

SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



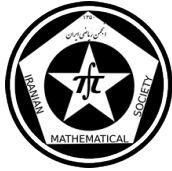
کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛ شبکه های توجه گرافی (Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین مقاله نویسی IEEE و ISI ویژه فنی و مهندسی



مقایسه مخروط نرمال و مخروط منظم

ولی حسینی
دانشگاه لرستان

*ولی حسینی
دانشگاه لرستان

چکیده

در این مقاله قصد داریم ارتباط مخروط نرمال و مخروط منظم را بررسی نماییم. ابتدا مفهوم مخروط به عنوان زیرمجموعه یک فضای باناخ حقیقی معرفی می شود؛ سپس یک رابطه ترتیب جزئی روی مخروط تعریف می کنیم. پس از آن مخروط نرمال و منظم را معرفی و به بررسی ارتباط بین آنها می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: فضای متریک مخروط، ثابت نرمال، مخروط نرمال، مخروط منظم، فضای باناخ

۱ مقدمه

فضاهایی متریک مخروط یکی از بحث‌هایی است که اخیراً توسط پژوهشگران زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. ما در این مقاله فقط بر معرفی مخروط به عنوان زیرمجموعه‌ای از یک فضای باناخ حقیقی متمرکز شده ایم. در بخش اول این مقاله مفهوم مخروط همراه با مثالهای متنوعی از آن معرفی می شود، همچنین یک رابطه ترتیب جزئی روی فضای باناخ حقیقی تعریف می شود. در بخش دوم مخروط نرمال و مثالهایی از آن ارائه خواهد شد. سپس در بخش سوم مخروط منظم معرفی و نشان خواهیم داد هر مخروط منظم نرمال است اما عکس آن برقرار نیست. منابع مورد استفاده در این مقاله با علامت [.] مشخص شده اند.

۲ مخروط

تعریف ۱.۰۲. [1, Introduction] فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی باشد، یک زیر مجموعه P از E یک مخروط نامیده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

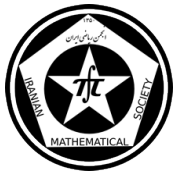
الف- P بسته و ناتهی باشد و $P \neq \{0\}$

ب- به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ که $a, b \geq 0$ و به ازای هر $x, y \in P$ داشته باشیم $ax + by \in P$

ج- اگر $x \in P$ و $-x \in P$ نتیجه گرفته شود $x = 0$

مثال ۲.۰۲. اگر $E = \mathbb{R}$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شود آنگاه P با تعریف زیر را می توان به عنوان یک مخروط در نظر گرفت. $P = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

*



مثال ۳.۲. [2, Example 1.1] اگر $E = \mathbb{R}^2$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شود آنگاه مخروط P را می توان به صورت زیر تعریف کرد. $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شود مخروط P را می توان به صورت زیر تعریف کرد. $P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$

تعریف ۴.۲. [1, Introduction] فرض کنید P یک مخروط در فضای باناخ حقیقی E باشد. یک رابطه ترتیب جزئی روی E به صورت زیر تعریف می کنیم.

الف - $x \leq y$ اگر و فقط اگر $y - x \in P$

ب - $x < y$ اگر و فقط اگر $x < y$ و $x \neq y$

ج - $x \ll y$ اگر و فقط اگر $y - x \in \text{int}P$

مثال ۵.۲. اگر $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ آنگاه

$(1, 2) \ll (3, 4) \Leftrightarrow (3, 4) - (1, 2) = (2, 2) \in \text{int}P$ یعنی $(2, 2) \in \text{int}P$ یک همسایگی دارد که کاملاً در داخل مخروط قرار می گیرد و کاملاً درست است.

۳ مخروط نرمال

تعریف ۱.۳. [1, Introduction] مخروط P نرمال نامیده می شود اگر عدد صحیح مثبت k موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x, y \in E$ از $x \leq y$ نتیجه گرفته شود که $\|x\| \leq k\|y\|$. کوچکترین عدد صحیح مثبتی که در رابطه مذکور صدق کند ثابت نرمال مخروط P نامیده می شود. تعریف دیگری از مخروط نرمال نیز وجود دارد که می گوید [3, Introduction]: مخروط P نرمال است اگر $\inf\{\|x + y\| : x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1\} > 0$

مثال ۲.۳. اگر E, P همانهایی باشند که در مثال (۲-۱-۳) آمده اند داریم:

$$\|(2, 3)\| \leq 1 \times \|(2, 5)\| \Rightarrow (2, 3) \leq (2, 5) \leq (4, 5) \Rightarrow (2, 3) \leq (4, 5)$$

مثال ۳.۳. [4, Example 1.1] اگر $E = C_{\mathbb{R}}^1[0, 1]$ با نرم $\|f\|_E = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ یک فضای باناخ حقیقی و

$P = \{f \in E : f \geq 0\}$ آنگاه این مخروط نرمال نیست. زیرا کافی است قرار دهیم

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq g \leq f$$

در حالی که $\|f\|_E = 2, \|g\|_E = 1 + 2k$ و همواره $\|g\|_E \geq k\|f\|_E$ و بنابراین k یک ثابت نرمال برای مخروط P نمی باشد.

مثال ۴.۳. [3, Example 1.1] فرض کنید $E = C_{\mathbb{R}}^1[0, 1]$ یک فضای باناخ حقیقی با نرم

$\|f\|_E = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ و مخروط $P = \{f \in E : f(t) \geq 0\}$ آنگاه این مخروط نرمال نیست زیرا به عنوان

$$x_n(t) = \frac{1 - \sin(nt)}{n+2}, y_n(t) = \frac{1 + \sin(nt)}{n+2}$$

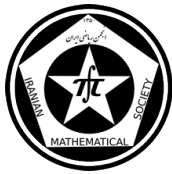
مثال اگر

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \text{ آنگاه}$$

اما

$$\|x_n + y_n\| = \frac{2}{n+2} \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

Constant normal^۱



۴ مخروط منظم

تعریف ۱.۴. [1, Introduction] مخروط P منظم نامیده می شود اگر هر دنباله افزایشی از بالا کراندار آن همگرا باشد. یعنی اگر $\{x_n\}$ یک دنباله باشد که $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq y$ آنگاه وجود داشته باشد $x \in X$ بطوریکه $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ویا بطور معادل هر دنباله کاهشی از پایین کراندار آن همگرا باشد.

لم ۲.۴. [1, Lem 1.1] هر مخروط منظم نرمال می باشد.

برهان: فرض کنید P یک مخروط منظم باشد که نرمال نیست. (فرض خلف) با این توصیف برای

$n \geq 1$ عناصر $t_n, s_n \in P$ را در نظر بگیرید بطوریکه $t_n - s_n \in P (t_n \geq s_n)$ و $n^2 \|t_n\| < \|s_n\|$ قرار دهید $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}, y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ در این صورت واضح است که

$\|x_n\| = \frac{\|s_n\|}{\|t_n\|} > \frac{n^2 \|t_n\|}{\|t_n\|} = n^2$ زیرا $\|x_n\| > n^2 (*)$, $y_n \geq x_n, \|y_n\| = 1$ حال چون سری

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ همگراست و P بسته است بنابراین وجود دارد $y \in P$ بطوریکه $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ حال ملاحظه می

کنیم که دنباله $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq y$ $x_1 \leq x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{9}x_3 \leq \dots \leq y$ یک دنباله کاهشی از پایین کراندار است و مخروط منظم است بنابراین همگراست اما شرط لازم همگرایی این است که

و این با عبارت (*) که بیان می کند: $\|x_n\| > n^2$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مثال ۳.۴. [1, Example 2.1] در این مثال می خواهیم نشان دهیم هر مخروط نرمال منظم نمی باشد یعنی عکس لم فوق برقرار نیست.

$E = C_{\mathbb{R}}([0, 1]), \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}, P = \{f \in E : f \geq 0\}$ ملاحظه می شود که P یک

مخروط نرمال با ثابت نرمال یک می باشد. حال دنباله ای در E پیدا می کنیم که از پایین کراندار است اما همگرا نیست.

$$x \geq x^2 \geq x^3 \geq \dots \geq 0$$

اما دنباله $\{x^n\}$ در بازه $[0, 1]$ همگرا نیست. زیرا

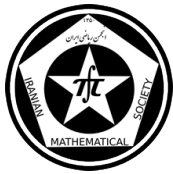
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

اما چون این حد یکتا نیست پس دنباله فوق همگرا نیست.

آدرس نویسنده: ولی حسینی، پلدختر لرستان، خیابان ۷ تیر، کوچه رسالت ۱۱ جنوبی، جنب باغ سابق نبوی

مراجع

- [1] SH.REZAPOUR, R.HAMLEBARANIHAGHI, some notes on the paper "cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", *J. math. anal. appl.* 345(2008)719-724
- [2] L.G.HUANG, X.ZANG, CONE METRIC SPACES AND FIXED POINT THEOREMS OF CONTRACTIVE MAPPINGS, *J. MATH. ANGL. APPL.* 322(2)(2007)1468-1476



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

مقایسه مخروط نرمال و مخروط منظم



دانشگاه یزد

پوستر

- [3] S.JANKOVIC,Z.KADELBURG,S.RADENOVIC,B.E.RHOADES, *Assad-kirk-type fixed point theorems for pair of nonself mappings on cone metric spaces, fixed point theory appl. (2008)*
- [4] S.M.VEAZPOUR.P.RAJA,SOME EXTENSIONS OF BANACH CONTRACTION PRINCIPLE IN COMPLETE CONE METRIC SPACES ,FIXED POINT THEORY AND APPLICATIONS VOLUME 2008

پست الکترونیکی: Vali.hosiny@yahoo.com

SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه

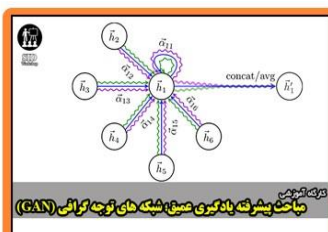


فیلم های آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛ شبکه های توجه گرافی (Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین مقاله نویسی IEEE و ISI ویژه فنی و مهندسی