غیرخطی تعریف می‌شود.
مرحله دوم) برای یافتن جواب از نوع موج متحرک از معادله (۸.۲) تغییر متغیر

$$\xi = x - ct, \qquad (۹.۲)$$

را معرفی می‌کنیم.

۲.۲. حل نوع اول معادله KDV. شاخه متمرکز: معادله زیر را به عنوان نوع اول معادله KDV در نظر می‌گیریم

$$u_t + a(u^{n+1})_x + [u(u^n)_{xx}]_x = 0, \qquad a > 0 \qquad (۱۰.۲)$$

که در مورد بررسی قرارگرفته است. حال با استفاده از $\xi = x - ct,\ u(x,t) = u(\xi)$، معادله (۱۰.۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$-Cu_\xi + a(u^{n+1})_\xi + [u(u^n)_{\xi\xi}]_\xi = 0, \qquad a > 0 \qquad (۱۱.۲)$$

از معادله (۱۲.۲) انتگرال می‌گیریم، ثابت‌های انتگرال‌گیری را صفر قرار می‌دهیم و پس از ساده نمودن خواهیم داشت:

$$-C + au^n + (u^n)_\xi = 0,$$

حال با استفاده از روابط بالا داریم

$$\begin{aligned}-C + a\lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta - 1)\cos^{n\beta-2}(\mu\xi)\\ -n^2\mu^2\lambda^n\beta^2\cos^{n\beta}(\mu\xi) = 0.\end{aligned} \qquad (۱۲.۲)$$

به وضوح معادله (۱۲.۲) در نتیجه جواب‌های کامپکتن به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$u(x,t) = \begin{cases} \left\{\dfrac{2C}{a}\sin^2\left[\dfrac{\sqrt{a}}{2}(x - Ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n}} & |x - Ct| \le \dfrac{\pi}{\mu} \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \qquad (۱۳.۲)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \left\{\dfrac{2C}{a}\cos^2\left[\dfrac{\sqrt{a}}{2}(x - Ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n}} & |x - Ct| \le \dfrac{\pi}{2\mu} \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \qquad (۱۴.۲)$$

شاخه غیرمتمرکز: شاخه غیرمتمرکز

$$u_t - a(u^{n+1})_x + [u(u^n)_{xx}]_x = 0, \qquad a > 0 \qquad (۱۵.۲)$$

که با جایگزینی a به جای $-a$ به دست می‌آید. در نتیجه جواب‌های منفرد از معادله (۱۵.۲) به صورت زیر

$$u(x,t)=\left\{\left(\frac{۲C}{a}\right)\sinh^{۲}\left[\frac{\sqrt{a}}{۲}(x-Ct)\right]\right\}^{\frac{۱}{n}}$$

$$u(x,t)=\left\{\left(\frac{۲C}{a}\right)\cosh^{۲}\left[\frac{\sqrt{a}}{۲}(x-Ct)\right]\right\}^{\frac{۱}{n}}$$

می‌باشد که با قرار دادن a به جای $-a$ به ترتیب در معادله‌های (۱۴.۲) و (۱۳.۲) به دست می‌آیند. [۳]

۳. دست‌آوردهای پژوهش

هدف اصلی از این تحقیق، استفاده از روش سینوس-کسینوس است که روشی مناسب برای حل معادلات غیرخطی پاشنده است. در این تحقیق روش سینوس-کسینوس را با موفقیت، برای ایجاد جواب‌هایی با ساختار فشرده و غیرفشرده انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره ای غیرخطی به کار بردیم. روش ارایه شده و نتایج به دست آمده در این تحقیق، به وضوح نشان می‌دهد که روش سینوس-کسینوس، روشی کارآمد و قابل اطمینان است و از مهم‌ترین مزیت‌های این روش بررسی مستقیم این‌گونه معادلات با حداقل اندازه محاسبات است.

مراجع

1. Wazwaz, A. M. *Construction of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method*, Chaos Solitons Fractals 12 (2001), no. 8, 1549–1556.
2. Wazwaz, Abdul-Majid. *General compactons solutions for the focusing branch of the nonlinear dispersive $K(n,n)$ equations in higher-dimensional spaces*, Appl. Math. Comput. 133 (2002), no. 2-3, 213–227.
3. A. M. Wazwaz, *Partial Differential Equations* : Methods and Applications, Balkema Publishers, The Netherlands, 2002.