چکیده مبسوط مقالات ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

بررسی ویژگی‌های توزیع نمایی-توانی دو مدی و مقایسه‌ی آن با توزیع لاپلاس دو مدی و توزیع نرمال دو مدی

انیس ایرانمنش[1] *، الهام بابایی[2]، و امیر دانشگر [3]

[۱,۲,۳] *دانشگاه آزاد اسلامی-واحد مشهد-گروه آمار-مشهد-ایران*
[۱] *anisiranmanesh@yahoo.com*
[۲] *e.babaee66@gmail.com*
[۳] *Amir.daneshgar@yahoo.com*

چکیده. در این مقاله توزیع نمایی توانی دو مدی را معرفی کرده و توزیع نرمال دو مدی و توزیع لاپلاس دو مدی را به عنوان حالت خاصی از آن مورد بررسی قرار می‌دهیم. هم‌چنین آنتروپی رنی و شانون، مد و تابع مشخصه را برای آن‌ها محاسبه می‌کنیم. در خاتمه این توزیعها را به مجموعه‌ای از داده‌ها برازش داده و با معیارهای لگاریتم درستنمایی، AIC و BIC با هم مقایسه می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

در برخی از پدیده‌ها، توزیع داده‌ها دو مدی می‌باشد. از جمله در توصیف مشخصات ماده، مطالعه‌ای توسط دیریکس و همکاران [۲] انجام شده است که در آن توزیع سایز غلات دو مدی است. در علم هواشناسی ژانگ و همکاران [۵] نشان دادند که بخار آب در مناطق استوایی معمولاً دارای توزیع‌های دو مدی می‌باشد. به همین دلیل بررسی توزیع‌های دو مدی از اهمیت خاصی در نظریه توزیع‌ها برخوردار است. در این مقاله به بررسی توزیع نمایی-توانی دومدی و حالت‌های خاص آن یعنی توزیع لاپلاس دومدی ونرمال دومدی و ویژگیهای آنها می‌پردازیم.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 62E15 Secondary .
واژگان کلیدی. آنتروپی شانون و رنی، تابع مشخصه، توزیع لاپلاس دو مدی، توزیع نرمال دو مدی، توزیع نمایی توانی دو مدی .
* سخنران

تعریف ۱.۱. *(حسن و حیجازی [۳])گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی-توانی دو مدی با پارامترهای $-\infty < \mu < \infty$ ، $\delta \geq 0$ ، $\alpha \geq 1$ و $\psi > 0$ است؛ که با نماد $X \sim BPE(\mu, \psi, \delta, \alpha)$ نشان داده می‌شود، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:*

$$f(x) = \frac{\alpha\left|\frac{x-\mu}{\psi}\right|^{\delta}\exp\left(-\left|\frac{x-\mu}{\psi}\right|^{\alpha}\right)}{2\psi\Gamma\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)} \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{1.1}$$

در این معادله μ پارامتر مکان، ψ و α پارامترهای مقیاس هستند که α به طور معکوس با واریانس توزیع رابطه دارد و δ پارامتر دو مدی می‌باشد. اگر $X \sim BPE(\mu, \psi, \delta, \alpha)$ آن‌گاه

$E(X) = \mu$ و $Var(X) = \frac{\psi^2\Gamma\left(\frac{\delta+3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)}$.

حالت‌های خاص:

الف: اگر در تابع چگالی احتمال (۱.۱)، $\delta = 0$ آن‌گاه توزیع نمایی-توانی به دست می‌آید، که با نماد $X \sim PE(\mu, \sigma, \beta)$ نشان داده می‌شود و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \frac{\beta}{2\sigma\Gamma(\frac{1}{\beta})}\exp\Big(-\Big|\frac{x-\mu}{\sigma}\Big|^{\beta}\Big) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

که در آن $-\infty < \mu < \infty$، $\sigma > 0$ و $\beta > 0$. در این صورت $E(X) = \mu$ و $Var(X) = \frac{\sigma^2\Gamma(\frac{3}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})}$. برای اطلاعات بیشتر به ناداراجا [۴] مراجعه کنید.

ب: اگر در تابع چگالی احتمال (۱.۱)، $\alpha = \delta = 2$ آن‌گاه توزیع نرمال دو مدی به دست می‌آید، که تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{2\left(\frac{x-\mu}{\psi}\right)^2\exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\psi}\right)^2\right]}{\psi\sqrt{\pi}} \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{2.1}$$

با قرار دادن $\psi^2 = 2\sigma^2$ در (۲.۱) تابع چگالی نرمال دو مدی با پارامترهای μ و σ^2 به دست می آید که با نماد $X \sim BN(\mu, \sigma^2)$ نشان داده می شود و چگالی آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\exp\Big[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big] \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{3.1}$$

در این صورت $E(X) = \mu$ و $Var(X) = 3\sigma^2$.

ج: اگر در تابع چگالی احتمال (۱.۱)، $\alpha = \delta = 1$ آن‌گاه توزیع لاپلاس دو مدی به دست می‌آید، که تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{2\psi}\Big|\frac{x-\mu}{\psi}\Big|\exp\Big[-\Big|\frac{x-\mu}{\psi}\Big|\Big] \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

که در آن $-\infty < \mu < \infty$ ، $\psi > 0$ وبا نماد $X \sim BL(\mu,\psi)$ نشان داده می شود. در این صورت $E(X) = \mu$ و $Var(X) = 6\psi^2$. (حسن و حیجازی [3])

قضیه ۲.۱. *اگر $X \sim BPE(\mu,\psi,\delta,\alpha)$ آن‌گاه نمای این توزیع عبارتست از:*

$$\widetilde{x} = \pm\Big[\Big(\frac{\delta}{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\psi + \mu\Big]$$

قضیه ۳.۱. *اگر $X \sim BPE(\mu,\psi,\delta,\alpha)$ آن‌گاه تابع مشخصه‌ی متغیر تصادفی X به صورت زیر است:*

$$\varphi_X(t) = \frac{\exp(it\mu)}{\Gamma\Big(\frac{\delta+1}{\alpha}\Big)}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(t\psi)^{2m}\Gamma\Big(\frac{2m+\delta+1}{\alpha}\Big)$$

نتیجه ۴.۱. *اگر $X \sim BN(\mu,\sigma^2)$ آن‌گاه تابع مشخصه‌ی متغیر تصادفی X به صورت زیر است:*

$$\varphi_X(t) = \frac{2\exp(it\mu)}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(t\psi)^{2m}\Gamma\Big(m+\frac{3}{2}\Big) \quad , \quad \psi^2 = 2\sigma^2$$

قضیه ۵.۱. *فرض کنید $X \sim BPE(\mu,\psi,\delta,\alpha)$ ، آن‌گاه آنتروپی رنی و آنتروپی شانون به ترتیب عبارتند از:*

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_R(\gamma) &= \log\Big(\frac{2\psi}{\alpha}\Big) - \frac{1}{1-\gamma}\Big[\gamma\log\Gamma\Big(\frac{\delta+1}{\alpha}\Big) - \log\Gamma\Big(\frac{\delta\gamma+1}{\alpha}\Big)\Big] \\ &- \Big(\frac{\delta\gamma+1}{\alpha(1-\gamma)}\Big)\log\gamma\end{aligned}$$

و

$$I_{sh}(x) = \log\Big(\frac{2\psi}{\alpha}\Big) + \log\Gamma\Big(\frac{\delta+1}{\alpha}\Big) - \frac{\delta}{\alpha}\Psi\Big(\frac{\delta+1}{\alpha}\Big) + \frac{\delta+1}{\alpha}$$

قضیه ۶.۱. *اگر $X \sim BPE(\mu,\psi,\delta,\alpha)$ آن‌گاه گشتاورهای مرکزی X به صورت زیر می‌باشند:*

$$E(X-\mu)^k = \begin{cases} 0 & , \quad k = 2m+1 \\ \dfrac{\psi^{2m}\Gamma\Big(\frac{2m+\delta+1}{\alpha}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{\delta+1}{\alpha}\Big)} & , \quad k = 2m \end{cases}$$

قضیه ۷.۱. *اگر*

$$U \sim G\Big(\frac{\delta+1}{\alpha},1\Big) \quad , \quad I = \begin{cases} 1 & , \quad p = \frac{1}{2} \\ -1 & , \quad p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و I و U مستقل از هم باشند و $X = IU^{\frac{1}{\alpha}}$، آن‌گاه $X \sim BPE(0,1,\delta,\alpha)$.

نتیجه ۸.۱. *تحت مفروضات قضیه‌ی (۷.۱)، اگر $V = \mu + \psi I U^{\frac{1}{\alpha}}$ آن‌گاه*
$$V \sim BPE(\mu, \psi, \delta, \alpha)$$

مثال ۹.۱. *در نمودار مستطیلی داده‌های مربوط به قد ۱۲۶ دانشجو ،بر حسب اینچ، شامل ۶۷ دانشجوی دختر و ۵۹ دانشجوی پسر (کروز مدینا [۱])ملاحظه شده است که داده‌ها دو مدی می‌باشند. سه مدل به داده‌ها برازش داده شده است؛ نمایی-توانی دو مدی، نرمال دو مدی و لاپلاس دو مدی. برای برآورد پارامترها در مدل‌های برازش یافته، از روش درستنمایی ماکزیمم استفاده شده است. جدول (۱) مقادیر MLE ، معیار اطلاع آکائیک (AIC) متناظر با آنها، آماره‌ی کولموگوروف اسمیرنوف (K–S) ، لگاریتم درستنمایی و معیار اطلاع بیز (BIC) برای مدل‌های برازش یافته را نشان می‌دهد. با توجه به مقادیر جدول (۱) ، توزیع نمایی-توانی دو مدی و لاپلاس دو مدی هر دو برای این داده‌ها مناسب‌تر از توزیع نرمال دو مدی می‌باشند.*

جدول ۱: مقایسه‌ی معیارهای مختلف

توزیع‌ها	برآورد پارامترها	AIC	K–S (p–value)	لگاریتم درستنمایی	BIC
BPE	$\hat{\mu} =$ ۶۸٫۴۳، $\hat{\psi} =$ ۲٫۶۷ $\hat{\alpha} =$ ۱٫۲۲، $\hat{\delta} =$ ۰٫۷۳	۳۶۱٫۵۴	۰٫۰۵۰۳ (۰٫۸۸۸۲)	−۱۷۶٫۷۷	۳۷۲٫۸۸
BL	$\hat{\mu} =$ ۶۸٫۴۲، $\hat{\psi} =$ ۱٫۷۰	۳۵۷٫۷۱	۰٫۰۵۵۰ (۰٫۸۱۷۰)	−۱۷۶٫۸۵	۳۶۳٫۳۷
BN	$\hat{\mu} =$ ۶۸٫۴۴، $\hat{\sigma} =$ ۲٫۳۹	۳۹۸٫۶۱	۰٫۱۱۸۹ (۰٫۰۵۲۰)	−۱۹۷٫۳۰۵	۴۰۴٫۲۸

مراجع

1. I. R. Cruz-Medina, Almost nonparametric and nonparametric estimation in mixture models.*Ph.D. Dissertation*, (2001), Pennsylvania State University, University Park.
2. B. Dierickx, J. Vleugels, and O. Van der Biest, Statistical extreme value modeling of particle size distributions: experimental grain size distribution type estimation and parameterization of sintered zirconia D. *Materials Characterization*, 45 (2000), 61 – 70.
3. M. Y. Hassan, and R. H. Hijazi, A bimodal exponential power distribution, *Pakistan Journal of Statistics*, ,26 (2010), no. 2, 379 – 396.
4. S. Nadarajah, A generalized normal distribution, *Journal of Applied Statistics*, 32 (2005), 685 – 694.
5. C. Zhang, B. E. Mapes, and B. J. Soden, Bimodality in tropical water vapor. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 129 (2003), 2847 – 2866.