مقایسه مخروط نرمال و مخروط منظم

ولي ، حسيني*
دانشگاه لرستان

ولي حسيني
دانشگاه لرستان

چکیده

در این مقاله قصد داریم ارتباط مخروط نرمال و مخروط منظم را بررسي نماییم. ابتدا مفهوم مخروط به عنوان زیرمجموعه یک فضای باناخ حقیقی معرفی می شود؛ سپس یک رابطه ترتیب جزئی روی مخروط تعریف می‌کنیم .پس از آن مخروط نرمال و منظم را معرفی و به بررسی ارتباط بین آنها می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: فضاي متريك مخروط، ثابت نرمال، مخروط نرمال ، مخروط منظم، فضاي باناخ

۱ مقدمه

فضاهايي متريك مخروط يكي از بحث هايي است كه اخيرا توسط پژوهشگران زيادي مورد بررسي قرار گرفته است. ما در اين مقاله فقط بر معرفي مخروط به عنوان زيرمجموعه اي از يك فضاي باناخ حقيقي متمركز شده ايم. در بخش اول اين مقاله مفهوم مخروط همراه با مثالهای متنوعی از آن معرفی می شود، همچنين يك رابطه ترتيب جزئي روي فضاي باناخ حقيقي تعريف مي شود. در بخش دوم مخروط نرمال و مثالهایی از آن ارائه خواهد شد. سپس در بخش سوم مخروط منظم معرفی و نشان خواهیم داد هر مخروط منظم نرمال است اما عکس آن برقرار نیست. منابع مورد استفاده در این مقاله با علامت [.] مشخص شده اند.

۲ مخروط

تعریف ۱.۲. [1, Introduction] فرض کنید E يك فضای باناخ حقیقی باشد، يك زير مجموعه P از E يك مخروط نامیده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف– P بسته و ناتهی باشد و $P \neq \{0\}$

ب – به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ که $a, b \geq 0$ و به ازای هر $x, y \in P$ داشته باشیم $ax + by \in P$

ج – اگر $x \in P$ و $-x \in P$ نتیجه گرفته شود $x = 0$

مثال ۲.۲. اگر $E = \mathbb{R}$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شود آنگاه P با تعریف زیر را می توان به عنوان يك مخروط در نظر گرفت. $P = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

*

مثال ۳.۲. [2, Example 1.1] اگر $E=\mathbb{R}^۲$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظرگرفته شود آنگاه مخروط P را می توان به صورت زیر تعریف کرد. $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x,y\geq ۰\}$ در حالت کلی اگر $E=\mathbb{R}^n$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شودمخروط P را می توان به صورت زیر تعریف کرد. $P=\{(x_۱,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\geq ۰\}$

تعریف ۴.۲. [1, Introduction] فرض کنید P یك مخروط در فضای باناخ حقیقی E باشد. یك رابطه ترتیب جزئی روی E به صورت زیر تعریف می کنیم.

الف - $x\leq y$ اگر و فقط اگر $y-x\in P$

ب - $x<y$ اگر و فقط اگر $x\leq y, x\neq y$

ج - $x\ll y$ اگر وفقط اگر $y-x\in intP$

مثال ۵.۲. اگر $E=\mathbb{R}^۲, P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x,y\geq ۰\}$ آنگاه
$(۱,۲)\ll(۳,۴)\Leftrightarrow(۳,۴)-(۱,۲)=(۲,۲)\in int\,P$ یعنی (۲و۲) یك همسایگی دارد که کاملا در داخل مخروط قرار می گیردو کاملا درست است.

۳ مخروط نرمال

تعریف ۱.۳. [1, Introduction] مخروط P نرمال نامیده می شود اگر عدد صحیح مثبت k موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x,y\in E$ از $۰\leq x\leq y$ نتیجه گرفته شود که $\|x\|\leq k\|y\|$. کوچکترین عدد صحیح مثبتی که در رابطه مذکور صدق کند ثابت نرمال مخروط [۱] P نامیده می شود. تعریف دیگری از مخروط نرمال نیز وجود دارد که می گوید [3, Introduction]: مخروط P نرمال است اگر $inf\{\|x+y\| : x,y\in P, \|x\|=\|y\|=۱\}>۰$

مثال ۲.۳. اگر E,P همانهایی باشند که در مثال (۲-۱-۳)آمده اند داریم :
$(۰,۰)\leq(۲,۳)\leq(۴,۵)\Rightarrow\|(۲,۳)\|\leq ۱\times\|(۴,۵)\|$ در اینجا ثابت نرمال یك می باشد.

مثال ۳.۳. [4, Example 1.1] اگر $E=C^۲_{\mathbb{R}}[۰,۱]$ با نرم $\|f\|_E=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ یك فضای باناخ حقیقی و $P=\{f\in E : f\geq ۰\}$ آنگاه این مخروط نرمال نیست. زیرا کافی است قرار دهیم

$$\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=x^{۲k}, k\in\mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow ۰\leq g\leq f$$

در حالی که $\|f\|_E=۲, \|g\|_E=۱+۲k$ و همواره $\|g\|_E\geq k\|f\|_E$ و بنابراین k یك ثابت نرمال برای مخروط P نمی باشد.

مثال ۴.۳. [3, Example 1.1] فرض کنید $E=C^۱_{\mathbb{R}}[۰,۱]$ یك فضای باناخ حقیقی با نرم $\|f|_E=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ و مخروط $P=\{f\in E : f(t)\geq ۰\}$ آنگاه این مخروط نرمال نیست زیرا به عنوان مثال اگر

$$x_n(t)=\frac{۱-sin(nt)}{n+۲}, y_n(t)=\frac{۱+sin(nt)}{n+۲}$$

آنگاه $\|x_n\|=\|y_n\|=۱$
اما

$$\|x_n+y_n\|=\frac{۲}{n+۲}\rightarrow ۰(n\rightarrow\infty)$$

[۱] Constant normal

۴ مخروط منظم

تعریف ۱.۴. [1, Introduction] مخروط P منظم نامیده می شود اگر هر دنباله افزایشی از بالا کراندار آن همگرا باشد. یعنی اگر $\{x_n\}$ یك دنباله باشد که $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq y$ آنگاه وجود داشته باشد $x \in X$ بطوریکه $\|x_n - x\| \to 0$ ویا بطور معادل هر دنباله کاهشی از پایین کراندار آن همگرا باشد.

لم ۲.۴. *[1, Lem 1.1] هر مخروط منظم نرمال می باشد.*

برهان : فرض کنید P یك مخروط منظم باشد که نرمال نیست. (فرض خلف) با این توصیف برای $n \geq 1$ عناصر $t_n, s_n \in P$ را در نظربگیرید بطوریکه $t_n - s_n \in P(t_n \geq s_n)$ و $n^2\|t_n\| < \|s_n\|$ قرار دهید $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}, x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$ در این صورت واضح است که $\|y_n\| = 1$, $y_n \geq x_n$, $\|x_n\| > n^2(*)$ زیرا $\|x_n\| = \frac{\|s_n\|}{\|t_n\|} > \frac{n^2\|t_n\|}{\|t_n\|} = n^2$ حال چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n\|}{n^2}$ همگراست و P بسته است بنابراین وجود دارد $y \in P$ بطوریکه $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ حال ملاحظه می کنیم که دنباله $0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \frac{1}{3^2}x_3 \leq ... \leq y$ یك دنباله کاهشی از پایین کراندار است و مخروط منظم است بنابراین همگراست اما شرط لازم همگرایی این است که

$$\begin{cases} \frac{\|x_n\|}{n^2} \to 0 \\ n \to \infty \end{cases}$$

و این با عبارت (*) که بیان می‌کند: $\|x_n\| > n^2$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مثال ۳.۴. [1, Example 2.1] دراین مثال می خواهیم نشان دهیم هر مخروط نرمال منظم نمی باشد یعنی عکس لم فوق برقرار نیست.

$E = C_{\mathbb{R}}([0,1]), \|f\| = sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}, P = \{f \in E : f \geq 0\}$ ملاحظه می شود که P یك مخروط نرمال با ثابت نرمال یك می باشد. حال دنباله ای در E پیدا می کنیم که از پایین کراندار است اما همگرا نیست.

$x \geq x^2 \geq x^3 \geq ... \geq 0$

اما دنباله $\{x^n\}$ در بازه [۱و۰]همگرا نیست. زیرا

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

اما چون این حد یکتا نیست پس دنباله فوق همگرا نیست.

آدرس نویسنده:ولي حسيني، پلدختر لرستان،خيابان ۷ تير، كوچه رسالت ۱۱ جنوبي، جنب باغ سابق نبوي
.

مراجع

[1] SH.REZAPOUR,R.HAMLBARANIHAGHI, *some notes on the paper "cone metric spaces and fixed point theoremsof contractive mappings ",j.math.anal.appl.345(2008)719-724*

[2] L.G.HUANG,X.ZANG,CONE METRIC SPACES AND FIXED POINT THEOREMS OF CONTRACTIVE MAPPINGS , J.MATH.ANGL.APPL.322(2)(2007)1468-1476

[3] S.JANKOVIC,Z.KADELBURG,S.RADENOVIC,B.E.RHOADES, *assad-kirk-typefixed point theorems forpairofnonself mappings on cone metric spaces,fixed point theory appl.(2008)*

[4] S.M.VEAZPOUR.P.RAJA,SOME EXTENSIONS OF BANACH CONTRACTION PRINCIPLE IN COMPLETE CONE METRIC SPACES ,FIXED POINT THEORY AND APPLICATIONS VOLUME 2008

پست الکترونیکی: Vali.hosiny@yahoo.com