ماتریس گرام در مدول های نیم ضرب داخلی روی C^*-جبرها

زیبا میرمحمدولی*
فارغ التحصیل دانشگاه دامغان

چکیده

ابتدا تعاریف وخواصی از C^*- جبرها، C^*- مدول های نیم ضرب داخلی وماتریس گرام رابیان می کنیم سپس بااستفاده ازمثبتی ماتریس گرام دنباله های تودرتو می سازیم.درانتهابابکارگیری بعضی نتایج نظریه عملگری الگوریتمی سودمند برای محاسبه وارون یک عنصروارون پذیرارائه می دهیم.

واژه‌های کلیدی: هیلبرت پیش مدول، ماتریس گرام، نامساوی کشی شوارتز

۱ مقدمه

ابتدا به بررسی تعاریف و خواص C^*- جبرها می پردازیم. پس از آن C^*- مدولهای هیلبرت را که در واقع تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند.

تعریف ۱.۱. یک برگشت روی جبر A یک نگاشت مزدوج خطی چون $\begin{cases} * : A \to A \\ a \mapsto a^* \end{cases}$ است که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) $(a^*)^* = a$

(۲) $(ab)^* = b^*a^*$

(۳) $(a+b)^* = a^* + b^*$

(۴) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$

به ازای هر $a, b \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$. در این صورت جفت $(A, *)$ یک $*$- جبر نامیده می شود.

تعریف ۲.۱. یک C^*-جبر، $*$-جبر باناخ چون A است به طوری که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد. یک A-مدول راست نیم ضرب داخلی فضای خطی چون X است که یک A-مدول راست، همراه با ضرب سازگار

$$(\lambda(xa) = x(\lambda a) = (\lambda x)a \quad \forall x \in X,\ a \in A,\ \lambda \in \phi)$$

و دارای یک نیم ضرب داخلی A-مقدار، $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to A$ باشد.

*سخنران

البته در شرایط زیر صدق می کند:

i) $\langle x,x\rangle \geq 0$

ii) $\langle x,\lambda y+z\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

iii) $\langle x,ya\rangle = \langle x,y\rangle a$

iv) $\langle x,y\rangle^* = \langle y,x\rangle$

مثال‌هایی از مدول های نیم ضرب داخلی

(۱) هر C^*-جبر A همراه با نیم ضرب

$$\langle a,b\rangle = a^*b \qquad (a,b\in A)$$

یک A-مدول نیم ضرب داخلی است.

(۲) اگر H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند. فضای $B(H_1,H_2)$ از همهٔ عملگرهای خطی کران دار از H_1 به H_2 یک هیلبرت $B(H_1)$ مدول با نیم ضرب $\langle T,S\rangle = T^*S$ است.

یکی از نامساوی های بنیادی در مدول نیم‌ضرب داخلی $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ روی C^*- جبر A نامساوی کشی–شوارتز است. نامساوی زیر تعمیم کلاسیک نامساوی کشی–شوارتز در A–مدول هیلبرت X است.

$$\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle \leq \|y\|^2\langle x,x\rangle \quad (x,y\in X).$$

تعریف ۴.۱. فرض کنیم $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک A–مدول نیم ضرب داخلی باشد و $n\in\mathbb{N}$.
ماتریس گرام به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\langle x_i,x_j\rangle]\in M_n(A) \qquad x_1,\dots,x_n\in X.$$

- برای هر $x_1,\dots,x_n\in X$ ماتریس $[\langle x_i,x_j\rangle]$ یک ماتریس مثبت در $M_n(A)$ است.

- نامساوی کشی–شوارتز برای $x,y\in X$

$$\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle \leq \|y\|\langle x,x\rangle$$

داریم:

$$\begin{bmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle\\ \langle x,y\rangle^* & \|\langle y,y\rangle\|e\end{bmatrix} \geq 0$$

برای هر $x,y\in X$.
از مثبت بودن ماتریس گرام داریم

$$\begin{bmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle\\ \langle x,y\rangle^* & \|\langle y,y\rangle\|e\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle\\ \langle x,y\rangle^* & \langle y,y\rangle\end{bmatrix} \geq 0$$

فرض کنیم $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک A–مدول نیم ضرب داخلی باشد، برای هر $z\in X$ که $\langle z,z\rangle\neq 0$ تعریف می کنیم

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_z : X\times X\to A$$
$$\langle x,y\rangle_z := \|z\|^2\langle x,y\rangle - \langle x,z\rangle\langle z,y\rangle$$

بوضوح $\langle\cdot,\cdot\rangle_z$ یک نیم ضرب داخلی دیگر روی X است.
برای $x_1,\dots,x_n\in X$ و هر $z\in X$ که $\langle z,z\rangle\neq 0$ داریم: $[\langle x_i,x_j\rangle_z]\geq 0$ و لذا

$$[\langle x_i,x_j\rangle] \geq \frac{1}{\|z\|^2}[\langle x_i,z\rangle\langle z,x_j\rangle]$$

نتیجه ۵.۱. *فرض کنیم X یک فضای هیلبرت A-مدول باشد و $T\in B(X)$ یک نگاشت مثبت باشد آنگاه برای همه $z,x_1,\dots,x_n\in X$ داریم:*

$$\|T^{\frac{1}{2}}z\|^2[\langle Tx_i,x_j\rangle] \geq [\langle Tx_i,z\rangle\langle z,Tx_j\rangle] \geq 0$$

۲ نتایج اصلی

فرض کنیم A یک C^*-جبر با یکهٔ e باشد، برای هر عنصر مثبت $a \in A$ و $a \neq 0$ برای هر $m \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم:

$$f_0(a) = a, \qquad g_0(a) = \|f_0(a)\|e - f_0(a)$$
$$f_m(a) = f_{m-1}(a)g_{m-1}(a), \qquad g_m(a) = \|f_m(a)\|e - f_m(a)$$

و با استقرا روی $m \geq 0$ داریم:

$$f_{m+1}(a) = f_m(f_1(a)) \qquad g_{m+1}(a) = g_m(f_1(a)).$$

اگر برای $m \in \mathbb{N}$، $f_m(a) = 0$ آنگاه $f_k(a) = 0 \quad \forall k \geq m$
به بیان دیگر اگر $f_m(a) \neq 0$ برای $m \in \mathbb{N}$ آنگاه $f_j(a) \neq 0, \forall j \leq m$ بنابراین برای m به طوری که $f_m(a) \neq 0$ باشد تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} p_0(a) &= \frac{e}{\|f_0(a)\|} \\ p_1(a) &= \frac{e}{\|f_0(a)\|} + \frac{g_0(a)^2}{\|f_0(a)\|.\|f_1(a)\|} \\ &\cdots \\ p_m(a) &= \frac{e}{\|f_0(a)\|} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{i}\|f_k(a)\|}\prod_{k=0}^{i-1} g_k(a)^2\right) \end{aligned}$$

فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ به گونه ای باشد که $f_{m+1}(a) = 0, f_m(a) \neq 0$، در این صورت قرارداد می کنیم

$$p_j(a) = p_m(a) \qquad (\forall j > m)$$

واضح است که

$$0 \leq p_0(a) \leq p_1(a) \leq \ldots \leq p_m(a) \leq \ldots$$

قضیه ۱.۲. *فرض کنیم $z \in X$ و $\langle z, z\rangle \neq 0$ آنگاه دنباله غیرنزولی $(p_m(\langle z, z\rangle))_m$ از عناصر مثبت A وجود دارد به طوری که*

$$\begin{aligned} [\langle x_i, x_j\rangle] &\geq \ldots \geq [\langle x_i, z\rangle p_m(\langle z, z\rangle)\langle z, x_j\rangle] \\ &\geq [\langle x_i, z\rangle p_{m-1}(\langle z, z\rangle)\langle z, x_j\rangle] \\ &\geq \ldots. \\ &\geq [\langle x_i, z\rangle p_0(\langle z, z\rangle)\langle z, x_j\rangle] \\ &= \frac{1}{\|z\|^2}[\langle x_i, z\rangle\langle z, x_j\rangle] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲. *فرض کنیم a یک عنصر مثبت از C^*-جبر $A \subseteq B(H)$ باشد. آنگاه $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f_m(a) = 0$ اگر و تنها اگر a طیف متناهی داشته باشد.*

قضیه ۳.۲. *اگر $a \neq 0$ یک عنصر مثبت از C^*-جبر $A \subseteq B(H)$ با طیف متناهی و $M \in \mathbb{N}$ با ویژگی $f_M(a) \neq 0$ و $f_{M+1}(a) = 0$ باشد، آنگاه $ap_M(a)$ تصویر متعامد، $Im(a)$ است و در حالت خاص اگر a وارون پذیر باشد آنگاه $p_M(a) = a^{-1}$ است.*

مثال ۴.۲.

$$a=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=diag(۵,۴,۲,۱)\quad (a\in M_۴(\mathbb{C}))$$

$$\begin{aligned} f_۰(a) &= diag(۵,۴,۲,۱) & \|f_۰(a)\|=۵ && g_۰(a)=diag(۵,۴,۲,۱)\\ f_۱(a) &= diag(۰,۴,۶,۴) & \|f_۱(a)\|=۶ && g_۱(a)=diag(۶,۲,۰,۲)\\ f_۲(a) &= diag(۰,۸,۰,۸) & \|f_۲(a)\|=۸ && g_۲(a)=۰\\ f_۳(a) &= ۰ \end{aligned}$$

$$p_۰(a)=diag(\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۵}),\ p_۱(a)=diag(\frac{۱}{۵},\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۲},\frac{۱۱}{۱۵})$$
$$p_۲(a)=diag(\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۱),\ p_k(a)=p_۲(a)\quad k\geq ۳$$

بوضوح $p_۲(a)=a^{-۱}$.

اگر $\sigma(a)$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد $f_m(a)$ هرگز باصفر برابر نمی‌شود. بنابراین $(p_m(a))$ در این حالت دنباله‌ای اکیداً صعودی از عناصر مثبت از $B(H)$ است.

ملاحظه ۵.۲. فرض کنیم a یک عملگر فشرده مثبت با طیف نامتناهی باشد و دنبالهٔ $(ap_m(a))$ همگرا به p در نرم باشد. در نظر می‌گیریم $p_m(a)\in C^*(a)$ برای همه $m\geq ۰$، که $C^*(a)$، C^*-جبر تولید شده با a است. چون $C^*(a)$ بسته است، پس $p\in C^*(a)$. اما این غیرممکن است زیرا $\sigma(a)$ مجموعه‌ای نامتناهی است و $\overline{Ima}$ فضای نامتناهی بعد است. بنابراین $p\notin C^*(a)$.

گزاره ۶.۲. *فرض کنیم a یک عنصر مثبت از C^*-جبر $A\subseteq B(H)$ باطیف نامتناهی باشد. آنگاه*

$$\lim_{m\to\infty} ap_m(a)a=a$$

در حالت خاص اگر a یک عملگر وارون پذیر باشد

$$\lim_{m\to\infty} p_m(a)=a^{-۱}$$

گزاره ۷.۲. *فرض کنیم $a\in B(H)$ یک عملگر مثبت باشد و $p\in B(H)$ تصویر متعامد $\overline{Ima}$ باشد آنگاه $(ap_m(a))_m$ همگرا به p در نرم است اگر و فقط اگر Ima زیرفضای بسته از H باشد.*

گزاره ۸.۲. *فرض کنیم X یک نیم ضرب داخلی روی C^*-جبر $A\subseteq B(H)$ باشد. برای $z\in X$ و $a=\langle z,z\rangle\in A$، فرض کنیم $p\in B(H)$ تصویر متعامد $\overline{Ima}$ را نمایش می دهد. فرض کنیم عملگر مثبت $h\in B(H)$ وجود داشته باشد به طوری که برای $x_۱,...,x_n\in X$ و برای هر $m\geq ۰$ داشته باشیم:*

$$[\langle x_i,x_j\rangle]\geq[\langle x_i,z\rangle h\langle z,x_j\rangle]\geq[\langle x_i,z\rangle p_m(\langle z,z\rangle)\langle z,x_j\rangle]$$

آنگاه $aha=a$ و $ah=p$

مراجع

[1] Lance, E Christopher, *Hilbert C*-modules: a toolkit for operator algebraists*, Cambridge University Press. 210 (1995).

[2] Arambaic, Ljiljana and Bakic, DAMIR and Moslehian, MS, *Gram matrix in inner product modules over C∗-algebras*, arXiv preprint arXiv:0905.3509, (2009).

پست الکترونیکی: `zibamirmohammad@gmail.com`