رویکرد جدید در مسائل کنترل بهینه درجه دوم خطی فازی

دکتر محمد کیانپور * سارا فالیزی فر

گروه کاربردی،دانشکده علوم ریاضی،دانشگاه گیلان
*عضو هیئت علمی.
m.keyanpour@gmail.com

چکیده

در این مقاله مسائل کنترل بهینه درجه دوم با قیود خطی با مقدار اولیه فازی را در نظر گرفته و جهت محاسبه مینیمم مقدار تابع هزینه در مسائل کنترل بهینه فازی دو دیدگاه مینیمم قطعی و مینیمم فازی را ارائه می کتیم که در آن از شرایط لازم همیلتونین مساله کنترل بهینه و مفاهیم بهینه سازی فازی استفاده شده است. جهت توضیح این دیدگاه در انتها یک مثال عددی ارایه می گردد.

کلمات کلیدی کنترل بهینه درجه دوم خطی ؛مینیمم فازی؛مینیمم قطعی

۱ پیش‌گفتار

از زمانی که مسئله کنترل بهینه برای اولین بار مطرح شد تلاشهای بسیاری در جهت حل مساله و ارائه روشهای جدید و کارآمد صورت گرفته است. با توجه به وجود عدم قطعیت در مسائل واقعی، حل مسایل کنترل بهینه در حضور عدم قطعیت بسیار با اهمیت است. تاکنون دیدگاههای متفاوتی جهت مدلسازی عدم قطعیت در مسایل ارایه شده است. یکی از روشهای که برای فرمولبندی عدم قطعیتی مطرح شده است دیدگاه فازی است [۴]. تاکنون در زمینه حل مسایل کنترل بهینه در حضور پارامترها و شرایط اولیه فازی کارهای اندکی صورت گرفته است که می توان به تلاش فراهی و همکاران [۴] در تعیین جواب سیستمهای کنترلگر فازی با حالتهای اولیه فازی با استفاده از α-برشها، اشاره کرد. از طرف دیگر در مسائل بهینه سازی فازی برای محاسبه مینیمم مقدار تابع فازی دو دیدگاه مینیمم قطعی و مینیمم فازی ارائه شده است. در این مقاله این دو دیدگاه را برای حل مسائل کنترل بهینه درجه دوم با قیود خطی تعمیم می دهیم.

۲ مفاهیم پایه ای

تعریف ۱. *(کنترل بهینه) هدف از نظریه کنترل بهینه تعیین سیگنال کنترلی است که سبب می‌گردد تا فرآیندی در محدودیت هایی فیزیکی صدق نماید و همزمان ضوابطی را مینیمم (ماکزیمم) کند[۴] .*

تعریف ۲. *(شرایط لازم کنترل بهینه) کنترل مجاز u^* که سبب میگردد تا ، سیستم $\dot{x} = a(x(t), u(t), t)$ مسیر مجاز x^* را بپیماید و همچنین تابع هزینه $J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_\circ}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt$ با t_f معین و $x(t_f)$ نامعین، را مینیمم سازد،در شرایط زیر صدق می‌کند:*

$$
\begin{cases}
\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}(x^*(t), u^*(t), \boldsymbol{p}^*(t), t) \\
\dot{\boldsymbol{p}}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \boldsymbol{p}^*(t), t) \\
\circ = \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \boldsymbol{p}^*(t), t) \\
\text{و} \\
\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f)) - p^*(t_f) = \circ
\end{cases}
$$

که در آن $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ ضرایب لاگرانژ و

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \boldsymbol{p}^T(t)[a(x(t), u(t), t)]$$

تابع همیلتونین می باشند.

تعریف ۳. *(مسئله تنظیم‌کننده درجه دوم خطی)*
سیستم $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ به همراه تابع هزینه زیر، با t_f معین، ماتریسهای حقیقی متقارن نیمه معین مثبت H و Q و ماتریس حقیقی متقارن معین مثبت R :

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt.$$

با استفاده از تابع همیلتونین

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) \\ +\boldsymbol{p}^T(t)A(t)x(t) + \boldsymbol{p}^T(t)B(t)u(t) \end{aligned}$$

شرایط لازم بهینگی بصورت زیر بدست می‌آید :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{p}}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)\boldsymbol{p}^*(t) \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial x} = R(t)u^*(t) + B^T(t)\boldsymbol{p}^*(t) \end{aligned}$$

و از آنجا معادله زیر منتج میگردد:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{p}}^*(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A(^Tt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \boldsymbol{p}^*(t) \end{bmatrix} \\ &= A'(t) \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \boldsymbol{p}^*(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

جواب این معادله به فرم زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ \boldsymbol{p}^*(t_f) \end{bmatrix} = \varphi(t_f, t) \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \boldsymbol{p}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t_f, t) & \varphi_{12}(t_f, t) \\ \varphi_{21}(t_f, t) & \varphi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \boldsymbol{p}^*(t) \end{bmatrix}$$

که در آن $\varphi(t_f, t)$ با محاسبه تبدیل لاپلاس وارون ماتریس $[(sI - A'(t))^{-1}]$ و جایگزینی $(t_f - t)$ به جای t بدست می‌آید.
با قرار دادن $k = [\varphi_{22} - H\varphi_{12}]^{-1}[H\varphi_{11} - \varphi_{21}]$ مقدار بهینه J برابر با $j_{min} = \frac{1}{2}x_0{}^T k(0)x_0$ خواهد بود[۴] .
در ادامه مسئله ***کنترل بهینه درجه دوم خطی فازی (FLQOCP)*** زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x(0) &= \tilde{x}_0 \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{x}_0$ یک عدد فازی و A و B به ترتیب ماتریسهایی به ابعاد $n \times n$ و $m \times m$ می باشند، تابع هزینه ای که باید مینیمم گردد بصورت زیر:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt;$$

با t_f معین ، ماتریس متقارن نیمه معین مثبت Q و ماتریس متقارن معین مثبت R است.

۳ جواب بهینه مسئله درجه دوم خطی فازی(FLQP)

در این بخش دو رویکرد موجود در مسائل بهینه سازی را برای مسائل کنترل بهینه فازی (FLQP) تعمیم می دهیم و مقدار بهینه فازی و غیر فازی J را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱.۳ مینیمم غیر فازی

محمل $\tilde{x}_0$ را در نظر بگیرید:

$$supp(\tilde{x}_0) = [\underline{x}_0{}^1, \bar{x}_0^1] \times [\underline{x}_0{}^2, \bar{x}_0^2] \times [\underline{x}_0{}^3, \bar{x}_0^3] \times \cdots \times [\underline{x}_0{}^n, \bar{x}_0^n]$$

برای هر $y_0 \in supp(\tilde{x}_0)$ داریم:

$$\begin{aligned} y_0 = ((\underline{x}_0{}^1 + c^1(\bar{x}_0^1 - \underline{x}_0{}^1)), (\underline{x}_0{}^2 + c^2(\bar{x}_0^2 - \underline{x}_0{}^2)), (\underline{x}_0{}^3 \\ + c^3(\bar{x}_0^3 - \underline{x}_0{}^3)), \ldots, (\underline{x}_0{}^n + c^n(\bar{x}_0^n - \underline{x}_0{}^n))) \\ c^i \in [0, 1], i = 1, 2, 3, \ldots, n; \end{aligned}$$

تابع هزینه $J_{y_0} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[y^T(t)Q(t)y(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$ را تعریف می‌کنیم، مقدار مینیمم تابع هزینه برابر با $J_{my_0} = \frac{1}{2}y_0{}^T k(0)y_0$ است ،این مقدار تابعی پیوسته بر حسب $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ می باشد، بنابراین می‌توانیم مقدار مینیمم و ماکسیمم آنرا محاسبه کنیم.تابع عضویت $minJ$ بصورت زیر بدست می‌آید[۳] ::

$$\mu_{minJ}(J_{my_0}) = \frac{maxJ_m - J_{my_0}}{maxJ_m - minJ_m}$$

حال می‌توانیم مینیمم غیر فازی J را بدست آوریم[۴] :

$$M_J = \sup_{y_0 \in supp(\tilde{x}_0)} \min\{\mu_{minJ}(J_{my_0}), \mu_{\tilde{x}_0}(y_0)\} = hgt(\min J \bigcap \tilde{x}_0)$$

۲.۳ مینیمم فازی

برای محاسبه مینیمم فازی J جواب سیستم زیر را محاسبه میکنیم:

$$\begin{aligned} \min f = \frac{1}{2}x_0{}^T k(0)x_0 \\ x(0) = \tilde{x}_0 \end{aligned}$$

ابتدا با تعیین α -برشهای $\tilde{x}_0$:

$$D_\alpha = [\underline{x}_{0\alpha}{}^1, \bar{x}_{0\alpha}^1] \times [\underline{x}_{0\alpha}{}^2, \bar{x}_{0\alpha}^2] \times [\underline{x}_{0\alpha}{}^3, \bar{x}_{0\alpha}^3] \times \cdots \times [\underline{x}_{0\alpha}{}^n, \bar{x}_{0\alpha}^n]$$

سپس تعریف $N(\alpha)$ بصورت زیر:

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= \{y_0 \in D_\alpha, f(y_0) = \inf_{t \in D_\alpha} f(t)\} \\ &= \{y_0 \in D_\alpha, f(y_0) = \inf_{t \in D_\alpha} \frac{1}{2}t^T k(0)t\} \end{aligned}$$

مجموعه فازی مینیمم‌کننده f و در نهایت ، مینیمم f به ترتیب بدست می‌آیند[۳] :

$$\mu_{minJ}(y_0) = \begin{cases} \sup_{y_0 \in N(\alpha)} \alpha & if\ y_0 \in \bigcup_{\alpha \geq 0} N(\alpha) \\ 0 & else \end{cases}$$

$$\mu_{M_J}(r) = \begin{cases} \sup_{y \in f^{-1}(r)} \mu_{minJ}(y) & if\ D_0 \bigcap f^{-1}(r) \neq \varnothing \\ 0 & else \end{cases}$$

۴ مثال عددی

مثال ۱. سیستم زیر و تابع هزینه مربوط را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = 2x + u$$
$$x(0) = (2, 1, 1)_{LR} \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{12}[x^2 + \frac{1}{2}u^2]dt$$

داریم:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}\sinh\sqrt{6}(12-t)}{\cosh\sqrt{6}(12-t) - \frac{\sqrt{6}}{3}\sinh\sqrt{6}(12-t)}$$

برای هر $c \in [0, 1]$, $y_0 = 1 + 2c$ داریم $J_{my_0} = \frac{1}{2}(1+2c)^2k(0)$ و بنابراین $\mu_{minJ}(J_{my_0}) = \frac{9-(1+2c)^2}{8}$؛ و در نتیجه مینیمم قطعی برابر خواهد بود با: $M_J = \sup_{y_0=1+2c}\min\{\mu_{minJ}(J_{my_0}), \mu_{\tilde{x}_0}(y_0)\} = 0/745$. همچنین برای محاسبه مینیمم فازی داریم: $D_\alpha = [1+\alpha, 3-\alpha]$ و مجموعه $N(\alpha) = \{y_0 \in D_\alpha, f(y_0) = \inf_{t\in D_\alpha} f(t)\} = 1+\alpha$ وبنابراین:

$$\mu_{minJ}(y_0) = \begin{cases} y-1, y \in (1, 2] \\ 0, y \in \{1\}\bigcup(2, 3] \end{cases}$$

$$\mu_{M_J}(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2r}{k(0)}} - 1, r \in (\frac{k(0)}{2}, 2k(0)] \\ 0, r \in \{a\}\bigcup(2k(0), \frac{9k(0)}{2}) \end{cases}$$

مراجع

[1] *H. J . Zimmermann,* Fuzzy Set Theory-and Its Applications ,Fourth Printing *, Jluwer Academic Publishers, 1992.*

[2] *M. Najariyan and M. H. Farahi,* Optimal Control Of Fuzzy Linear Controlled System With Fuzzy Initial Conditions, *Iranian Journal of Fuzzy Systems **10** (2013), 21–35.*

[3] *D. E. Kirk,* Optimal Control Theory *,Dover Publications,Inc , 1998.*

[4] *D. Dubois and H. Prade ,* Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications *, Academic Press, Inc,1980.*