حل دستگاه معادلات مختلط فازی با روش تصویری

سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی
دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش موازی

سولماز آقائی *
دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش موازی

چکیده

دستگاه معادلات خطی فازی، دستگاه معادلات خطی است که پارامترهای آن اعداد فازی هستند. در این مقاله می خواهیم دستگاه معادلات مختلط فازی را با استفاده از یک روش تصویری حل نماییم. در آخر مثال عددی ارائه می گردد و جواب بدست آمده با یک روش تکراری دیگر مقایسه می گردد.

واژه‌های کلیدی: عدد فازی،عدد مختلط،دستگاه خطی فازی، روش تصویری

۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی نقش بسیار حیاتی در مسائلی مانند بهینه سازی، اقتصاد و مهندسی دارد. بنابراین یافتن یک مدل ریاضی و روند عددی برای حل دستگاه خطی فازی بسیار با اهمیت است. به طور کلی برای ساده در نظر گرفتن و یا برای محاسبه آسان، متغیرها یا پارامترها معمولا به صورت عدد غیرفازی گرفته شده است. اما در واقعیت پارامترها ممکن است غیر قطعی یا برآورد نامشخص در مورد متغیر داشته باشند که به طور کلی از سوی برخی از آزمایشات یا تجربیات یافت شده اند. بنابراین، این متغیر ها ممکن است به عنوان یک عدد فازی در نظر گرفته شوند.

برای اولین بار مفهوم اعداد فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا معرفی شد[۱، ۲].

در بسیاری از کاربردها مانند آنالیز، توابع موج در مکانیک کوانتوم و بسیاری از کمیت های فیزیکی، مقادیر به صورت مختلط هستند. بنابراین پارامترها،اعداد مختلط که در اصل فازی نیز هستند در نظر گرفته می شوند. برای اولین بار عدد مختلط فازی در سال ۱۹۸۹ توسط باکلی [۱] ارائه گردید[۳، ۴].

۲ تعاریف

تعریف ۱.۲. عدد فازی مختلط شامل دو عدد فازی است که یک عدد را قسمت حقیقی و عدد دیگر را قسمت موهومی گویند که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{z} = \tilde{a} + i\tilde{b}$$

که

* سخنران

[۱] J. J. Buckley

$$\tilde{a} = (\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)) \ , \ \tilde{b} = (\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

بنابراین

$$\underline{z} = \underline{a}(\alpha) + i\underline{b}(\alpha) \ , \ \overline{z} = \overline{a}(\alpha) + i\overline{b}(\alpha)$$

تعریف ۲.۲. دستگاه مختلط فازی از معادلات خطی را به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_{11}x_1 + \tilde{c}_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \tilde{c}_{1n}x_n = \tilde{w}_1 \\
&\tilde{c}_{21}x_1 + \tilde{c}_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \tilde{c}_{2n}x_n = \tilde{w}_2 \\
&\ldots \\
&\tilde{c}_{n1}x_1 + \tilde{c}_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \tilde{c}_{nn}x_n = \tilde{w}_n \qquad (1)
\end{aligned}$$

ماتریس متناظر با معادلات بالا برابر است با : $[C]\{X\} = \{W\}$ که $[C]$ یک ماتریس فازی است و همه ی عناصر آن اعداد مختلط فازی هستند و $\{W\}$ یک بردار ستونی از اعداد مختلط فازی است و $\{X\}$ نامشخص است، ولی برای دستگاه فازی کامل، $\{X\}$ نیز فازی است.

تعریف ۳.۲. دستگاه خطی $[C]\{X\} = \{W\}$، دستگاه معادلات مختلط فازی است که $1 \leq k \leq n$, $w_k = \tilde{b}_k + i\tilde{d}_k$
بنابراین دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می نماییم:

$$[C]\{X\} = B + iD$$

که $B = (b_k)$ و $D = (d_k)$ بردارهای فازی هستند.

تعریف ۴.۲. [5]بردار مختلط فازی $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ به صورت زیر است:

$$x_j = (e_j + if_j) \qquad 1 \leq j \leq n$$

اگر $E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ و $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ ، آنگاه برای حل دستگاه $[C]\{X\} = \{W\}$ کافی است دو دستگاه زیر را حل نماییم:

$$CE = B \ , \quad CF = D$$

که به فرم پارامتری زیر است :

$$x_j = (\underline{x_{jr}}, \overline{x_{jr}}) = (\underline{e_{jr}} + i\underline{f_{jr}}, \overline{e_{jr}} + i\overline{f_{jr}}) \qquad 1 \leq j \leq n \ , \ 0 \leq r \leq 1$$

در ادامه روش تصویری که برای حل دستگاه معادلات مورد استفاده قرارگرفته است توضیح داده می شود.

روش GMRES[2]

این روش تصویری روی $\kappa = \kappa_m$ و $\iota = \kappa$ است، که در آن κ_m زیرفضای کرایلف از بعد m و با بردار شروع $v_1 = r^{(0)}/\|r^{(0)}\|$ می باشد، که جواب تقریبی $x^{(m)}$ را از صفحه ی آفین $x^{(0)} + \kappa_m$ از بعد m با شرط $b - Ax^{(m)} \perp k_m$ تعیین می کند. اگر $x^{(0)}$ بردار اولیه دلخواه و $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ باشد. $\beta = \| r^{(0)} \|_2$ است، آنگاه

[2]Generalized Minimum Residual

$V_m^T A V_m = H_m \ \ , \ \ V_m^T r^{(۰)} = V_m^T(\beta v_۱) = \beta e_۱$

در نتیجه با استفاده از زیرفضای m بعدی جواب تقریبی به صورت زیر است:

$x^{(m)} = x^{(۰)} + V_m y^{(m)} \ \ , \ \ y^{(m)} = minimum \parallel \beta e_۱ - \overline{H}_m y \parallel_۲$

الگوریتم روش به صورت زیر است:

الگوریتم GMRES

۱. $Compute \ \ r^{(۰)} = b - Ax^{(۰)} \ \ , \ \ \beta = \parallel r^{(۰)} \parallel_۲ \ \ and \ \ v_۱ = r^{(۰)}/\beta.$
۲. $Define \ the \ (m+۱) \times m \ matrix \ \overline{H} = (h_{ij})_{۱\le i\le m+۱, ۱\le j\le m}.$
$Set \ \overline{H} = ۰.$
۳. $For \ j = ۱, ۲, ..., m. \ Do:$
۴. $Compute \ w_j = Av_j.$
۵. $For \ i = ۱, ۲, ..., j. \ Do:$
۶. $h_{ij} = (w_j, v_i).$
۷. $w_j = w_j - h_{ij} v_i.$
۸. $End \ Do$
۹. $h_{j+۱,j} = \parallel w_j \parallel_۲ . \ If \ h_{j+۱,j} = ۰ \ , \ set \ m = j \ and \ go \ to$ ۱۲.
۱۰. $v_{j+۱} = w_j / h_{j+۱,۱}$
۱۱. $End \ Do$
۱۲. $Compute \ y^{(m)} \ the \ minimizer \ of \ \parallel \beta e_۱ - \overline{H}_m y \parallel_۲ \ and \ x^{(m)} = x^{(۰)} + V_m y^{(m)}, \ where$

$e = [۱, ۰, ..., ۰]^T \ \ , \ \beta = \parallel r_۰ \parallel .$

۳ مثال عددی و نتیجه گیری

حال دستگاه مختلط فازی ۲ × ۲ زیر را در نظر بگیرید:

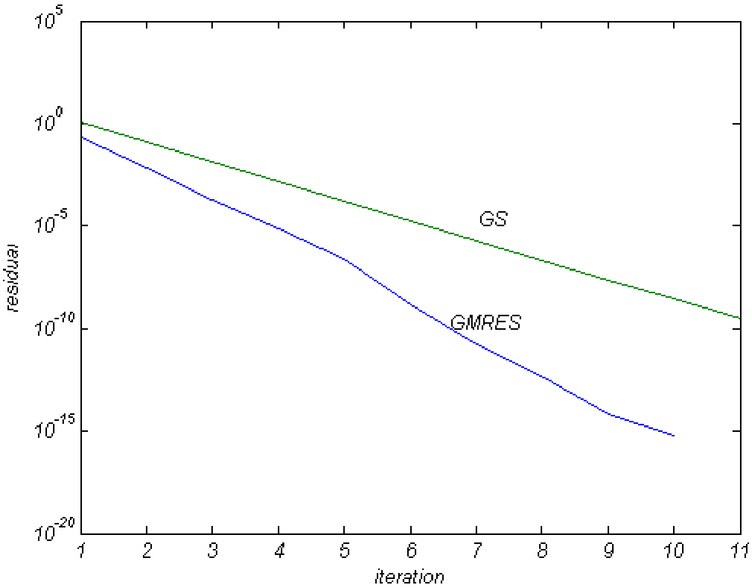
$x_۱ - x_۲ = (r + i(۱+r), (۲-r) + i(۳-r))$
$x_۱ + ۳x_۲ = ((۴+r) + i(r-۴), (۷-۲r) + i(-۱-۲r))$

برای حل دستگاه، دو دستگاه حقیقی و مختلط زیر را با روش GMRES حل می نماییم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e_۱} \\ \underline{e_۲} \\ \overline{e_۱} \\ \overline{e_۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ ۴+r \\ r-۲ \\ ۲r-۷ \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f_۱} \\ \underline{f_۲} \\ \overline{f_۱} \\ \overline{f_۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ + r \\ r - ۴ \\ r - ۳ \\ ۲r + ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

نمودار همگرایی دو روش GMRES و گاوس – سایدل به صورت زیر است:



شکل ۱: مقایسه روش GMRES و گاوس– سایدل

که با توجه به شکل، جواب بدست آمده از روش GMRES بهتر از روش گاوس – سایدل است.

مراجع

[1] Zadeh,L.A., Fuzzy sets, Inform. Control 8(1965) 338-353.

[2] Zimmermann, H.J., Fuzzy Set Theory and its Applica ons, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[3] Buckley, J.J., Fuzzy Complex Numbers, Fuzzy Sets and Systems, vol.33, pp.333-345, 1989.

[4] Buckley, J.J, Qu, Y., Solving Systems of linear fuzzy equa ons, Fuzzy Sets and Systems 43 (1991) 33-43.

[5] Jahantigh, M. A., Khezerloo, S., Khezerloo, M., Complex Fuzzy Linear Systems, Industrial Mathematis, Vol.2, No.1 (2010) 21-28.

پست الکترونیکی: fazeli@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: aghaei.s@stu.yazd.ac.ir