چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

یک نامساوی انتگرالی جدید نوع هیلبرت با هسته همگن

رحمت ا... لشکری پور[۱] و مونا نارویی ایرانی [۲] *

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی
lashkari@hamoon.usb.ac.ir[۱]
mona-narooyi@yahoo.com[۲]

چکیده. در این مقاله، با استفاده از توابع وزن‌دار و روش‌هایی از آنالیز حقیقی یک نامساوی انتگرالی جدید با هسته همگن در صفحه کامل با بهترین ضریب ثابت به‌دست آمده است. و به عنوان کاربرد شکل معادل نامساوی با بهترین ضریب ثابت و حالت معکوس بعلاوه، آنها را نیز با بهترین ضریب ثابت ارایه می‌کنیم.

۰. پیش‌گفتار

صد سال قبل هیلبرت نامساوی کلاسیک زیر را اثبات کرد:

$$\sum_n \sum_m \frac{a_m b_n}{m+n} \leqslant \pi \left(\sum_n a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.1)$$

نامساوی (۱.۱) در آنالیز کاربردهای زیادی دارد. طی سال‌های اخیر تعداد زیادی از ریاضیدانان تحقیق روی نامساوی نوع هیلبرت از درجه صفر با هسته همگن و بدون هسته همگن را شروع کردند و نامساوی‌هایی در $\mathbb{R}^2$ به‌دست آوردند.
در سال ۲۰۰۸ یانگ نامساوی را به شکل زیر اصلاح کرد[۱]:
اگر $p,r>1$ و $0<\lambda<1$ ، $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. و $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ و انتگرال‌های سمت راست همگرا باشند، آنگاه

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 26D15.
واژگان کلیدی. توابع وزن‌دار، نامساوی هولدر، فرم معادل .
* سخنران

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{|x+y|^{\lambda}}dxdy$$

$$< k_{\lambda}(r)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{p(1-\frac{\lambda}{r})}f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{q(1-\frac{\lambda}{s})}g^{q}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (۲.۱)$$

که مقدار ثابت $k_{\lambda}(r)=B(\frac{\lambda}{r},\frac{\lambda}{s})+B(1-\lambda,\frac{\lambda}{r})+B(1-\lambda,\frac{\lambda}{s})$ بهترین ثابت ممکن است. با استفاده از(۲.۱) و روش‌هایی در آنالیز حقیقی یک نامساوی جدید در $\mathbb{R}^{2}$ با هسته همگن از درجه ۰ به‌دست می‌آوریم[۲]. به علاوه شکل معادل و متناظر عکس نامساوی را نیز معرفی می‌کنیم.

۲. گزاره‌های مورد نیاز

گزاره ۱.۲. *اگر $k:=2\ln(4\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2})-\alpha_1\cot\alpha_1+(\pi-\alpha_2)\cot\alpha_2$ با تابع وزن*

$$\omega(x):=\int_{-\infty}^{\infty}\min_{i\in\{1,2\}}\frac{\min\{x^{2},y^{2}\}}{x^{2}+2xy\cos\alpha_i+y^{2}}.\frac{1}{|y|}dy \qquad (۱.۲)$$

$$x\in(-\infty,\infty)$$

و α_1, α_2 اعداد حقیقی باشد[۴]. به‌طوری‌که $\pi>\alpha_2>\alpha_1>0$، آنگاه

$$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty), \qquad \omega(x)=k. \qquad (۲.۲)$$

گزاره ۲.۲. *اگر $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1$ و $f(x)$ تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $(-\infty,\infty)$ باشد[۳]. آنگاه به ازای هر x متعلق به $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$،*

$$J:=\int_{-\infty}^{\infty}|y|^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\min_{i\in\{1,2\}}\frac{\min\{x^{2},y^{2}\}}{x^{2}+2xy\cos\alpha_i+y^{2}}f(x)dx\right)^{p}dy$$
$$\leqslant k^{p}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{p-1}f^{p}(x)dx. \qquad (۳.۲)$$

گزاره ۳.۲. *اگر $0<p<1$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $g(x)$ یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $(-\infty,\infty)$ باشد[۳]، آنگاه به ازای هر x متعلق به $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$،*

$$L := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i\in\{1,2\}} \frac{\min\{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy\cos\alpha_i + y^2} g(y)dy \right)^q dx \leqslant k^p \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{q-1} g^q(y)dy, \tag{۴.۲}$$

که

$$k = 2\ln(4\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}) - \alpha_1\cot\alpha_1 + (\pi - \alpha_2)\cot\alpha_2.$$

۳. قضایای اصلی

قضیه ۱.۳. *اگر* $p > 1$، $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *و* $f(x), g(x) \geqslant 0$ *به‌طوری‌که* $0 < \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x)dx < \infty$ *و* $0 < \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-1} g^q(x)dx < \infty$، *آنگاه نامساوی‌های هم‌ارز زیر را داریم:*

$$I := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i\in\{1,2\}} \frac{\min\{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy\cos\alpha_i + y^2} f(x)g(y)dxdy < k\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-1} g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{۱.۳}$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i\in\{1,2\}} \frac{\min\{x^2, y^2\}}{x^2 + 2xy\cos\alpha_i + y^2} f(x)dx \right)^p dy \leqslant k^p \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x)dx, \tag{۲.۳}$$

که مقدار ثابت $k = 2\ln(4\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}) - \alpha_1\cot\alpha_1 + (\pi - \alpha_2)\cot\alpha_2$ *بهترین ثابت ممکن است [۳، ۵].*

قضیه ۲.۳. *اگر* $0 < p < 1$ ، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *و* $f(x), g(x) \geqslant 0$ *به طوری که*

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-1} f^p(x)dx < \infty, \qquad 0 < \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-1} g^q(x)dx < \infty$$

آنگاه نامساوی‌های هم‌ارز زیر را داریم:

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i\in\{۱,۲\}} \frac{\min\{x^۲, y^۲\}}{x^۲ + ۲xy\cos\alpha_i + y^۲} f(x)g(y)dxdy \\ &> k\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-۱} f^p(x)dx\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{q-۱} g^q(x)dx\right)^{\frac{۱}{q}}, \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{-۱}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i\in\{۱,۲\}} \frac{\min\{x^۲, y^۲\}}{x^۲ + ۲xy\cos\alpha_i + y^۲} f(x)dx\right)^p dy \\ &> k^p \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-۱} f^p(x)dx, \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

$$\begin{aligned} L &:= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-۱}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \min_{i\in\{۱,۲\}} \frac{\min\{x^۲, y^۲\}}{x^۲ + ۲xy\cos\alpha_i + y^۲} g(y)dy\right)^q dx \\ &< k^q \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{q-۱} g^q(y)dy, \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

که ضرایب ثابت $k = ۲\ln(۴\cos\frac{\alpha_۱}{۲}\sin\frac{\alpha_۲}{۲}) - \alpha_۱\cot\alpha_۱ + (\pi - \alpha_۲)\cot\alpha_۲$ و k^p, k^q بهترین ثابت‌های ممکن هستند[۵].

مراجع

1. Hardy, GH, Littlewood, JE, Polya, G: *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, Uk. (1934).
2. He, B, Yang, B: *On a Hilbert-Type integral inequality With the Homogeneous kernel of 0-Degree and the Hypergeometric Function*, Math. Practice. Theory. **40** (2010), no. 18, 203-211.
3. Li, Y, Wang, Z, He, B: *Hilbert's Type Linear Operator and Some Extensions of Hilbert's inequality*, Journal of Inequalities and Applications 2007, **10** (2007). Article ID 82138.
4. Li, Y, He, B: *On Inequalities of Hilbert's type*, Bull. Aust. Math. soc. **76** (2007), no. 1, 1-13.
5. Pachpatte, BG: *On Some new inequalities Similar to Hilbert's inequality*, Journal of Mathematics Analysis and Applications. **226** (1998), no. 3, 166-179.