چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای برای مسأله‌ی حمل‌ونقل چندهدفی فازی

حسن حسن پور[1] و مهدیه موذنی [2]*

گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند
hhassanpour@birjand.ac.ir[1]
mahdiyemoazeni@yahoo.com[2]

چکیده. روش برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای برای مسأله‌ی حمل‌ونقل چندهدفی فازی با سطوح انتظار فازی چندگانه و مقادیر عرضه و تقاضای فازی، در این مقاله مورد بحث قرار گرفته است.

۰. پیش‌گفتار

برنامه‌ریزی آرمانی یکی از روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی که در آن سعی می‌شود به جای کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی توابع هدف، انحرافات آن‌ها از اعدادی به نام سطوح آرمانی یا سطوح انتظار تصمیم‌گیرنده، کمینه شود. برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای[۲]، مسأله‌ای را مورد بحث قرار می‌دهد که در آن برای هر یک از توابع هدف، سطوح آرمانی متعددی (به ترتیب اهمیت) توسط تصمیم‌گیرنده ارائه شده است.

یک روش برای مدل‌بندی مسأله‌ی برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای، استفاده از عبارت‌های ضربی متغیرهای دودویی برای سطوح انتظار چندگانه است که توسط چانگ[1] ارائه شده است[۲]. این روش به تصمیم‌گیرنده اجازه می‌دهد که سطوح انتظار چندگزینه‌ای برای هر هدف در نظربگیرد، که می‌توانند دقیق یا فازی باشند. چانگ همچنین روشی که عبارت‌های ضربی متغیرهای دودویی با یک متغیر پیوسته جایگزین می‌شوند، ارائه کرده است. در این مقاله، مسأله‌ی حمل‌ونقل با

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 90C29.

واژگان کلیدی. مسأله‌ی حمل‌ونقل، برنامه‌ریزی آرمانی، برنامه‌ریزی خطی، محدودیت‌های فازی، برنامه‌ریزی چندگزینه‌ای فازی.
* سخنران

[1] Chang

مقادیر عرضه و تقاضای فازی و سطوح انتظار چندگانه‌ی فازی با بکارگیری مفاهیم فازی حل می‌شود.

۲. مدل ریاضی

مدل حمل و نقل چندهدفی زیر را در نظر بگیرید:

$$c_p(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^{p}x_{ij}\cong \tilde{c_{p1}} \text{ یا } \tilde{c_{p2}} \text{ یا} \cdots \text{ یا } \tilde{c_{pk}} \qquad p=1,2,\cdots,q$$

$$\begin{array}{lll} s.t & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\cong \tilde{a}_i & i=1,2,\cdots,m \\ & \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\cong \tilde{b_j} & j=1,2,\cdots,n \\ & x_{ij}\geq 0,\ x_{ij}\in\mathbb{Z} & i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n \end{array} \tag{۱.۲}$$

که در آن منظور از $\cong$، تساوی فازی است و هر تابع هدف تنها یکی از k سطح انتظار فازی $\tilde{c_{p1}}$، $\tilde{c_{p2}}$، $\cdots$، $\tilde{c_{pk}}$ که به ترتیب اهمیت چیده شده‌اند را می‌تواند اختیار کند. فضای جواب مدل (۱.۲) را با X نمایش می‌دهیم. جواب بهینه‌ی مسأله‌ی فوق را با درنظر گرفتن چهار سطح انتظار فازی به دست می‌آوریم. تعداد سطوح انتظار فازی $2^2=4$ است، بنابراین دو متغیر دودویی برای این مدل نیاز است[۳].

با درنظر گرفتن سطوح انتظار، توابع هدف را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} c_p(x) &= z_{p1}z_{p2}\tilde{c_{p1}}+(1-z_{p1})z_{p2}\tilde{c_{p2}}+z_{p1}(1-z_{p2})\tilde{c_{p3}} \\ &\quad +(1-z_{p1})(1-z_{p2})\tilde{c_{p4}} \qquad p=1,2,\cdots,q \end{aligned}$$

که z_{p1} و z_{p2} متغیرهای دودویی می‌باشند.

با استفاده از متغیرهای کمکی مانند λ_p $(p=1,2,\cdots,q)$، مدل (۱.۲) به صورت زیر نوشته می‌شود[۱]:

$$\begin{array}{ll} Max & \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_q \\ s.t & \lambda_p\leq z_{p1}z_{p2}\mu_1(c_p(x))+(1-z_{p1})z_{p2}\mu_2(c_p(x))+ \\ & z_{p1}(1-z_{p2})\mu_3(c_p(x))+(1-z_{p1})(1-z_{p2})\mu_4(c_p(x)) \end{array}$$

$$x\in X,\ 0\leq\lambda_p\leq 1,\ z_{p1},z_{p2}=0 \text{ یا } 1 \qquad p=1,2,\cdots,q$$

چنانچه سطوح انتظار $\tilde{c_{pl}}$، $(p=1,2,\cdots,q,l=1,2,3,4)$ اعداد فازی مثلثی به شکل $\tilde{c_{pl}}=(c_{pl},d_{pl}^{-},d_{pl}^{+})$ باشند، که c_{pl}، d_{pl}^{-} و d_{pl}^{+} به ترتیب مرکز، گسترش چپ و راست عدد فازی می‌باشند، قیود اول مدل فوق به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \lambda_p\leq 1-[&\tfrac{c_p(x)-c_{p1}}{d_{p1}^{-}}z_{p1}z_{p2}+\tfrac{c_p(x)-c_{p2}}{d_{p2}^{-}}z_{p1}(1-z_{p2})+ \\ &\tfrac{c_p(x)-c_{p3}}{d_{p3}^{-}}z_{p2}(1-z_{p1})+\tfrac{c_p(x)-c_{p4}}{d_{p4}^{-}}(1-z_{p1})(1-z_{p2})] \\ & p=1,2,\cdots,q \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

$$\lambda_p \leq 1 - [\frac{c_{p1}-c_p(x)}{d^+_{p1}} z_{p1} z_{p2} + \frac{c_{p2}-c_p(x)}{d^+_{p2}} z_{p1}(1 - z_{p2}) + \frac{c_{p3}-c_p(x)}{d^+_{p3}} z_{p2}(1 - z_{p1}) + \frac{c_{p4}-c_p(x)}{d^+_{p4}}(1 - z_{p1})(1 - z_{p2})] \quad p = 1, 2, \cdots, q \qquad (3.2)$$

عبارات حاصل‌ضربی متغیرهای دودویی در مسأله‌ی فوق را می‌توان با تعریف $x_p = z_{p1} z_{p2}$، که x_p در نامساوی‌های زیر صدق می‌کند، به شکل زیر خطی نمود:

$$(z_{p1} + z_{p2} - 2) + 1 \leq x_p \leq (2 - z_{p1} - z_{p2}) + 1$$
$$x_p \leq z_{p1}$$
$$x_p \leq z_{p2}$$
$$x_p \geq 0$$

در واقع از نامساوی‌های فوق داریم:

الف) اگر $z_{p1} = z_{p2} = 1$ آن‌گاه $x_p = 1$. ب) اگر $z_{p1} z_{p2} = 0$ آن‌گاه $x_p = 0$

بنابراین قیود (۲.۲) و (۳.۲) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\lambda_p \leq 1 - \sum_{l=1}^{4} \frac{c_p(x) - c_{pl}}{d^-_{pl}} S_{pl}(B) \qquad p = 1, 2, \cdots, q$$
$$\lambda_p \leq 1 - \sum_{l=1}^{4} \frac{c_{pl} - c_p(x)}{d^+_{pl}} S_{pl}(B) \qquad p = 1, 2, \cdots, q$$

که $S_{pl}(B)$، دنباله‌ای از اعداد دودویی را نشان می‌دهد که تضمین می‌کند تنها یک سطح انتظار انتخاب شود.

اکنون با استفاده از تابع رتبه‌بندی روبنز[۴]، که عبارت است از

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (inf \tilde{A}_\alpha + sup \tilde{A}_\alpha) d\alpha$$

که در آن $\tilde{A}_\alpha$، برش αی عدد فازی $\tilde{A}$ است، اعداد فازی سمت راست قیود عرضه و تقاضا را با مقادیر غیر فازی $R(\tilde{a}_i)$ و $R(\tilde{b}_j)$ جایگزین می‌کنیم. به عنوان مثال تابع رتبه‌بندی فوق برای عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ به صورت زیر است:

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{4}[a_1 + a_2 + a_3 + a_4]$$

فرض کنید $a_i = R(\tilde{a}_i)$ و $b_j = R(\tilde{b}_j)$. اگر اعداد a_i وb_j صحیح باشند و $\sum a_i = \sum b_j$، مدل متوازن و قابل حل است. در غیر این صورت با اضافه کردن متغیرهای انحرافی نامنفی به سمت چپ قیود عرضه و تقاضا، مدل را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$Max \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_q - (\sum_{i=1}^{m}(n_{a_i} + p_{a_i}) + \sum_{j=1}^{n}(n_{b_j} + p_{b_j}))$$

$$
\begin{aligned}
s.t \qquad & \lambda_p \leq ۱ - \sum_{l=۱}^{۴} \frac{c_p(x)-c_{pl}}{d_{pl}^-} S_{pl}(B) && p = ۱,۲,\cdots,q \\
& \lambda_p \leq ۱ - \sum_{l=۱}^{۴} \frac{c_{pl}-c_p(x)}{d_{pl}^+} S_{pl}(B) && p = ۱,۲,\cdots,q \\
& \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} + n_{a_i} - p_{a_i} = a_i && i = ۱,۲,\cdots,m \\
& \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} + n_{b_j} - p_{b_j} = b_j && j = ۱,۲,\cdots,n \\
& (z_{p۱} + z_{p۲} - ۲) + ۱ \leq x_p \leq (۲ - z_{p۱} - z_{p۲}) + ۱ \\
& x_p \leq z_{p۱} && p = ۱,۲,\cdots,q \\
& x_p \leq z_{p۲} && p = ۱,۲,\cdots,q \\
& x_p \geq ۰ && p = ۱,۲,\cdots,q \\
& \lambda_p \geq ۰ && p = ۱,۲,\cdots,q \\
& x_{ij} \geq ۰, \;\; x_{ij} \in \mathbb{Z} && i = ۱,۲,\cdots,m, \;\; j = ۱,۲,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{۴.۲}
$$

مراجع

1. B. Bankian, K. Shahanaghi, M.S. Jabalameli, *Fuzzy multi-choice goal programming*, Appl. Math. Model. 36 (2012) 1415–1420.
2. C.T. Chang, *Multi choice goal programming*, Omega, Int. J. Manage. Sci. 35 (2007) 389–396.
3. D. Dutta, A.S. Murthy, *Multi choice goal programming approach for a fuzzy transportation problem*, IJRRAS. 2 (2010), no. 2, 132–139.
4. P. Fortemps, M. Roubens, *Ranking and defuzzification methods based on area compensation*, Fuzzy Sets Syst. 82 (1996), 319-330.