

مطالعه فرکانسهای طبیعی پوسته های ساخته شده از مواد هدفمند نیکل فولاد

امید رحمانی^۱، مریم مقدمی^۲^۱استادیار، دانشکده فنی، دانشگاه زنجان؛ omid.rahmani@znu.ac.ir^۲دانشجو، دانشکده فنی، دانشگاه زنجان؛ m.moqadami@gmail.com

چکیده

با توجه به ویژگی های منحصر به فرد مواد کامپوزیتی و مواد با ساختار هدفمند استفاده از این مواد در سازه های هوایی، دریایی، ... روز به روز در حال افزایش می باشد. از سوی دیگر شناخت ویژگی های دینامیکی و ارتعاشی این سازه ها در پروسه طراحی از اهمیت به سزایی برخوردار است. در مقاله حاضر ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه ای هدفمند متشکل از فولاد ضد زنگ و نیکل که تحت شرایط مرزی تکیه گاه ساده قرار دارد، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. کسر حجمی اجزای سازنده از قانون تابع توانی، تابع سیگموئید و یا تابع نمایی پیروی می کند. تحلیل بر اساس تئوری کلاسیک پوسته لاو صورت گرفته و برای به دست آوردن معادله ی ارتعاشی حاکم بر پوسته و حل آن از روش ریلی ریتز استفاده شده است. سپس با حل معادله ارتعاشی حاکم و به دست آوردن فرکانس های طبیعی پوسته، اثر عوامل مختلف نظیر کسر حجمی، نحوه ترکیب اجزای سازنده، هندسه و ... بر رفتار فرکانسی پوسته بررسی شده است.

کلمات کلیدی: مواد تابعی مدرج، ارتعاشات، پوسته استوانه ای

مقدمه

در سالهای اخیر مواد هدفمند یا همان مواد تابعی مدرج بسیار مورد توجه قرار گرفته اند. مواد مدرج، مواد کامپوزیتی چند کاربردی هستند که به لحاظ میکروسکوپی ناهمگن می باشند و خصوصیات ساختاری و در نتیجه خواص مکانیکی آنها شامل نوع توزیع و اندازه فاز ها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر، درطول ضخامت جسم تغییر می کند. مواد هدفمند خواص گوناگون ناهمگون مانند مقاومت در مقابل حرارت، سایش و اکسیداسیون سرامیک ها را با چقرمگی، استحکام و قابلیت ماشین کاری فلزات در هم می آمیزند. با توجه به خصوصیات فیزیکی این مواد، کاربردهای مفیدی در اجزای موتور موشک، بدنه فضاپیماها، اجزای راکتور اتمی، جدار اول راکتور جوش هسته ای، پوشش های مقاوم به خوردگی، اجزای موتور، تیغه های توربین، سازه های دریایی و سایر کاربردهای فنی و مهندسی دارند [۱، ۲، ۳]. یکی از اولین تحقیقات در زمینه ی ارتعاشات پوسته و صفحه ی مدرج توسط لوی و همکارانش [۴] در سال ۱۹۹۹ انجام شد. پرادهان و همکارانش [۵] در سال ۲۰۰۰ این کار را توسعه بخشیدند و مشخصات فرکانس پوسته استوانه ای مدرج از جنس استیل و زیرکونیا را که خواص آن طبق توزیع قانون توانی در راستای ضخامت پوسته درجه بندی شده اند، تحت تمام ترکیبات ممکن شرایط مرزی، لبه گیردار، لبه آزاد و تکیه گاه ساده، مورد مطالعه قرار دادند. ردی و چنگ [۶] در سال ۲۰۰۲ با تحلیل فرکانس پوسته کروی مدرج نازک الاستیکی ساکن و تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده، به مطالعه رفتار ارتعاشی این پوسته ها پرداختند. انصاری و همکارانش [۳] در سال ۲۰۰۹ از یک روش حل دقیق تعمیم یافته برای تحلیل رفتار ارتعاشی پوسته های استوانه ای هدفمند که کسر حجمی آن از قانون توانی پیروی می کند، تحت شرایط مرزی مختلف استفاده کردند. در مقاله ی حاضر ارتعاشات آزاد پوسته های هدفمند بر اساس تئوری پوسته لاو مطالعه می شود. پوسته تحت شرایط مرزی تکیه گاه ساده قرار دارد و از جنس فولاد و نیکل می باشد. کسر حجمی پوسته از توابع قانون توانی، سیگموئید و نمایی پیروی می کند. هدف این کار مقایسه رفتارهای فرکانسی پوسته با کسرهای حجمی مختلف است.

مدلسازی خواص مواد تابعی مدرج

یک خاصیت مادی نمونه ی P_i به صورت تابعی از دما به شکل زیر در نظر گرفته می شود [۵]:

$$P_i = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (1)$$

که در آن $P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3$ ثابت های منحصر به فرد دمایی برای مواد ساختاری می باشند. خاصیت ماده تابعی مدرج توسط کسر حجمی V_f و خواص یکتای مواد ساختاری P_i کنترل می شود.

$$P_{fgm} = \sum_{i=1}^k P_i V_{fi} \quad (2)$$

کسر حجمی کل مواد ساختاری یک می باشد [5]:

$$\sum_{i=1}^k V_{fi} = 1 \quad (3)$$

حالتی را در نظر بگیرید که کسر حجمی پوسته تابعی از قانون توانی باشد. در این صورت پروفایل کسر حجمی به صورت زیر می باشد:

$$V_{f1}(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^N \quad (4)$$

که N توان قانون توانی است و نحوه گذار مواد را از یک سطح به سطح دیگر مشخص می کند. خواص ماده به طور پیوسته در راستای ضخامت طبق روابط زیر تغییر می کند:

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^N \quad (5)$$

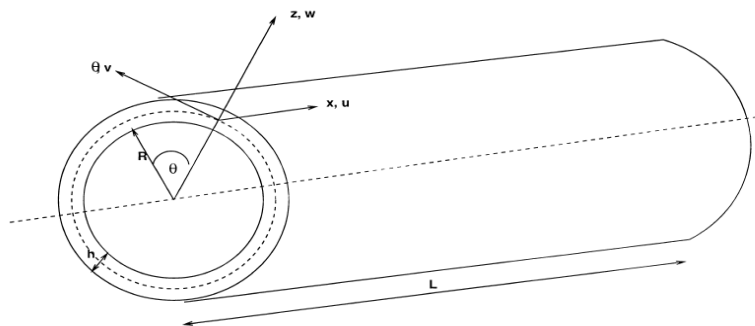
$$v(z) = v_2 + (v_1 - v_2) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^N \quad (6)$$

$$\rho(z) = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^N \quad (7)$$

که $E(z)$ ، $v(z)$ و $\rho(z)$ به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و چگالی جرم ماده مدرج می باشند. اردگان و دلالة [7] در سال ۱۹۸۳ نشان دادند که تاثیر ضریب پواسون روی تغییر شکل خیلی کمتر از مدول یانگ می باشد. بنابراین معمولاً ضریب پواسون صفحات مدرج ثابت فرض می شود.

معادلات حاکم بر پوسته

یک پوسته استوانه ای مدرج متشکل از فولاد ضد زنگ (به عنوان فلز) و نیکل (به عنوان سرامیک) به شعاع R ، طول L و ضخامت h مطابق شکل (۱) را در نظر بگیرید. تغییر شکل این پوسته با سیستم مختصات استوانه ای تعریف می شود (x, θ, z) . در صفحه $z=0$ می باشد و در صورت حرکت به سمت خارج و داخل پوسته، z به ترتیب مقادیر مثبت و منفی را اتخاذ خواهد نمود.



شکل ۱: پوسته ی استوانه ای مدرج

رابطه بنیادی برای یک پوسته استوانه ای نازک تحت تنش صفحه ای بر اساس تئوری پوسته ی لاو به صورت زیر بیان می شود:

$$\{\sigma\} = [Q]\{e\} \quad (8)$$

که $\{\sigma\}$ و $\{e\}$ به ترتیب نشان دهنده بردار تنش و کرنش هستند و $[Q]$ ماتریس سختی کاهش یافته می باشد. بردار تنش به صورت زیر تعریف می شود:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}\} \quad (9)$$

که در آن σ_x و σ_θ تنش های نرمال در راستاهای x و θ و $\sigma_{x\theta}$ تنش برشی در صفحه $x\theta$ می باشد. به طور مشابه بردار کرنش به صورت زیر تعریف می شود:

$$\{e\}^T = \{e_x, e_\theta, e_{x\theta}\} \quad (10)$$

ماتریس سختی کاهش یافته با توجه به تئوری کلاسیک به شکل زیر می باشد:

$$[Q] = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \quad (11)$$

سختی کاهش یافته ی Q_{ij} به صورت زیر تعریف می شود:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (12)$$

$$Q_{12} = \nu Q_{11} \quad (13)$$

$$Q_{66} = \frac{(1-\nu)}{2} Q_{11} \quad (14)$$

منتجه های نیرو و ممان با رابطه ی زیر قابل بیان هستند:

$$\{N\} = [S]\{\varepsilon\} \quad (15)$$

که در آن $\{N\}$ ، $\{\varepsilon\}$ و $[S]$ به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\{N\}^T = \{N_x, N_\theta, N_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta}\} \quad (16)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{e_1, e_2, \gamma, k_1, k_2, 2\tau\} \quad (17)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (18)$$

A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} به ترتیب سختی های کششی، پیچشی و خمشی می باشند، که به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} \{1, z, z^2\} dz \quad (19)$$

برای ماده مدرجی که پروفایل کسر حجمی آن از قانون توانی پیروی می کند، داریم:

$$A_{11} = A_{22} = \frac{h}{1-\nu^2} \left(\frac{NE_1 + E_2}{N+1} \right) \quad (20)$$

$$B_{11} = B_{22} = \frac{h^2}{1-\nu^2} \left[\frac{(E_2 - E_1)N}{2(N+1)(N+2)} \right] \quad (21)$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \left[E_1 + \frac{3(E_2 - E_1)(N^2 + N + 2)}{(N+1) + (N+2) + (N+3)} \right] \quad (22)$$

$$A_{12} = \nu A_{11}, \quad B_{12} = \nu B_{11}, \quad D_{12} = \nu D_{11} \quad (23)$$

$$A_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)A_{11}, \quad B_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)B_{11}, \quad D_{66} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)D_{11} \quad (24)$$

روابط انرژی

حال به بررسی روابط انرژی کرنشی و انرژی جنبشی یک پوسته استوانه ای می پردازیم. انرژی کرنشی یک جسم به صورت زیر تعریف می شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{\varepsilon\}^T [S] \{\varepsilon\} R \, d\theta \, dx \quad (25)$$

همچنین رابطه انرژی جنبشی به صورت زیر تعریف می شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] R \, dz \, d\theta \, dx \quad (26)$$

ρ چگالی جرم می باشد و u ، v و w مولفه های میدان جا به جایی هستند که باید به گونه ای فرض شوند که شرایط مرزی تکیه گاه ساده را ارضا کنند. با در نظر گرفتن این شرایط تکیه گاهی لازم است که در دو انتهای $x=0$ و $x=L$ شرایط زیر برقرار باشد:

$$u = w = N_x = M_x \quad (27)$$

میدان جا به جایی زیر شرایط مرزی فوق را به صورت کامل ارضا می کند:

$$u = A \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \sin(\omega t) \quad (28)$$

$$v = B \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) \sin(\omega t) \quad (29)$$

$$w = C \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \sin(\omega t) \quad (30)$$

که در آن A ، B و C دامنه ارتعاشات به ترتیب در راستاهای محوری u ، جانبی v و شعاعی w می باشند. m و n به ترتیب شمار موج محوری و شماره موج جانبی هستند و ω فرکانس زاویه ای ارتعاش بر حسب (rad/s) می باشد.

استخراج معادلات فرکانسی

حال با تعریف یک تابع انرژی Π توسط تابع لاگرانژ، با استفاده از روش ریلی ریتز معادله فرکانسی حاکم بر پوسته را استخراج نموده و فرکانس های طبیعی پوسته را به دست می آوریم. تابع انرژی Π به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Pi = T_{max} - U_{max} \quad (31)$$

که در آن T_{max} و U_{max} انرژی های جنبشی و کرنشی ماکزیمم پوسته استوانه ای هستند. برای بیشینه کردن T و U قسمت کسینوسی که تابع زمان است را برابر واحد در نظر می گیریم تا به این شکل انرژی کرنشی و جنبشی ماکزیمم به دست آید. سپس تابع Π را تشکیل می دهیم و تابع انرژی Π را بر حسب مجهولات A ، B و C بهینه می کنیم. به این ترتیب سه معادله به دست می آید. در ابتدا معادله ی $\frac{\partial \Pi}{\partial A}$ را در نظر می گیریم. ابتدا از Π نسبت به A مشتق می گیریم. در آن از A ، B و C فاکتور گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم. سپس برای $\frac{\partial \Pi}{\partial B}$ و $\frac{\partial \Pi}{\partial C}$ نیز همین عمل را انجام می دهیم. اگر سه معادله را به شکل یک معادله ی ماتریسی در بیاوریم در نهایت به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

معادله فوق در واقع همان معادله فرکانسی مقدار ویژه حاکم بر مساله است. به عبارتی با به دست آوردن مقادیر ویژه ی ماتریس ضرایب $[C_{ij}]$ فرکانس طبیعی پوسته محاسبه خواهد شد.

نتایج

پوسته استوانه ای مفروض در شکل (۱) را در نظر بگیرید. خواص ماده به صورت پیوسته از ماده ی دو در سطح داخلی به ماده ی یک در سطح خارجی تغییر می کند. یعنی در $z = -\frac{h}{2}$ $E = E_2 = E_c$ و در $z = \frac{h}{2}$ $E = E_1 = E_m$ می باشد. اندیس c مربوط به سرامیک و اندیس m مربوط به فلز می باشد. پوسته تحت شرایط تکیه گاه ساده قرار داشته و دارای ارتعاشات آزاد می باشد. ضرایب خواص مواد برای فولاد و نیکل، در دمای ۳۰۰ درجه ی سانتی گراد محاسبه شده است و در جدول (۱) آورده شده است.

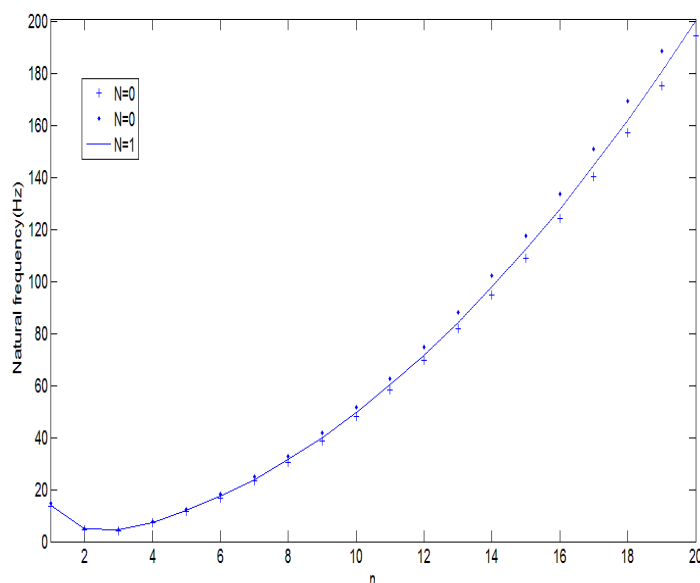
جدول ۱: ضرایب خواص مواد در دمای $T = 300^{\circ}\text{C}$

ضرایب	فولاد ضد زنگ			نیکل		
	$E(N/m^2)$	ν	$\rho(kg/m^3)$	$E(N/m^2)$	ν	$\rho(kg/m^3)$
P_0	201.04×10^9	0.3262	8166	223.95×10^9	0.31	8900
P_{-1}	0	0	0	0	0	0
P_1	3.079×10^{-4}	-2.002×10^{-4}	0	-2.794×10^{-4}	0	0
P_2	-6.534×10^{-7}	3.797×10^{-7}	0	3.998×10^{-9}	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0
	2.07788×10^{11}	0.317756	8166	2.05098×10^{11}	0.31	8900

پوسته ی بسیار نازک دارای مشخصات زیر است:

$$\frac{h}{R}=0.002, \quad \frac{L}{R}=20, \quad R=1$$

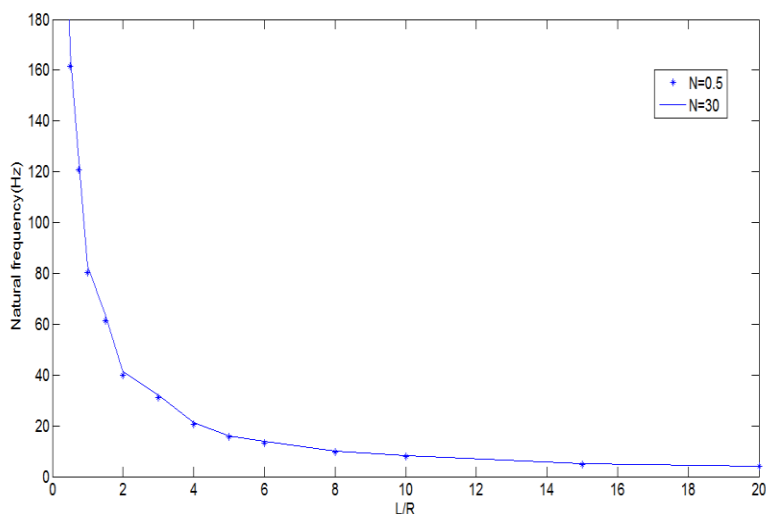
شکل (۲) تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مدرج با پروفایل کسر حجمی تابع توانی را در برابر تغییرات شماره ی موج محیطی (n)، برای N های مختلف نشان می دهد.



شکل ۲: تغییرات فرکانس طبیعی (Hz) با تغییر شماره ی موج محیطی (n) برای پوسته ای با کسر حجمی تابع قانون توانی (فولاد و نیکل)

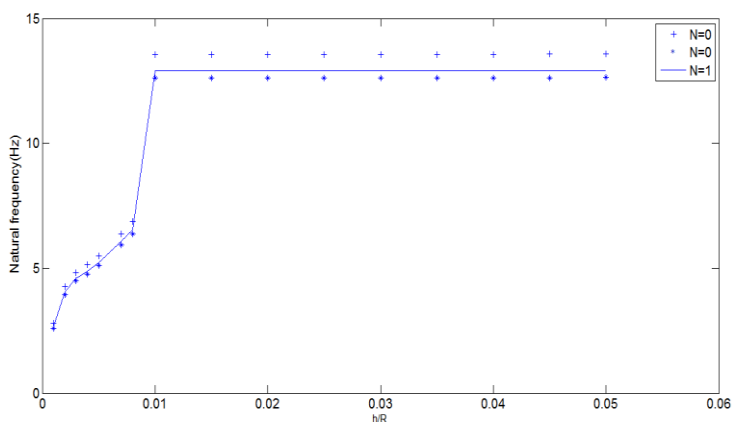
با توجه به شکل (۲) مشاهده می شود که وقتی که N افزایش می یابد، فرکانس طبیعی کاهش می یابد. برای مقادیر کوچک N ، فرکانس های طبیعی به فرکانس های پوسته ی فولادی و برای مقادیر بزرگ N ، فرکانس های طبیعی به فرکانس های پوسته ی نیکلی نزدیک می شوند. بنابراین برای شماره های موج محوری داده شده (n)، فرکانس های طبیعی برای پوسته مدرج متشکل از فولاد و نیکل، بین فرکانس های طبیعی محاسبه شده برای پوسته های خالص از جنس فولاد و نیکل قرار دارند.

حال نسبت $\frac{h}{R}$ را ثابت نگه داشته و فرکانس طبیعی پایه را برای $\frac{L}{R}$ های مختلف محاسبه می کنیم و به بررسی اثر طول پوسته (نسبت $\frac{L}{R}$) بر فرکانس پایه پوسته های مدرج می پردازیم. نتایج مربوطه در نمودار شکل (۳) آمده است. مشاهده می شود که فرکانس طبیعی پایه یک پوسته کوتاه یعنی $\frac{L}{R}$ کوچک، بیشتر از فرکانس پایه پوسته بلند است.



شکل ۳: تغییرات فرکانس طبیعی پوسته ای با کسر حجمی تابع قانون توانی (فولاد و نیکل) در برابر تغییر $\frac{L}{R}$ ، (R ثابت و L متغیر)

در ادامه اثر تغییر ضخامت بر فرکانس طبیعی پایه را بررسی می کنیم. شکل (۴) نشان دهنده فرکانس پایه در برابر تغییر ضخامت می باشد. با توجه به این نمودار در می یابیم که فرکانس های طبیعی پایه یک پوسته ی ضخیم، یعنی $\frac{h}{R}$ بزرگ بیشتر از فرکانس های طبیعی پایه یک پوسته نازک است.



شکل ۴: تغییرات فرکانس طبیعی در مقابل تغییرات ضخامت $(\frac{h}{R})$ ، (R ثابت و h متغیر) برای پوسته ای با کسر حجمی تابع قانون توانی (فولاد، نیکل)

نتیجه گیری و جمع بندی

در پوسته های تابعی مدرج، فرکانس های طبیعی بین فرکانس های طبیعی محاسبه شده برای پوسته های خالص از جنس اجزای سازنده قرار دارند. مشخصات فرکانس پوسته استوانه ای مدرج شبیه به پوسته های ایزوتروپ همگن هستند. با این وجود به دلیل وجود مواد تابعی مدرج در پوسته ها ی هدفمند، برای این پوسته ها مشخصات فرکانسی جالبی مشاهده می شود که در پوسته های ایزوتروپ همگن دیده نمی شود. این خواص جالب زمانی بروز می کنند که کسر حجمی اجزای سازنده در پوسته ی تابعی مدرج تغییر می کند. فرکانس طبیعی پایه یک پوسته ی کوتاه یعنی $\frac{L}{R}$ کوچک، بیشتر از فرکانس پایه ی پوسته ی بلند است. فرکانس های طبیعی پایه یک پوسته ی ضخیم، یعنی $\frac{h}{R}$ بزرگ بیشتر از فرکانس های طبیعی پایه یک پوسته نازک است. در پوسته ای با پروفایل کسر حجمی سیگموئیدی تغییرات فرکانس طبیعی بسیار اندک می باشد و این رفتار می تواند ناشی از توزیع بسیار ملایم تابع کسر حجمی بین لایه ها باشد.

مراجع

- [1] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin B. H, Kawasaki Ford R.G, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Application*, London, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] Ichikawa Kiyoshi, *Functionally Graded Materials In The 21st Century: A Workshop on Trends and Forecasts*, Massachusetts, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [۳] انصاری، رضا، همت نژاد، میلاد، درویزه، منصور، "پیش بینی رفتار ارتعاشی پوسته های استوانه ای تحت شرایط مرزی مختلف"، کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک ایران، تهران، دانشگاه تهران، ۱۳۸۸.
- [4] Loy C.T, Lam K.Y, Reddy J.N, "Vibration of functionally graded cylindrical shells", *International Journal Of Mechanical Sciences*, Vol.41, pp.309-324, 1999.
- [5] Pradhan S.C, Loy C.T, Lam K.Y, Reddy J.N, "Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shell Under various boundary conditions", *Applied Acoustics*, Vol.61, pp.111-129, 2000.
- [6] Reddy J.N, Z.-Q. Cheng, "Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal planform", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.44, pp.967-985, 2002.
- [7] Chi Shyang-ho, Chung Yen-Ling, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under tansverse load-part 1: Analysis", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.43, pp.3657-3674, 2006.