لم اسپرنر و هم ارزی قضیه نقطه ثابت وقضیه هگز

محبوبه شریفی[*]
دانشگاه دامغان

بهزاد صالحیان متی کلائی
دانشگاه دامغان

چکیده

هر نگاشت پیوسته f از یک بازه بسته به توی خودش دارای یک نقطه ثابت است که این قضیه به نام قضیه نقطه ثابت براور شناخته می‌شود و دارای گستره‌ی وسیعی از کاربردها در ریاضی مدرن است. نکته جالب توجه این است که این قضیه به سادگی از یک لم ترکیبیاتی توسط اسپرنر (۱۹۲۸) نتیجه گرفته شد. لم ترکیبیاتی اسپرنر نوعی مثلث بندی سادکی است که یک مثلث را به مثلث‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کند و طبق یک قاعده مشخص به برچسب‌گذاری گوشه‌های مثلث بزرگ می‌پردازد و این روند در اثبات قضیه نقطه ثابت با معرفی، مختصات مرکزی باری، یک اثبات ترکیبیاتی برای یک قضیه توپولوژی و آنالیز ریاضی ارائه می‌دهد. در پایان ضمن بیان تاریخچه بازی هگز هم ارزی قضیه هگز و قضیه نقطه ثابت براوئر را شرح می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: لم اسپرنر، قضیه نقطه ثابت، قضیه نقطه ثابت براوئر، بازی هگز
Mathematics Subject Classification [2010]: 05C78,37C25,37F20

۱ مقدمه

لم اسپرنر به تجزیه یک سادک (مثلث، چندوجهی، پاره خط و ...) به سادک‌های کوچک‌تر مربوط است. فرض کنید T یک مثلث بسته در صفحه است. تجزیه T به تعدادی متناهی مثلث‌های کوچک را مثلث‌بندی می‌نامیم که هر دو مثلث در یک رأس یا یک وجه مشترک، اشتراک دارند. فرض کنید یک تجزیه سادکی برای T داریم آن‌گاه برچسب گذاری رئوس مثلث‌های حاصل از تجزیه با نمادهای ۰، ۱ و ۲ سره است هرگاه:

- هر سه رأس T به ترتیب دلخواه با ۰، ۱ و ۲ برچسب‌گذاری شود و
- به ازای $0 \leq i \leq j \leq 2$ هر رأس روی یک وجه T متصل بین i و j یا با i یا با j برچسب گذاری شود.

به مثلثی که در مثلث‌بندی رأس‌هایش دارای همه سه برچسب ۰، ۱ و ۲ است، مثلث ممتاز گوییم.

قضیه ۱.۱ (لم اسپرنر). *هر تجزیه سادکی از یک مثلث با برچسب‌گذاری سره دارای تعدادی فرد مثلث ممتاز است [۴].*

از آنجا که لم ترکیبیاتی اسپرنر برای هر سادک n بعدی ثابت شده است لذا می‌توان قضیه (۱.۱) را برای یک مربع در قالب لم زیر بیان کرد.

لم ۲.۱. *فرض کنید Q یک مربع است که توسط خط‌های موازی اضلاع آن، به مربع‌های کوچک‌تری افراز شده است. رأس‌های مربع Q با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ برچسب‌گذاری شده‌اند. رأس‌های این افراز با همین اعداد طوری برچسب گذاری شده که برچسب هر رأس افراز که روی یک ضلع از مربع Q واقع شده با برچسب یکی از رأس‌های انتهایی این ضلع برابر است. در این صورت وجهی در این افراز وجود دارد که در رأس‌های آن حداقل سه برچسب متفاوت ظاهر شده است [۱].*

[*]سخنران

برای بیان اثبات قضیه نقطه ثابت براور با استفاده از لم اسپرنر ابتدا نگاهی کوتاه به تاریخ داریم؛
نفر اول ابداع کننده روش نقطه ثابت، ریاضی‌دان معروف فرانسوی هانری پوانکاره (۱۹۱۲–۱۸۵۴) است. وی اولین کسی بود که از روش‌های ترکیبیاتی در توپولوژی استفاده کرد. مثلث‌بندی شکل‌های هندسی و تقسیم آن‌ها به سادک‌ها از ایده‌های اوست. نفر دوم، ریاضی‌دان هلندی براوئر (۱۹۶۶–۱۸۸۱) است. او قضایای نقطه ثابت را برای مربع، کره، و مشابه n بعدی آن‌ها اثبات کرد. نفر سوم، ریاضی‌دان آلمانی اسپرنر (۱۹۸۰–۱۹۰۶) است. او در سال ۱۹۸۲ لم هندسی ترکیبیاتی درباره تجزیه یک مثلث را اثبات کرد که نقش بسیار مهمی در نظریه نقطه ثابت دارد.
در ادامه برای اثبات قضیه براوئر کافیست ثابت کنیم تابعی پیوسته از یک مثلث به توی خودش دارای نقطه ثابت است. فرض کنید T مثلثی بسته با رأس‌های x_0، x_1 و x_2 است. آنگاه هر نقطه x از T را می‌توان بصورت یکتا به شکل $x = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ نوشت که $a_i \geq 0$ و $\sum a_i = 1$ و می‌توان x را با بردار (a_0, a_1, a_2) نمایش داد. اعداد حقیقی a_0، a_1 و a_2 را مختصات باری x می‌گوییم.

تعریف ۳.۱. مختصات مرکزی باری بیان می‌کند یک نقطه درون یک مثلث به عنوان میانگین وزن‌دار سه رأس است به بیان دیگر، مثلث را به عنوان یک پوشش محدب در نظر بگیرید که در این‌صورت هر نقطه را می‌توان به شکل

$$\alpha a + \beta b + \gamma c$$

نوشت که در آن

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

و a، b و c مختصات رئوس مثلث هستند. بنابراین مختصات مرکزی باری به صورت سه‌تایی مرتب است که مجموع‌شان برابر با ۱ است.

مثال ۴.۱. $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$ سه رأس از مثلث هستند. مختصات باری آن‌ها به ترتیب $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ است و هم چنین مختصات باری نقطه $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ باید $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ باشد [۴].

با توجه به تعریف مختصات مرکزی باری، قضیه نقطه ثابت براوئر که در زیر بیان می‌شود با این فرض که f نگاشتی پیوسته از T به توی خودش است و $f(a_0, a_1, a_2) = (a', b', c')$ اثبات می‌شود. S_i را مجموعه نقاط (a', b', c') در T در نظر بگیرید که $a' \leq a_i$. برای اینکه نشان دهیم f دارای نقطه ثابت است کافیست نشان دهیم $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. اگر فرض کنیم $(a_0, a_1, a_2) \in S_0 \cap S_1 \cap S_2$ آنگاه طبق تعریف S_i به ازای هر i داریم $a' \leq a_0$. که این با توجه به این حقیقت که $\sum a' = \sum a_i$ نتیجه می‌دهد $(a_0, a_1, a_2) = (a', b', c')$ به عبارت دیگر (a_0, a_1, a_2) نقطه ثابت f است.

قضیه ۵.۱ (نقطه ثابت براوئر (۱۹۱۵).). *فرض کنید S یک سادک n-بعدی است و فرض کنید $\phi : S \to S$ تابعی پیوسته باشد. آنگاه ϕ دارای نقطه ثابت است یعنی $\exists x \in S$ به طوری که $\phi(x) = x$ [۳].*

هم ارزی قضیه هگز و قضیه نقطه ثابت براوئر

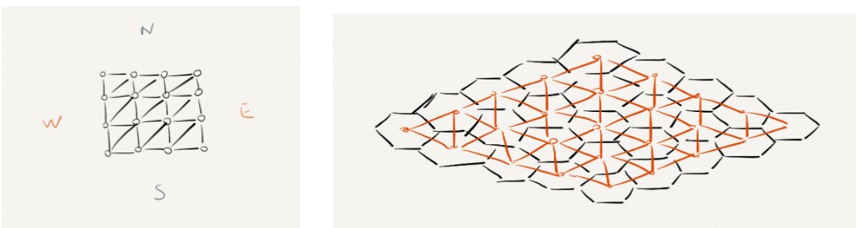
بازی هگز اولین بار در سال ۱۹۴۲ توسط پیت هاین ریاضی دان، دانشمند، نویسنده و شاعر دانمارکی اختراع شد. همچنین در سال ۱۹۴۸ جان نش در دانشگاه پرینستون این بازی را دوباره کشف کرد که در بین دانشجویان فارغ التحصیل پرینستون شهرت پیدا کرد. آن‌ها بازی هگز را "جان" یا "نش" نامیدند. در سال ۱۹۵۲ برادران پارکر اولین بار بازی هگز را در بازار ارائه کردند.

هگز یک بازی دو نفره روی یک صفحه الماس شکل تشکیل شده از خانه‌هایی شش ضلعی است. ابعاد این صفحه می‌تواند متفاوت باشد که نوعاً اندازه آن ۱۱ × ۱۱ است. دو وجه مقابل در صفحه با ''سیاه''و دو وجه دیگر با ''سفید'' برچسب گذاری می‌شوند. روند بازی این چنین است: هر یک از بازیکن‌ها به نوبت مهره‌های رنگ خود را در خانه‌های خالی صفحه بازی قرار می‌دهند بطوری که بتوانند زنجیری از مهره‌های رنگ خود را بین دو وجه مقابل با همان رنگ طوری ایجاد کنند که بازیکن دیگر با رنگ مخالف نتواند این زنجیر را با مهره‌هایش بشکند. این یعنی برنده بازی شخصی است که بتواند اولین مسیر همبند را از یک نوع رنگ بر روی شش ضلعی‌های متمایز صفحه بازی بین دو وجه مقابل بیابد. به این ترتیب قضیه هگز بیان می‌کند بازی هگز به تساوی ختم نمی‌شود و یک بازیکن حتماً برنده است. دیوید گاله اثباتی ساده از قضیه هگز براساس نظریه گراف ارائه داد و همچنین نشان داد قضیه هگز و قضیه نقطه ثابت براوئر هم ارز هستند؛ از اینرو، در بخش پایانی این مقاله تنها یک طرف اثبات هم ارزی این دو قضیه را شرح می‌دهیم.

قضیه ۶.۱ (قضیه هگز). *فرض کنید B_k به وسیله دو مجموعه H و V پوشیده شود آنگاه یا H شامل مجموعه همبند متلاقی $\mathbb{E}$ و $\mathbb{W}$ یا V شامل مجموعه ای همبند متلاقی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{S}$ است [۶].*

برای نمایش هم ارزی قضیه (۵.۱) و قضیه (۶.۱)، ابتدا فرض کنید $\mathbb{Z}^n$ نقاط مشبک از $\mathbb{R}^n$ است. به ازای $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ فرض کنید به ازای هر i، $|x-y| = \max(x_i - y_i)$؛ به ازای همه i ها اگر $x_i \leq y_i$ آنگاه $x < y$ است. نقاط x, y را مقایسه پذیر گوییم هرگاه $x < y$ یا $y < x$.

صفحه هگز ۲–بعدی B_k با اندازه k، گرافی است که رأس‌های آن مجموعه همه $z \in \mathbb{Z}^2$ با $(1,1) \leq z \leq (k,k)$ است. اگر $|z-z'| =$ و z' و z مقایسه پذیر باشند آنگاه دو رأس z' و z مجاورند. فرض کنید شکل (۱آ) یک نمونه مثلث بندی صفحه بازی هگز باشد آنگاه مطابق شکل (۱ب) یال‌های مرزی با جهت‌های اصلی $\mathbb{N}$، $\mathbb{S}$، $\mathbb{E}$ و $\mathbb{W}$ برچسب گذاری می‌شوند.



(آ) مثلث بندی صفحه هگز

(ب) برچسب گذاری یال‌های یک مثلث بندی

شکل ۱: صفحه بازی هگز

برای صفحه‌ای با اندازه k رئوس روی مرز همه ی $z = (z_1, z_2)$هاست که به ترتیب در $z_1 = 0$ و $z_1 = k$ و $z_2 = 0$ و $z_2 = k$ صدق میکند [۶].

۲ نتیجه

برای اینکه از قضیه نقطه ثابت براوئر قضیه هگز را نتیجه بگیریم، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر نقطه x در مربع $k \times k$، I_k^2، در $\mathbb{R}^2$ می‌تواند بصورت منحصربفرد مانند ترکیب محدب از مجموعه رئوس B_k نمایش داده شود. همچنین توجه کنید که برای هر نگاشت f از B_k به $\mathbb{R}^2$ می‌توانیم آن را به یک نگاشت سادکی پیوسته $\hat{f}$ به توی I_k^2 توسیع دهیم. اگر

$x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3$ آن‌گاه اگر $\lambda_i > 0$ و $\sum_i \lambda_i = 1$ طبق تعریف داریم:

$$\hat{f}(x) = \lambda_1 f(f(z^1)) + \lambda_2 f(z^2) + \lambda_3 f(z^3) .$$

قبل از ادامه روند اثبات ابتدا به لم جبری زیر توجه نمایید.

لم ۱.۲. *فرض کنید z^1، z^2 و z^3 رئوس مثلثی در $\mathbb{R}^2$ باشند و ρ نگاشتی باشد که $\rho(z^i) = z^i + v^i$، v^1، v^2 و v^3 بردار و $\hat{\rho}$ توسیع سادک آن باشد. آن‌گاه $\hat{\rho}$ دارای نقطه ثابت است اگر و فقط اگر 0 در پوششی محدب از بردارهای v^1، v^2 و v^3 باشد [۵].*

اکنون فرض کنید B_k با دو مجموعه H و V تقسیم بندی شود. یک $H-$مسیر ($V-$مسیر) مجموعه‌ای همبند در H (V) است. چهار زیرمجموعه از B_k بدین صورت تعریف می‌کنیم؛ فرض کنید همه رئوس همبند در $\mathbb{W}$ به وسیله $H-$مسیر و $\widehat{\mathbb{E}} = H - \widehat{\mathbb{W}}$ و $\widehat{\mathbb{S}}$ همه رئوس همبند در $\mathbb{S}$ به وسیله $V-$مسیر و $\widehat{\mathbb{N}} = V - \widehat{\mathbb{S}}$ است. باید $\widehat{\mathbb{W}}$ و $\widehat{\mathbb{E}}$ را چنان تعریف کنید که مجاور نباشند. فرض می‌کنیم $H-$مسیری از $\mathbb{E}$ به $\mathbb{W}$ وجود ندارد و $V-$مسیری از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{S}$ وجود ندارد و یک تناقض را نمایش دهیم. فرض کنید e^1 و e^2 بردارهای واحد از $\mathbb{R}^2$ هستند و $f : B_k \to B_k$ به صورت زیر باشد؛

$$f(z) = \begin{cases} z + e^1 & \forall z \in \widehat{\mathbb{W}} \\ z - e^1 & \forall z \in \widehat{\mathbb{E}} \\ z + e^2 & \forall z \in \widehat{\mathbb{S}} \\ z - e^2 & \forall z \in \widehat{\mathbb{N}} \end{cases}$$

برای هر حالت باید بررسی کنیم $f(z)$ در B_k است. تنها راهی که $z + e^1$ می‌تواند خارج از B_k باشد این است که $z \in \widehat{\mathbb{W}}$ متعلق به $\mathbb{E}$ باشد. به هر حال، فرض کردیم $H-$مسیری از $\mathbb{W}$ به $\mathbb{E}$ وجود ندارد پس $\widehat{\mathbb{W}}$ نمی‌تواند با $\mathbb{E}$ در تلاقی باشد. چون $\widehat{\mathbb{W}}$ و $\widehat{\mathbb{E}}$ مجاور نیستند، z نمی‌تواند با $\mathbb{W}$ در تلاقی باشد و به ازای همه‌ی $z \in \widehat{\mathbb{E}}$، $z - e^1$ به B_k تعلق دارد.

اکنون توجه خود را به $\hat{f}$ میل می‌دهیم، که توسیع سادکی از f روی I_k^2 است. توجه کنید $\hat{f}$ پیوسته است. عدم مجاورت $\widehat{\mathbb{W}}$ و $\widehat{\mathbb{E}}$ نتیجه می‌دهد نگاشت f هر مثلث با رئوس دو به دو مجاور متقابل را با e^1 یا e^{-1} و نه هر دو آن‌ها انتقال می‌دهد. پس f سه رأس را به وسیله دو بردار که تنها در یک–چهارم $\mathbb{R}^2$ قرار دارند، بدون اینکه صفر در پوشش محدب باشد، منتقل می‌کند. طبق لم، $\hat{f}$ تابعی پیوسته در I_k^2 است و نقطه ثابت ندارد؛ که با قضیه نقطه ثابت براوئر در تناقض است. بنابراین قضیه براوئر، قضیه هگز را نتیجه می‌دهد [۵, ۶].

مراجع

[۱] شاشکین، یوری، اصغری، امیرحسین و نبیعی، مونا، *نقطه ثابت*، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۸.

[2] A. WRIGHT, *SPERNER'S LEMMA AND BROUWER'S FIXED POINT THEOREM*, July 2005.

[3] A. Frome, K. Talwar, Ch. Papadimitriou, *CS294-1 Algorithmic Aspects of Game Theory Spring 2001.*

[4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS*, Departmet of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, 1976, pp.21-23.

[5] D. GALE, *THE GAME OF HEX AND BROUWER'S FIXED-POINT THEOREM*, University of Calefornia.

[6] M. Gymrek J. Li, Supervisor: E.Demaine, SP.268 - *The Mathematics of Toys and Games*, Spring 2011.