چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

کنترل بهینه زمانی سیستم‌های دوبعدی راسر با تاخیر در بردار حالت

فاطمه انجیلی [۱] * و حجت احسنی طهرانی[۲]

[۱] *fenjili@shahroodut.ac.ir*
[۲] *hahsani@shahroodut.ac.ir*

چکیده. در این مقاله روشی نو جهت کنترل بهینه سیستم‌های خطی دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر با تاخیر زمانی در متغیر حالت ارائه شده است. این روش در دو مرحله صورت می‌پذیرد در مرحله اول سیستم تاخیری با تعریف بردار افزوده به سیستم دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی تبدیل می‌شود و سپس در مرحله دوم با استفاده از تبدیلات تشابهی مقدماتی سیستم به دست آمده به‌فرم همدم برداری تبدیل شده و در نهایت ماتریس پس‌خورد حالت F که همه مقادیرویژه سیستم حلقه بسته را به صفر می‌برد را محاسبه می‌کنیم. در نهایت جهت روش پیشنهادی مثال عددی ارائه می‌گردد.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله سیستم‌های دوبعدی گسسته زمانی مدل راسر با تاخیر زمانی در متغیر حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد و با استفاده از تعریف بردار افزوده و تبدیل فضای همدم برداری کنترل‌گر بهینه زمانی را محاسبه می‌کنیم. سیستم دوبعدی گسسته زمانی راسر با q تاخیر در بردار حالت را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{q} A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k,j) \\ x^v(i,j-k) \end{bmatrix} + Bu(i,j) \qquad (1.1)$$

به‌طوری که $x^h(i,j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i,j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ به‌ترتیب بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه (i,j) می‌باشند و $A_k = \begin{bmatrix} A^k_{11} & A^k_{12} \\ A^k_{21} & A^k_{22} \end{bmatrix}$ برای $k = 0, \dots, q$ که در آن $A^k_{11} \in$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 93C05; Secondary 93C55, 49N05.

واژگان کلیدی. سیستم‌های دوبعدی با تاخیر، کنترل بهینه زمانی، ماتریس پس‌خورد حالت، مقادیرویژه، سیستم حلقه بسته. .

* سخنران

$\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$، $A^k_{12}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_2}$، $A^k_{21}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_1}$ و $A^k_{22}\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ که $B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$ $B_1\in\mathbb{R}^{n_1\times m}$، $B_2\in\mathbb{R}^{n_2\times m}$ و $u(i,j)\in\mathbb{R}^m$ بردار ورودی سیستم (۱.۱) می‌باشد.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

۱.۲. طراحی فرم راسر بدون تاخیر زمانی. جهت کنترل این‌گونه سیستم‌ها ابتدا بردارهای افزوده زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}^h(i,j)=\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\ x^h(i-1,j)\\ \vdots\\ x^h(i-q,j)\end{bmatrix},\qquad \bar{x}^v(i,j)=\begin{bmatrix}x^v(i,j)\\ x^v(i,j-1)\\ \vdots\\ x^v(i,j-q)\end{bmatrix}\tag{۱.۲}$$

لذا معادله تاخیری (۱.۱) را می‌توان با جایگذاری بردارهای حالت افزوده (۱.۲) به‌فرم معادله حالت دوبعدی راسر بدون تاخیر زمانی زیر تبدیل کرد:

$$\begin{bmatrix}\bar{x}^h(i+1,j)\\ \bar{x}^v(i,j+1)\end{bmatrix}=\bar{A}\begin{bmatrix}\bar{x}^h(i,j)\\ \bar{x}^v(i,j)\end{bmatrix}+\bar{B}u(i,j)\tag{۲.۲}$$

به‌طوری که $\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{N\times N}$ و $\bar{B}=\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{N\times m}$ که

$N=(q+1)(n_1+n_2)$ و $\bar{A}_{11}=\begin{bmatrix}A^0_{11} & A^1_{11} & \dots & A^{q-1}_{11} & A^q_{11}\\ I_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & I_{n_1} & 0\end{bmatrix}$،

$\bar{A}_{12}=\begin{bmatrix}A^0_{12} & A^1_{12} & \dots & A^{q-1}_{12} & A^q_{12}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$، $\bar{A}_{21}=\begin{bmatrix}A^0_{21} & A^1_{21} & \dots & A^{q-1}_{21} & A^q_{21}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$،

$\bar{A}_{22}=\begin{bmatrix}A^0_{22} & A^1_{22} & \dots & A^{q-1}_{22} & A^q_{22}\\ I_{n_2} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & I_{n_2} & 0\end{bmatrix}$ و $\bar{B}_1=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$، $\bar{B}_2=\begin{bmatrix}B_2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$.

حال برای معادله حالت (۲.۲) قانون کنترل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(i,j)=\begin{bmatrix}\bar{F}_1 & \bar{F}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}^h(i,j)\\ \bar{x}^v(i,j)\end{bmatrix}\tag{۳.۲}$$

که $\bar{F}_1$ و $\bar{F}_2$ به‌ترتیب دارای بعد $m\times n_1$ و $m\times n_2$ می‌باشند. با جایگذاری قانون کنترل در معادله (۲.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\bar{x}^h(i+1,j)\\ \bar{x}^v(i,j+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11}+\bar{B}_1\bar{F}_1 & \bar{A}_{12}+\bar{B}_1\bar{F}_2\\ \bar{A}_{21}+\bar{B}_2\bar{F}_1 & \bar{A}_{22}+\bar{B}_2\bar{F}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}^h(i,j)\\ \bar{x}^v(i,j)\end{bmatrix}=\bar{\Gamma}\begin{bmatrix}\bar{x}^h(i,j)\\ \bar{x}^v(i,j)\end{bmatrix}$$

هدف محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت $\begin{bmatrix}\bar{F}_۱ & \bar{F}_۲\end{bmatrix}$ است به گونه‌ای که مقادیرویژه ماتریس پس‌خورد حلقه بسته $\bar{\Gamma}$ همگی صفر باشند.

۲.۲. محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت بهینه زمانی.

قضیه ۱.۲. *مدل راسر سیستم دوبعدی (۲.۲) به طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر سیستم یک بعدی* $\bar{x}(i+۱) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i)$ *به‌طور مجانبی پایدار باشد* [۱].

جهت محاسبه کنترل‌گر بهینه زمانی معادله حالت (۱.۱) ابتدا آن را به‌فرم معادله حالت (۲.۲) تبدیل نموده و سپس با توجه به قضیه (۱.۲) زوج کنترل‌پذیر $(\bar{A}, \bar{B})$ را در نظر می‌گیریم. بردار حالت را با استفاده از ماتریس تبدیل T به فضای همدم برداری تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}\bar{x}^h(i,j)\\ \bar{x}^v(i,j)\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}\tilde{x}^h(i,j)\\ \tilde{x}^v(i,j)\end{bmatrix} \qquad (۴.۲)$$

که T توسط عملیات تشابهی مقدماتی به‌دست می‌آید. با جایگذاری رابطه (۴.۲) در معادله (۲.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}^h(i+۱,j)\\ \tilde{x}^v(i,j+۱)\end{bmatrix} = \tilde{A}\begin{bmatrix}\tilde{x}^h(i,j)\\ \tilde{x}^v(i,j)\end{bmatrix} + \tilde{B}u(i,j) \qquad (۵.۲)$$

که در آن $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به‌فرم همدم برداری زیر می‌باشند:

$$\tilde{A} = T^{-۱}\bar{A}T = \begin{bmatrix} & G_{\circ\, m\times N} & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I_{N-m} & & \circ_{(N-m)\times m}\end{bmatrix},\ \tilde{B} = T^{-۱}\bar{B} = \begin{bmatrix}B_{\circ\, m\times m}\\ \cdots\\ \circ\end{bmatrix}$$

در صورتی که ناورداهای کرونکر نامنظم باشند ستون‌های ماتریس واحد I در $\tilde{A}$ جابه‌جا می‌شوند [۲]. قانون کنترل را برای سیستم (۵.۲) در فضای همدم برداری به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(i,j) = \begin{bmatrix}\tilde{F}_۱ & \tilde{F}_۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}^h(i,j)\\ \tilde{x}^v(i,j)\end{bmatrix} = \tilde{F}\begin{bmatrix}\tilde{x}^h(i,j)\\ \tilde{x}^v(i,j)\end{bmatrix} \qquad (۶.۲)$$

ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیرویژه صفر را به ماتریس حلقه بسته سیستم همدم برداری دوبعدی (۵.۲) اختصاص می‌دهد را به‌صورت $\tilde{F} = -B_\circ^{-۱}G_\circ$ تعریف می‌کنیم. لذا ماتریس پس‌خورد حالت بهینه زمانی سیستم (۲.۲) به‌صورت $\begin{bmatrix}\bar{F}_۱ & \bar{F}_۲\end{bmatrix} = \tilde{F}T^{-۱}$ محاسبه می‌شود. با جایگذاری رابطه (۶.۲) در معادله (۵.۲) ماتریس حلقه بسته تبدیل یافته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ به‌فرم جردن بلوکی با مقادیرویژه صفر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} & \circ_{m\times N} & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ I_{N-m} & & \circ_{(N-m)\times m}\end{bmatrix}$$

از آن‌جایی که ماتریس $\tilde{\Gamma}$ با ماتریس حلقه بسته $\bar{\Gamma}$ متشابه می‌باشد لذا مقادیرویژه $\bar{\Gamma}$ نیز صفر خواهد بود. در صورتی که ناورداهای کرونکر زوج $(\bar{A}, \bar{B})$ را $p_۱, p_۲, \ldots, p_m$ بنامیم اندیس پوچ‌توانی ماتریس حلقه بسته $\bar{\Gamma}$ به‌صورت $v = max\{p_۱, p_۲, \ldots, p_m\}$ تعریف می‌شود به‌عبارت دیگر سیستم توصیف شده (۱.۱) حداکثر در v گام به‌حالت تعادل صفر می‌رسد.

۳.۲. مثال عددی: سیستم دوبعدی گسسته زمانی تاخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} x^h(i-1,j) \\ x^v(i,j-1) \end{bmatrix} + Bu(i,j)$$

که در آن $x^h(i,j) \in \mathbb{R}^2$، $x^v(i,j) \in \mathbb{R}^1$ و $A_0 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$، $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

و $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. با به کارگیری روش ارائه شده ماتریس پس‌خورد حالت بهینه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 12.2412 & -2.4956 & -0.0439 \\ -8.5921 & 0.3377 & -1.0439 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 3.3465 & -0.0000 & 5.6228 \\ -3.1535 & -0.3333 & -4.3772 \end{bmatrix}$$

محاسبه می‌شود. ناورداهای کرونکر زوج کنترل‌پذیر $(\bar{A}, \bar{B})$ عبارت است از $p_1 = 3, p_2 = 3$ لذا سیستم دوبعدی فوق کنترل بهینه زمانی بوده و در سه گام به‌حالت تعادل صفر می‌رسد.

۴.۲. نتیجه‌گیری: در این مقاله روشی جدید برای کنترل بهینه سیستم‌های دوبعدی گسسته زمانی تاخیری مدل راسر ارائه گردید. نوآوری این مقاله تبدیل سیستم دوبعدی تاخیری به‌فرم سیستم یک بعدی بدون تاخیر و سپس استفاده از تبدیلات تشابهی جهت کنترل بهینه زمانی آن می‌باشد. شرایط پایداری این روش نسبت به روش‌های دیگر مثل روش نامساوی‌های ماتریسی خطی ساده‌تر می‌باشد و برای پایداری مجانبی آن به محاسبات کمتری نیاز دارد [۳].

مراجع

1. A.Hmamed, M.Ait Rami and M.Alfidi, *controller synthesis for positive 2D systems described by the Roesser model*, IEEE CDC, 47(2008), 9 –11.
2. S. M. Karbassi and H. A. Tehrani, *Parameterizations of the State Feedback Controllers for Linear Multivariable Systems*, Int. J. Comp. Math. with Appl. 44 (2002), 1057–1065
3. W. Paszke, J. Lamb, K. Galkowski, S. Xu, Z. Lin, Z. Lind, *Robust stability and stabilisation of 2D discrete state-delayed systems*, Systems & Control Letters, 51 (2004), 277 – 291