چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

بررسی ویژگیهای توزیع بتای نوع سوم ماتریسی

انیس ایرانمنش [۱] * و مریم یاسمی مقدم[۲]

دانشگاه آزاد اسلامی-واحد مشهد-دانشکده علوم-گروه آمار-مشهد-ایران
[۱] *anisiranmanesh@yahoo.com*
[۲] *maryamyassami@yahoo.com*

چکیده. در این مقاله توزیع بتای نوع سوم ماتریسی معرفی شده و ارتباط این توزیع با توزیع های بتای نوع اول و دوم ماتریسی بررسی شده است . هم چنین برخی از ویژگی های این توزیع ارائه شده است.

۱. پیش‌گفتار

توزیع بتا از توزیع های مهم و انعطاف پذیراست که در آمار کاربرد زیادی دارد، از جمله در آمار بیز به عنوان توزیع پیشین مورد استفاده قرار می گیرد. توزیع بتای نوع سوم یک متغیره در [۱] معرفی شده و آن را جانشین مناسبی برای توزیع بتای نوع اول دانسته اند. تعمیم ماتریسی توزیع بتای نوع سوم و برخی از ویژگیهای آن در [۴] و [۳] آمده است. در این مقاله در ادامه کار [۴] برخی از قضایای آن اثبات و برخی از ویژگیهای دیگر توزیع بتای نوع سوم بررسی می گردد.

تعریف ۱.۱. *برای متغیر مختلط $|z| < 1$ تابع فوق هندسی‌گوسی $_2F_1(a,b;c;z)$ بطوریکه a و b اعداد صحیح نامنفی و $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ باشند، به صورت زیر است([۵] را*

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 62H10; Secondary 62E20.
واژگان کلیدی. تابع بتا چند متغیره، توزیع بتای نوع سوم ماتریسی، تابع فوق هندسی‌گوسی، تابع فوق هندسی همشار هامبرت ماتریسی .
* سخنران

ببینید.)

$$
{}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt
$$
$$
, |arg(1-z)|<\pi,\ a>0, c-a>0.
$$

و ${}_2F_1(a,b;c;\boldsymbol{X})$ تابع فوق هندسی‌گوسی ماتریسی به صورت زیر تعریف می شود:

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;\boldsymbol{X}) &= \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\Gamma_m(c-a)}\int_{\boldsymbol{O}}^{\boldsymbol{I}_m} \det(\boldsymbol{R})^{a-\frac{m+1}{2}} \\
&\times \det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{R})^{c-a-\frac{m+1}{2}}\det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{X}\boldsymbol{R})^{-b}d\boldsymbol{R}, \\
& a>\frac{m+1}{2}, c-a>\frac{m+1}{2}.
\end{aligned}
$$

تعریف ۲.۱. *برای ماتریس معین مثبت $\boldsymbol{X}_{(m\times m)}$ تابع بتایm متغیره به صورت زیر تعریف می شود:*

$$
\begin{aligned}
B_m(a,b) &= \int_{\boldsymbol{O}}^{\boldsymbol{I}_m}\det(\boldsymbol{X})^{a-\frac{m+1}{2}}\det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{X})^{b-\frac{m+1}{2}}d\boldsymbol{X} \\
&, a>\frac{m-1}{2}, b>\frac{m-1}{2}.
\end{aligned}
$$

که در آن $\boldsymbol{I}_m$ ماتریس همانی$m\times m$ است.([۲] را ببینید.)

تعریف ۳.۱. *توزیع بتای نوع اول ماتریسی:* *ماتریس تصادفی معین مثبت $\boldsymbol{U}_{m\times m}$ دارای توزیع بتای نوع اول ماتریسی با پارامترهای α و β می باشد و به صورت $\boldsymbol{U}\sim B_m^1(\alpha,\beta)$ نشان داده می شود، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد([۳] راببینید.)*

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{U}) &= \frac{\det(\boldsymbol{U})^{\alpha-\frac{m+1}{2}}\det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{U})^{\beta-\frac{m+1}{2}}}{B_m(\alpha,\beta)} \\
&, \boldsymbol{O}<\boldsymbol{U}<\boldsymbol{I}_m,\ \alpha>\frac{(m-1)}{2},\ \beta>\frac{(m-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

تعریف ۴.۱. *توزیع بتای نوع دوم ماتریسی :* *ماتریس تصادفی معین مثبت $\boldsymbol{V}_{m\times m}$ دارای توزیع بتای نوع دوم ماتریسی با پارامترهای α و β می باشد و به صورت $\boldsymbol{V}\sim B_m^2(\alpha,\beta)$ نشان داده می شود، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد([۳] راببینید.)*

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{V}) &= \frac{\det(\boldsymbol{V})^{\alpha-\frac{m+1}{2}}\det(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{V})^{-(\alpha+\beta)}}{B_m(\alpha,\beta)},\ \boldsymbol{V}>\boldsymbol{O} \\
&, \ \alpha>\frac{(m-1)}{2},\ \beta>\frac{(m-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

نماد $\boldsymbol{V}>\boldsymbol{O}$ یعنی ماتریس $\boldsymbol{V}$ معین مثبت است.

تعریف ۵.۱. ***توزیع بتای نوع سوم ماتریسی:*** *ماتریس تصادفی معین مثبت $\boldsymbol{W}_{m\times m}$ دارای توزیع بتای نوع سوم ماتریسی با پارامترهای α و β می‌باشد و به صورت $\boldsymbol{W}\sim B_m^{۳}(\alpha,\beta)$ نشان داده می‌شود، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد([۴] را ببینید.)*

$$f(\boldsymbol{W}) = \frac{۲^{m\alpha}\det(\boldsymbol{W})^{\alpha-\frac{m+۱}{۲}}\det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{W})^{\beta-\frac{m+۱}{۲}}}{B_m(\alpha,\beta)\det(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{W})^{\alpha+\beta}},$$
$$\boldsymbol{O}<\boldsymbol{W}<\boldsymbol{I}_m,\ \alpha>\frac{(m-۱)}{۲},\ \beta>\frac{(m-۱)}{۲}.$$

که $B_m(\alpha,\beta)$ تابع بتای چند متغیره است.

تعریف ۶.۱. ***توزیع گامای ماتریسی :*** *ماتریس تصادفی متقارن معین مثبت $\boldsymbol{Y}_{m\times m}$ دارای توزیع گامای ماتریسی با پارامترهای Ψ و κ می‌باشد و به صورت $\boldsymbol{Y}\sim Ga_m(\kappa,\Psi)$ نشان داده می‌شود، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد([۳] راببینید.)*

$$f(\boldsymbol{Y}) = \frac{etr(-\Psi^{-۱}\boldsymbol{Y})\det(\boldsymbol{Y})^{\kappa-\frac{(m+۱)}{۲}}}{\Gamma_m(\kappa)\det(\Psi)^{\kappa}},\ \boldsymbol{Y}>\boldsymbol{O},\ \Psi>\boldsymbol{O},\ \kappa>\boldsymbol{O}.$$

۲. برخی از ویژگیهای توزیع بتای نوع سوم ماتریسی

قضیه ۱.۲. *اگر $\boldsymbol{U}\sim B_m^{۱}(\alpha,\beta)$ و $\boldsymbol{V}\sim B_m^{۲}(\beta,\alpha)$ آن‌گاه*

(i): $(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{U})^{-۱}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{U})\sim B_m^{۳}(\beta,\alpha)$.
(ii): $(۲\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{U})^{-۱}\boldsymbol{U}\sim B_m^{۳}(\alpha,\beta)$.
(iii): $(۲\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{V})^{-۱}\boldsymbol{V}\sim B_m^{۳}(\alpha,\beta)$
(iv): $(\boldsymbol{I}_m+۲\boldsymbol{V})^{-۱}\sim B_m^{۳}(\beta,\alpha)$.

قضیه ۲.۲. *اگر $\boldsymbol{W}\sim B_m^{۳}(\alpha,\beta)$ و $\boldsymbol{A}$ ماتریس غیر تصادفی و نا منفرد $m\times m$ باشد، آن‌گاه تابع چگالی احتمال $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AWA}'$ به صورت زیر است:*

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{۲^{m\alpha}\det(\boldsymbol{X})^{\alpha-\frac{m+۱}{۲}}\det(\boldsymbol{AA}'-\boldsymbol{X})^{\beta-\frac{m+۱}{۲}}}{\det(\boldsymbol{AA}')^{-\frac{m+۱}{۲}}B_m(\alpha,\beta)\det(\boldsymbol{AA}'+\boldsymbol{X})^{\alpha+\beta}},\ \boldsymbol{O}<\boldsymbol{X}<\boldsymbol{AA}'.$$

بنابراین $\boldsymbol{X}\sim B_m^{۳}(\alpha,\beta;\boldsymbol{AA}')$.

قضیه ۳.۲. *اگر $\boldsymbol{W}\sim B_m^{۳}(\alpha,\beta)$ آن‌گاه تابع چگالی احتمال $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{W}^{-۱}$ به صورت زیر است:*

$$f(\boldsymbol{Y}) = \frac{۲^{m\alpha}\det(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{I}_m)^{\beta-\frac{m+۱}{۲}}}{B_m(\alpha,\beta)\det(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{Y})^{\alpha+\beta}},\ \boldsymbol{Y}>\boldsymbol{I}_m.$$

قضیه ۴.۲. *اگر $\boldsymbol{Y}_۱$ و $\boldsymbol{Y}_۲$ مستقل باشند و $\boldsymbol{Y}_i\sim Ga_m(\kappa_i,\boldsymbol{I}_m)$، $i=۱,۲$ آن‌گاه*

$$(\boldsymbol{Y}_۱+۲\boldsymbol{Y}_۲)^{-\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{Y}_۱(\boldsymbol{Y}_۱+۲\boldsymbol{Y}_۲)^{-\frac{۱}{۲}}\sim B_m^{۳}(\kappa_۱,\kappa_۲).$$

قضیه ۵.۲. اگر $\boldsymbol{W} \sim B_m^{۳}(\alpha, \beta)$ آن‌گاه تابع توزیع تجمعی $\boldsymbol{W}$ به صورت $G(\Omega)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} G(\Omega) &= P(\boldsymbol{W} < \Omega) = P\left(\boldsymbol{U} < (\boldsymbol{I}_m + \Omega)^{-۱}(\boldsymbol{I}_m - \Omega)\right) \\ &= \frac{\Gamma_m(\alpha+\beta)\Gamma_m[\frac{(m+۱)}{۲})]}{\Gamma_m(\alpha)\Gamma_m[\beta + \frac{(m+۱)}{۲}]} \det\left((\boldsymbol{I}_m + \Omega)^{-۱}(\boldsymbol{I}_m - \Omega)\right)^{\beta} \\ &\quad \times {}_۲F_۱\left(\beta, -\alpha + \frac{m+۱}{۲}; \beta + \frac{m+۱}{۲}; (\boldsymbol{I}_m + \Omega)^{-۱}(\boldsymbol{I}_m - \Omega)\right) \\ &\quad , \ \boldsymbol{O} < \Omega < \boldsymbol{I}_m. \end{aligned}$$

که $\boldsymbol{U} \sim B_m^{۳}(\alpha, \beta)$ است.

قضیه ۶.۲. اگر $\boldsymbol{W} \sim B_m^{۳}(\alpha, \beta)$ آن‌گاه:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\det(\boldsymbol{W})^r \det(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{W})^s}{\det(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{W})^t}\right] &= \frac{\Gamma_m(\alpha+r)\Gamma_m(\beta+s)\Gamma_m(\alpha+\beta)}{\Gamma_m(\alpha)\Gamma_m(\beta)\Gamma_m(\alpha+\beta+r+s)} \\ &\quad \times ۲^{-m(\beta+t)} {}_۲F_۱\left(\beta+s, \alpha+\beta+t; \alpha+\beta+r+s; \frac{\boldsymbol{I}_m}{۲}\right) \\ &\quad , (\alpha+r) > \frac{(m-۱)}{۲}, \ (\beta+s) > \frac{(m-۱)}{۲} \ . \end{aligned}$$

قضیه ۷.۲. اگر $\boldsymbol{X} \sim B_m^{۳}(\alpha, \beta)$ و $\boldsymbol{Y} \sim Ga_m(\kappa, \boldsymbol{I}_m)$ آن‌گاه تابع چگالی احتمال $\boldsymbol{Z}_۱ = \boldsymbol{X}^{-\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-\frac{۱}{۲}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{Z}_۱) &= \frac{\Gamma_m(\alpha+\kappa)\Gamma_m(\alpha+\beta)\det(\boldsymbol{Z}_۱)^{\kappa - \frac{(m+۱)}{۲}} etr(-\boldsymbol{Z}_۱)}{۲^{m\beta}\Gamma_m(\kappa)\Gamma_m(\alpha)\Gamma_m(\alpha+\beta+\kappa)} \\ &\quad \times \Phi_۱\left(\beta, \alpha+\beta; \alpha+\beta+\kappa; \frac{\boldsymbol{I}_m}{۲}, \boldsymbol{Z}_۱\right), \ \boldsymbol{Z}_۱ > \boldsymbol{O} \ . \end{aligned}$$

که $\Phi_۱$ تابع فوق هندسی همشار هامبرت ماتریسی است.

مراجع

1. L. Cardeno, D. K. Nagar and L. E. Sanchez, Beta Type 3 Distribution and Its Multivariate Generalization, *Journal of Mathematical Science*, 21(2005), no. 2, 225-241.
2. A. K. Gupta and D. K. Nagar, *Matrix Variate Distributions*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
3. A. K. Gupta and D. K. Nagar , Matrix-variate beta distribution, *International Journal of Mathematics and Mathematical Science*, 23(2000), no. 7, 449–459 .
4. A. K. Gupta and D. K. Nagar, Properties of matrix variate beta type 3 distribution, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*,(2009) ,doi:10.1155/2009/308518.
5. Y. l. Luke, *The special functions and their approximations, Vol. 1.* Academic Press, 1969.