چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

رابطه بین محیط، مساحت و بهینه سازی

هادی بصیرزاده

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی
دانشگاه شهید چمران اهواز
basirzad@scu.ac.ir

چکیده. در این مقاله یک مدل برنامه ریزی غیر خطی با اعداد صحیح را برای حل مسئله تقسیمات جزئی بهینه ارائه می‌دهیم. این مدل تلاش می کند رابطه ای بین محیط ، مساحت و بهینه سازی برقرار نماید. رابطه بین محیط و مساحت پیشتر از نظر هندسی مورد توجه بوده و تلاش هائی برای حل مسئله تقسیمات جزئی بهینه نیز با استفاده از برنامه ریزی پویا صورت گرفته است. این مسئله به ویژه وقتی قید صحیح بودن اندازه تقسیمات مد نظر باشد و یا اندازه محیط عددی صحیح باشد و به دنبال چند ضلعی بسته ای با اضلاع صحیح و با ماکزیمم مساحت باشیم اهمیت پیدا می‌کند. مدل ارائه شده در این مقاله سفارش می پذیرد و قادر است چند تائی های صحیح که در شرایط خاص توسط تصمیم گیرنده مشخص می‌شود را به دست آورد. کاربرد این مدل در مسائل بهینه سازی با اعداد صحیح و حساب تغییرات اهمیت دارد. در پایان چند مثال برای تشریح مدل ارائه گردیده است.

۱. پیش‌گفتار

مساحت و محیط اشکال هندسي و رابطه ي بين آنها همواره مورد توجه بوده است . تلاش براي برقراري ارتباط بين مساحت و محيط در يك مثلث با استفاده از اضلاع مشخص و بدون داشتن ارتفاع آن مربوط به تلاش Heron است . فرمول هرون قادر است مساحت مثلث را با استفاده از اندازه ي اضلاع به دست آورد. Zenodorus رياضي دان آلماني درمورد مساحت اشكال با توجه به قطر ثابت مطالعه كرده و مساحت آنها را باهم مقايسه كرده است. او دريافت كه مساحت يك دايره با محيط ثابت بزرگتر از مساحت هر چند ضلعي با همان محيط است. Bryan Engelker رابطه مساحت و محيط چند ضلعي ها با توجه به قطر آنها را مورد بررسي قرار داده است. همه ي چند ضلعي هاي منتظم داراي بيشترين مساحت در ميان چند ضلعي هاي با همان محيط هستند. بزرگترين قطر يك چند ضلعي و رابطه آن با مساحت با توجه به محيط ثابت مورد توجه Hensen و همكاران قرار گرفت و آنها موفق

2010 Mathematics Subject Classification. 90C30, 90C10, 90C90.

واژگان کلیدی. (برنامه ریزی غیر خطی، برنامه ریزی با اعداد صحیح، کاربرد بهینه سازي) .

شدند دو هشت ضلعي بيابند كه مساحتي بيشتر از مساحت هشت ضلعي هاي منتظم دارند. Robert Bieri روبرت بير آلماني يك شش ضلعي با قطر ثابت ارائه داد كه در ميان بقيه ي شش ضلعي ها با همان قطر ثابت بيشترين مساحت را داردو ادعا نمود كه شش ضلعي منتظم بيشترين مساحت را ندارد. R. L. Graham گراهام ثابت كرد كه اين شش ضلعي در ميان همه شش ضلعي هاي با قطر ثابت مقدار بيشينه مساحت را دارد. یک مسئله قدیمی درحساب تغییرات وبهینه سازی وجودداردکه بیان می کندیک مستطیل بامحیط ثابت A که دارای بیشترین مساحت باشد یک مربع است که دارای اضلاع برابر $\frac{A}{4}$ می باشد. مشابه این مسئله تحت عنوان مسئله تقسیمات بهینه درمسائل بهینه سازی داریم که طول A رااگربخواهیم به n قسمت تقسیم کنیم که دارای ماکزیمم حاصلضرب قسمت هاشودطول هرقسمت برابر $\frac{A}{n}$ می باشد. باالهام ازاین مسائل به دنبال یک مسئله جدید هستیم وآن این است که در مستطیل شرط صحیح بودن اضلاع را می‌خواهیم اضافه کنیم ودرمسئله تقسیمات بهینه نیز شرط صحیح بودن قسمت‌ها را اضافه می کنیم.اگر شرط صحیح بودن متغیرها را درمسئله بالا اضافه کنیم این مسئله همیشه دارای جواب مشخص وثابتی نیست وفقط زمانی دارای جواب قابل پیش بینی است که محیط A در چهارضلعی ضریبی از ۴ باشد و یا در مسئله تقسیمات بهین A ضریبی از n باشد.
در چهارضلعی اگر A ضریبی از ۴ نباشد دیگر جواب یک مربع نیست و ممکن است یک چهارضلعی نامنظم باشد.
دراین مقاله می خواهیم بامحیط ثابت و دلخواه A یک نوع چهارضلعی‌هائی را بنا کنیم که دارای اضلاع صحیح باشند. شکل ساخت این چندضلعی راطوری آغاز می‌کنیم که بتوانیم پنج ضلعی‌ها و شش ضلعی‌ها و... n ضلعی‌هائی بنا کنیم و این روند را برای n ضلعی‌ها ی با اضلاع صحیح تعمیم دهیم.

۲. فرآیند ساخت

محیط ثابت A داده شده است. با دو ضلع دلخواه و تا حد امکان کوچک تر یا مساوی $\frac{A}{4}$، دو ضلع از یک مثلث قائم الزاویه مانند a و b را در نظر بگیرید. اندازه وتر c از فرمول فیثاغورث $a^2+b^2=c^2$ به دست می آید. درگوشه ای از وتر c، ضلع دیگری را بنا می کنیم که عمود بر وتر باشد این ضلع را d می نامیم. اگر ازگوشه دیگر c به انتهای ضلع d وصل کنیم ضلع e را خواهیم داشت. چهار ضلعی حاصل یک چهار ضلعی است که دارای اضلاع a,b,d,e است و در رابطه ی $a^2+b^2+d^2=e^2$ صدق می کند. این رابطه را شرط هادی می نامیم. اضلاع a,b,d,e در شرط محیط باید صدق کنند یعنی

$$a+b+d+e=A$$

۳. تبدیل مسئله به يك مسئله بهينه سازي

برای آنکه این مسئله را به یک مسئله ی بهینه سازی تبدیل کنیم باید یک تابع هدف مناسب برای آن تعریف کنیم. تابع هدف می تواند
(۱) ماکزیمم کردن مساحت چهارضلعی
(۲) ماکزیمم کردن حاصلضرب اضلاع
یا تابع هدف های دیگری از نوع کمینه سازی یا... باشد. اگر شرط صحیح بودن متغیرها را نیز در نظر بگیریم مسئله مشکل ترهم می شود و ممکن است مسئله همیشه دارای جواب نباشد. یعنی با برخی از

اعداد به عنوان محیط همیشه نمی توان چهارضلعی‌ای بنا کرد که در شرایط مسئله صدق کند. اما اگر محیط را مناسب انتخاب کنیم مسئله دارای جواب است. فرض کنید مسئله را با هدف ماکزیمم کردن حاصلضرب اضلاع دنبال کنیم، بامدل سازی مسئله به عنوان یک مسئله بهینه سازی می توان مدل زیر را برای مسئله ارائه داد:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_\circ = xyzw \\ s.t \quad & \begin{cases} x+y+z+w=A \\ x^۲+y^۲+z^۲=w^۲ \\ x,\, y\,,\, z \in N \end{cases} \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

که $x,\, y,\, z,\, w$ اضلاع چهارضلعی، A محیط ثابت داده شده و N مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد. این مدل یک مدل برنامه ریزی غیرخطی با اعداد صحیح می‌باشد که به سادگی قابل حل نیست و نرم افزار خاص خود را می‌طلبد. برای مثال نرم افزار winQSB نمی‌تواند آن راحل کند. نقش A در این مسئله قابل اهمیت است که توسط تصمیم گیرنده به مسئله تحمیل می‌شود. این مدل سفارش می پذیرد و بر اساس سفارش پاسخ می‌دهد برای مثال در این مدل می‌توان شرط صحیح بودن را برای برخی اضلاع در نظر گرفت و بقیه اضلاع بتوانند مقادیر حقیقی بگیرند. همچنین می توان شرط هادی را نادیده گرفت که در این صورت یک مسئله تقسیمات بهین خواهیم داشت که در قسمت بعد به آن می‌پردازیم. به جای ماکزیمم حاصلضرب می‌توان ماکزیمم مساحت یا مینیمم مساحت را در نظر گرفت. لذا این مدل یک مدل قابل انعطاف براساس نظر تصمیم گیرنده است.

مثال ۱.۳. *الف) چهارضلعی با محیطی برابر ۸ متر بنا کنید بطوریکه حاصلضرب اضلاع آن ماکزیمم شود.*

$$\begin{aligned} \max \quad & x_\circ = xyzw \\ s.t \quad & \begin{cases} x+y+z+w=۸ \\ x_۱,\, y_۱\,,\, z_۱, w \in R^+ \end{cases} \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

جواب این مسئله $x=y=z=w=۲$ *خواهدبود.*
ب) چهارضلعی با محیط برابر ۸ بنا کنید که حاصلضرب اضلاع آن ماکزیمم و اضلاع همه صحیح و در شرط هادی نیز صدق کند.
مدل این مسئله به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & x_\circ = xyzw \\ s.t \quad & \begin{cases} x+y+z+w=۸ \\ x^۲+y^۲+z^۲=w^۲ \\ x,\, y\,,\, z \in N \end{cases} \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

است که جواب آن ۲،۱ ،۲ ،۳ می باشد که با پاسخ قسمت (الف) متفاوت است.

توجه داریم که در (الف) مسئله شرط صحیح بودن را مطرح نکرده بود اما پاسخ صحیح بدست آمد این به دلیل مناسب بودن A بود که A مضربی از ۴ بود. بدیهی است که اگر $\frac{A}{۴}$ عدد صحیحی نباشد، مسئله دارای جواب صحیح نخواهدبود.

۴. مسئله تقسیمات جزئی بهین با اعداد صحیح

مساله تقسیمات جزئی بهین به صورت زیراست:
طول A داده شده است ، A را به n قسمت تقسیم کنید بطوری که حاصلضرب n قسمت، ماکزیمم شود.

$$\max \quad x_0 = \prod_{i=1}^{n} y_i \qquad s.t \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = A \\ y_i \geq 0 \end{cases} \tag{۱.۴}$$

این مسئله دارای جواب $\frac{A}{n}$ برای همه متغیرهاست . اگر $\frac{A}{n}$ عدد صحیح باشد متغیرها دارای جواب صحیح و اگر $\frac{A}{n}$ عدد صحیح نباشد پاسخ غیر صحیح خواهد بود و

$$y_1^* = y_2^* = \ \dots \ = y_n^* = \frac{A}{n}$$

اگر شرط صحیح بودن متغیرها را به مسئله اضافه کنیم و $\frac{A}{n}$ صحیح نباشد مسئله دارای جواب صحیح به صورت $y_1 = y_2 = \ \dots \ = y_n = \frac{A}{n}$ نخواهد بود و باید دنبال جواب های دیگری باشیم که از قبل قابل پیش بینی نیست.
مدل این مسئله به صورت زیر خواهدبود:

$$\max \quad x_0 = \prod_{i=1}^{n} y_i \qquad s.t \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = A \\ y_i \in N, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{۲.۴}$$

مثال ۱.۴. *لوله ای به طول ۱۰ متر را به سه قسمت صحیح تقسیم کنید به طوری که حاصلضرب سه طول ماکزیمم شود.*

نظر به اینکه ترتیب y_iها اهمیت ندارد، جواب (۳،۳،۴) با مقدار تابع هدف برابر ۳۶ جواب بهین مسئله است.

مراجع

1. Engelker. Bryan, *Area and Perimeter of Polygons*, MAT Exam Expository Papers,(2006).
2. John H. Reif and Stephen R. Tate, *Optimal size integer division circuits*, Siam journal on computing, (1990).
3. Hamdy A. Taha . *Integer programming, theory, Applications and Computations*, 8th Ed, Academic press INC, (1975).
4. Hamdy D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear programming, theory and algorithms*, Third edition, (2006).