



چکیده مبسوط مقالات ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران  
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

## مدل‌بندی ریاضی سرعت جریان خون دوبعدی در رگ‌های مخروطی شکل با گرفتگی متوالی

احمدرضا حقیقی<sup>۱\*</sup>، ایرج میرزایی<sup>۲</sup>، و محمد شهبازی اصل<sup>۳</sup>

<sup>۱،۳</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی ارومیه

ah.haghighi@uut.ac.ir

mshahbazia@yahoo.com

<sup>۲</sup> گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه

i.mirzaee@mee.uut.ac.ir

چکیده. در این مقاله یک مدل ریاضی برای جریان خون غیرخطی دوبعدی در طول رگ مخروطی شکل دچار تنگی، ارائه شده است. ظاهر شدن جملات غیرخطی در معادلات ناویر-استوکس حاکم بر جریان خون، بکاربردن شرایط مرزی مناسب، در نظر گرفتن گرادیان فشار ورودی و محاسبه پروفیل سرعت با پیچیدگی کمتر، از ویژگی‌های عملیات تحلیلی، عددی ارائه شده می‌باشد. با بررسی تاثیر پارامترهای مختلفی همچون مخروطی شکل بودن، حرکت دیواره و تنگی بر پروفیل سرعت، کارائی مدل ارائه شده به اثبات رسیده است.

### ۱. پیش‌گفتار

تنگی رگ که معمولاً آن را استنوز می‌نامند، در اثر رسوب چربی‌ها و بافت‌های فیبری در قطر داخلی رگ به وجود می‌آید. در اثر این عارضه گردش خون در نواحی فراتر از تنگی کاهش می‌یابد که این امر منجر به اختلال جدی در سیستم گردش خون می‌شود. با توجه به اینکه رگ‌های خونی در بازه‌های مکرر دوشاخه می‌شوند و قطر آن‌ها در طول رگ تغییر می‌کند، مفهوم جریان در طول رگ‌هایی با سطح مقطع متغیر، تبدیل به پایه و اساس کلاس گسترده‌ای از مسائل مربوط به جریان خون شد. استفاده از معادلات ناویر-استوکس خطی برای جریان یک بعدی در رگ‌های کوچکتر مناسب است، اما این معادلات در رگ‌های بزرگ‌تر با جملات غیرخطی تلفیق می‌شوند. پروفیل غیرخطی سرعت جریان خون پالسی در طول آنورت نزولی توسط گودمن و ایمیدا مورد مطالعه

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 92B05; Secondary 92C35.

واژگان کلیدی. جریان خون، رگ مخروطی شکل، گرفتگی، سیال نیوتونی.  
\* سخنران

ا.ر.حقیقی، ا.میرزایی، و م.شهبازی اصل

قرار گرفت [۲]، آنها رگ را مخروطی شکل و دارای سطح مقطع یکنواخت در نظر گرفتند. با توجه به توضیحات بالا، در تجزیه و تحلیل ارائه شده سعی بر آن شده است تا یک مدل ریاضی برای مطالعه پروفیل سرعت جریان خون غیرخطی در طول رگ مخروطی شکل تحت گرفتگی متوالی، با توجه به گرادیان فشار ضربانی، ارائه دهیم. دیواره رگ به صورت الاستیک و جریان خون گذرنده از آن نیوتونی فرض شده است. به منظور شبیه‌سازی هرچه بیشتر شرایط واقعی، هندسه مسئله به صورت وابسته به زمان، گرفتگی از نوع متوالی و رگ مخروطی شکل در نظر گرفته شده است.

## ۲. فرمول‌بندی ریاضی

سیستم مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  که به ترتیب بیانگر شعاع، زاویه و مختصات طولی نقطه‌ی طول رگ می‌باشد را در نظر می‌گیریم. هندسه وابسته به زمان برای گرفتگی متوالی به صورت زیر می‌باشد [۳]:

$$R(z, t) = \begin{cases} \left[ (mz + a) - \tau_m \cos(\phi) \frac{(z-d)}{l_0} \times \left\{ 11 - \frac{94}{31_0} (z-d) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{22}{1_0} (z-d)^2 - \frac{22}{31_0} (z-d)^3 \right\} \right] a_1(t), & d \leq z \leq d + \frac{2}{3} l_0 \\ (mz + a) a_1(t), & \text{O.W} \end{cases}$$

که در آن  $R(z, t)$  شعاع رگ در ناحیه گرفتگی،  $a$  شعاع ثابت قسمت باز رگ،  $m = \tan(\phi)$  که زاویه مخروط، و تابع وابسته به زمان  $a_1(t)$  به صورت  $a_1(t) = 1 + \frac{t}{T} \cos(\omega t - 1)$  می‌باشد که فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  به صورت  $\omega = 2\pi f_p$  است،  $f_p$  فرکانس پالسی و  $T$  بیانگر پارامتر زمان است. جریان خون در رگ مخروطی شکل را به صورت غیرخطی، ناپایدار، متقارن محور، دوبعدی و کاملاً گسترش یافته در نظر می‌گیریم. معادله ناویر-استوکس محوری و معادله پیوستگی حاکم بر جریان خون، در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشند [۱]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

که  $u$  و  $v$  بیانگر سرعت محوری و شعاعی،  $p$  فشار،  $\rho$  دانسیته،  $\mu$  ویسکوزیته خون و گرادیان فشار ضربانی  $\frac{\partial p}{\partial z}$  به صورت  $-\frac{\partial p}{\partial z} = A_0 + A_1 \cos \omega t$  است که  $A_0$  دامنه ثابت و  $A_1$  دامنه پالسی از گرادیان فشار می‌باشد که در اثر فشار انبساط و انقباض قلب به وجود می‌آید. روی  $r = 0$  شرایط مرزی  $u = 0$ ،  $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$  و روی  $r = R$  شرایط مرزی  $u = \frac{\partial R}{\partial t}$ ،  $w = 0$  برقرار می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم  $u(r, z, 0) = 0 = w(r, z, 0)$ . تبدیل مختصات  $\xi = r/R$  را روی معادلات و شرایط مرزی بالا اعمال می‌کنیم، سپس رابطه به دست آمده برای (۲.۲) را در  $\xi R$  ضرب کرده نسبت به  $\xi$  انتگرال می‌گیریم، سپس شرایط مرزی را در آن تاثیر می‌دهیم:

$$u = \frac{\partial R}{\partial z} \left[ \xi w - \frac{2}{\xi} \int_0^\xi \xi w d\xi \right] - \frac{R}{\xi} \int_0^\xi \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi \quad (3.2)$$

پروفیل سرعت جریان خون

$$\int_0^1 \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi = - \int_0^1 \xi \left\{ w \frac{\partial R}{R} \frac{\partial R}{\partial z} + f(\xi) \frac{\partial R}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \right\} d\xi \quad (4.2)$$

$f(\xi)$  تابع دلخواه‌ای است که در رابطه ۱  $\int_0^1 \xi f(\xi) d\xi = 1$  صدق می‌کند، بنابراین فرض می‌کنیم  $f(\xi) = -\frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k+1}{k} (\xi^{2k} - 1)$  و در رابطه (۴.۲) قرار می‌دهیم، سپس با فرض اینکه:  $w = \sum_{k=1}^N \alpha_k(z, t) (\xi^{2k} - 1)$  رابطه به‌دست آمده را در (۳.۲) قرار می‌دهیم:

$$u = \xi \frac{\partial R}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial R}{\partial z} \alpha_k - \frac{1}{Nk} \frac{\partial R}{\partial t} \right) (\xi^{2k} - 1) \quad (5.2)$$

با جایگذاری مفروضات بالا و رابطه (۵.۲) در معادله ناویر-استوکس محوری داریم:

$$\xi^{2N} \sum_{k=1}^N S_k \xi^{2k} + \sum_{k=1}^N P_k \xi^{2k} - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{4\mu\alpha_1}{\rho R^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2T_1}{R} \right) = 0 \quad (6.2)$$

باتوجه به برقراری رابطه بالا برای هر  $\xi$ ، تمامی ضرایب توان‌های  $\xi$  باید برابر صفر باشند. از طرفی به‌منظور صرف‌نظر کردن از جملات شامل  $\xi^{2N}$  باید جملات  $S_k$  و  $P_k$  برای  $k = N$  حذف شوند. در نهایت سیستم  $N - 1$  معادله ای زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \frac{2P_{1,k}}{RN} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{2P_{2,k}}{R} + \frac{4\mu\alpha_{k+1}}{\rho R^2} (k+1)^2, k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} = - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} - \frac{4\mu\alpha_1}{\rho R^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2T_1}{R} \quad (8.2)$$

با جایگذاری رابطه (۷.۲) در (۸.۲) داریم:

$$\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} = \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{N-1} P_{2,k} - \frac{2}{RN} \frac{\partial R}{\partial t} \sum_{k=1}^{N-1} P_{1,k} - \frac{4\mu}{\rho R^2} \sum_{k=1}^N k^2 \alpha_k + \frac{2T_1}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (9.2)$$

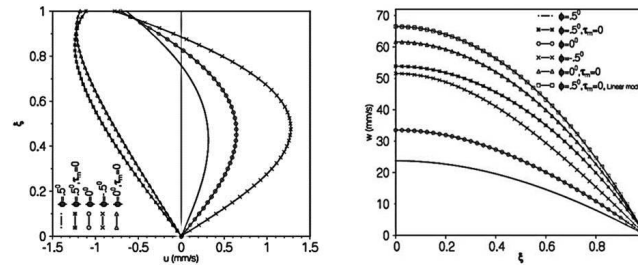
بنابراین ابتدا با در نظر گرفتن شرط اولیه  $\alpha_k = 0$  و گرادیان فشار، مقدار  $\alpha_k$  را محاسبه کرده سپس از رابطه (۵.۲) و فرض ارائه شده برای  $w$  سرعت جریان خون را به‌دست می‌آوریم.

### ۳. نتایج و بحث‌های عددی

در نتایج عددی ارائه شده از پارامترهای مقابل استفاده می‌کنیم:  $L = 40$  [۱]  $a = 1/52, \rho = 1060, d = 5, \tau_m = 0/4a, A_0 = 500, A_1 = 0/2A_0, \mu = 0/35$  برای حل عددی سیستم معادلات (۹.۲) و (۷.۲) روش رونگه-کوتا انتخاب شده است. با استفاده از روشی که در طی مقاله توضیح داده شد، نتایج عددی به دست آمده‌اند. اشکال ارائه شده پروفیل سرعت جریان خون در نقطه  $z=10$  و لحظه  $t=0.25s$  را نشان می‌دهد. با بررسی اشکال ارائه شده می‌توان تاثیر عواملی مانند مخروطی شکل بودن رگ (در حضور گرفتگی و بدون گرفتگی)، غیرخطی بودن و حرکت دیواره بر پروفیل سرعت جریان خون، را بررسی کرد. با بررسی گراف‌های ارائه‌شده نتیجه می‌گیریم که در هر دو حالت گرفتگی و عدم گرفتگی، با افزایش زاویه مخروطی رگ، سرعت محوری افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده

ا.ر.حقیقی، ا.میرزایی، و م.شهبازی اصل

از مدل‌های خطی به طور چشمگیری بیشتر از مدل‌های غیرخطی می‌باشد. تحت شرایط گرفتگی، پروفیل سرعت شعاعی با نزدیک شدن به دیواره به دلیل حرکت دیواره از سمت مثبت به طرف منفی حرکت می‌کند، این امر نشانگر وجود جریان برگشتی نزدیک دیواره رگ، به دلیل حرکت دیواره، می‌باشد تجزیه تحلیل ارائه شده پروفیل سرعت جریان خون را به صورت سری توانی ارائه می‌دهد. دقت تقریب‌ها را می‌توان به سادگی با افزایش دادن جملات سری افزایش داد.



شکل ۱: پروفیل سرعت محوری و سرعت شعاعی

#### ۴. پیوست

$$S_k = \frac{\Upsilon}{R} \left( S_{\Upsilon,k} - \frac{S_{\backslash,k}}{N} \frac{\partial R}{\partial t} \right), S_{\backslash,k} = \sum_{j=k}^N \frac{N+k-j}{j} \alpha_{N+k-j},$$

$$P_k = \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{\Upsilon}{R} \left( P_{\Upsilon,k} - \frac{P_{\backslash,k}}{N} \frac{\partial R}{\partial t} \right) - \frac{\Upsilon \mu \alpha_{k+1}}{\rho R^{\Upsilon}} (k+1)^{\Upsilon},$$

$$P_{\backslash,k} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j \alpha_j}{k-j} - \sum_{j=1}^N \frac{k \alpha_k}{j}, S_{\Upsilon,k} = \sum_{j=1}^N \alpha_{N+k-j} \beta_j,$$

$$P_{\Upsilon,k} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\beta_{k-j}} - \sum_{j=1}^N (\alpha_j \beta_k + \alpha_k \beta_j), T_{\backslash} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{j=1}^N \beta_j$$

$$\beta_k = \frac{k+1}{Nk} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial z} \alpha_k$$

#### مراجع

1. S. Chakravarty And P. K. Mandal, *Two-dimensional blood flow through tapered arteries under stenotic conditions*, Internat. J. Non-Linear Mech. 35 (2000), 779–793.
2. K. Imaeda And F.O. Goodman, *Analysis of nonlinear pulsatile blood flow in arteries*, J. Biomech. 13 (1980), 1007–1022.
3. Z. Ismail, I. Abdullah, N. Mustapha And N. Amin, *A power-law model of blood flow through a tapered overlapping stenosed artery*, Appl. Math. Comput. 195 (2008), 669–680.