

# SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



آموزش آنلاین ابزار پژوهش کمی (کاربره نرم افزار SPSS)

کارگاه آنلاین کاربرد نرم افزار SPSS در پژوهش



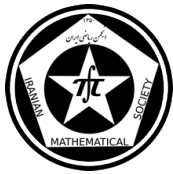
مباحث پیشرفته یادگیری عمیق شبکه های توجه گرافی (GAN)

مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛ شبکه های توجه گرافی (Graph Attention Networks)



مقاله نویسی ISI (روزه علمی مهندسی)

کارگاه آنلاین مقاله نویسی IEEE و ISI ویژه فنی و مهندسی



## پایداری ورودی-خروجی کراندار برای سیستم‌های کنترل خطی فازی

مهرآسا آیت‌اللهی\*  
فاطمه امینی  
الهام واثقی

دانشگاه پیام نور  
دانشگاه پیام نور  
دانشگاه فنی و حرفه‌ای دکتر شریعتی

### چکیده

این مقاله، پایداری یک سیستم کنترل خطی فازی را از دیدگاه ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهد. پایداری مورد بحث، مربوط به زمانی است که ورودی و خروجی‌های کراندار برای سیستم، مطرح باشند. شرایط لازم و کافی برای دستیابی به این نوع پایداری به صورت یک قضیه ارائه و با استفاده از ریاضیات فازی اثبات خواهد گردید.

واژه‌های کلیدی: سیستم کنترل خطی فازی، پایداری، ورودی و خروجی کراندار  
Mathematics Subject Classification [2010]: 34H05, 93C42, 06D72, 34K20

### ۱ مقدمه

در این قسمت برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز در زمینه تئوری فازی و نظریه کنترل ارائه می‌گردد. مجموعه اعداد فازی را با نماد  $E$  روی مجموعه اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$  در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱ ([۱]) یک عدد فازی در فرم پارامتری عبارتست از زوج مرتب  $(\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha))$  که  $0 \leq \alpha \leq 1$  و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱.  $\underline{u}(\alpha)$  تابعی کراندار و غیر کاهشی است که روی  $[0, 1]$  پیوستگی راست دارد.

۲.  $\bar{u}(\alpha)$  تابعی کراندار و غیر افزایشی است که روی  $[0, 1]$  پیوستگی چپ دارد.

۳.  $\underline{u}(\alpha) \leq \bar{u}(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1$ .

تعریف ۲.۱ ([۲]) به ازای هر  $0 \leq \alpha \leq 1$  مجموعه آلفا-برش برای عدد فازی  $u \in E$  عبارتست از:

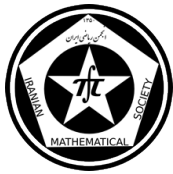
$$[u]_{\alpha} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq \alpha\} & \text{if } \alpha > 0 \\ cl(supp u) & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

بدین ترتیب مجموعه آلفا-برش هر عدد فازی، یک بازه بسته و کراندار به صورت  $[\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)]$  تعریف می‌کند که  $\underline{u}(\alpha)$  و  $\bar{u}(\alpha)$  به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست  $[u]_{\alpha}$  هستند. برای نمایش هر عدد حقیقی و دلخواه  $y \in \mathbb{R}$  کفایت قرار دهیم:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = y \\ 0 & \text{if } t \neq y \end{cases} \quad (2)$$

مثلا  $\tilde{0} = [0]_{\alpha} = (0, 0)$

\* سخنران



**تعریف ۳.۱.** ([۳]) فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی  $u = (\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha))$  و  $v = (\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha))$  عبارتست از نگاشت  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  که:

$$d(u, v) = \sup \max\{|\underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha)|, |\bar{u}(\alpha) - \bar{v}(\alpha)|\} \quad (۳)$$

به سادگی دیده می‌شود که  $d$  یک متر روی  $E$  تعریف می‌کند.

**قضیه ۴.۱.** فرض کنیم  $f(t)$  یک تابع فازی مقدار روی  $[a, \infty)$  باشد که  $[f(t)]_\alpha = (\underline{f}(t, \alpha), \bar{f}(t, \alpha))$  . همچنین فرض کنیم به ازای هر  $\alpha \in [0, 1]$  توابع  $\underline{f}(t, \alpha)$  و  $\bar{f}(t, \alpha)$  روی  $[a, b]$  (به ازای  $b \geq a$ ) انتگرال پذیر ریمان باشند و توابع مثبت  $\underline{M}(\alpha)$  و  $\bar{M}(\alpha)$  چنان موجود باشند که  $\int_a^b |\underline{f}(t, \alpha)| dt \leq \underline{M}(\alpha)$  و  $\int_a^b |\bar{f}(t, \alpha)| dt \leq \bar{M}(\alpha)$  . در این صورت تابع  $f(t)$  انتگرال پذیر ریمان فازی روی  $[a, \infty)$  است و حاصل این انتگرال یک عدد فازی است. علاوه بر این داریم:

$$[\int_a^\infty f(t) dt]_\alpha = \left( \int_a^\infty \underline{f}(t, \alpha) dt, \int_a^\infty \bar{f}(t, \alpha) dt \right) \quad (۴)$$

□

اثبات. برای اثبات به [۴] مراجعه شود.

اکنون سیستم تک ورودی-تک خروجی:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (۵)$$

را که  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}$  و  $x : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ ,  $u : \mathbb{R} \rightarrow E$  و  $y : \mathbb{R} \rightarrow E$  به عنوان یک سیستم کنترل خطی فازی در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۵.۱.** اگر  $u(t)$  به عنوان یک ورودی ضربه فازی به سیستم (۵) وارد شود آنگاه خروجی فازی ناشی از  $u(t)$  را با  $g(t)$  نمایش داده به عنوان پاسخ ضربه تعریف می‌کنیم و داریم:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^t g(t)u(t-\tau) d\tau \quad (۶)$$

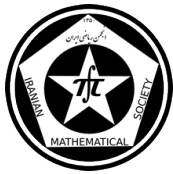
**تعریف ۶.۱.** ورودی  $u(t)$  برای سیستم (۵) کراندار فازی نامیده می‌شود هرگاه  $u_m = (\underline{u}_m(\alpha), \bar{u}_m(\alpha))$  وجود داشته باشد که:

$$d(|u(t)|, \bar{\circ}) \leq d(u_m, \bar{\circ}) \quad (۷)$$

با توجه به تعریف فوق، پایداری ورودی-خروجی کراندار فازی بدین معناست که هر ورودی کراندار فازی  $u(t)$  منجر به یک خروجی کراندار فازی گردد.

## ۲ نتایج اصلی

در این قسمت شرایط لازم و کافی برای پایداری ورودی-خروجی کراندار برای سیستم (۵) بیان و اثبات می‌گردد.



قضیه ۱.۲. سیستم کنترل فازی تک ورودی-تک خروجی (۵) پایداری ورودی-خروجی کراندار دارد اگر و تنها اگر پاسخ ضربه فازی  $g(t)$  روی  $[0, \infty)$  مطلقاً انتگرال‌پذیر فازی باشد. به عبارت دیگر، داشته باشیم:

$$d\left(\int_0^{\infty} |g(t)| dt, \tilde{\sigma}\right) \leq d(M, \tilde{\sigma}) < \infty$$

جاییکه  $M = (\underline{M}(\alpha), \overline{M}(\alpha)) \in E$ .

اثبات. فرض کنیم  $g(t)$  مطلقاً انتگرال‌پذیر فازی باشد و  $u(t)$  یک ورودی فازی کراندار دلخواه باشد؛ یعنی  $u_m = (\underline{u}_m(\alpha), \overline{u}_m(\alpha))$  وجود داشته باشد که:

$$d(|u(t)|, \tilde{\sigma}) \leq d(u_m, \tilde{\sigma}), \forall t \geq 0$$

طبق (۶):

$$d(|y(t)|, \tilde{\sigma}) = d\left|\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau\right|, \tilde{\sigma}$$

از طرفی:

$$\left|\int_0^t \underline{g}(\tau, \alpha) \underline{u}(t-\tau, \alpha) d\tau\right| \leq \int_0^t |\underline{g}(\tau, \alpha)| |\underline{u}(t-\tau, \alpha)| d\tau \leq \underline{u}_m(\alpha) \int_0^t \underline{g}(\tau, \alpha) d\tau \leq \underline{u}_m(\alpha) \underline{M}(\alpha)$$

و

$$\left|\int_0^t \overline{g}(\tau, \alpha) \overline{u}(t-\tau, \alpha) d\tau\right| \leq \int_0^t |\overline{g}(\tau, \alpha)| |\overline{u}(t-\tau, \alpha)| d\tau \leq \overline{u}_m(\alpha) \int_0^t \overline{g}(\tau, \alpha) d\tau \leq \overline{u}_m(\alpha) \overline{M}(\alpha)$$

بنابراین طبق تعریف فاصله هاسدورف داریم:

$$d\left(\int_0^{\infty} |g(t)| dt, \tilde{\sigma}\right) \leq d(M, \tilde{\sigma})$$

بنابراین خروجی فازی به دست آمده، کراندار است.

حال فرض کنیم سیستم (۵) پایداری ورودی-خروجی کراندار دارد اما  $g(t)$  مطلقاً انتگرال‌پذیر فازی نیست. در این صورت  $t_1$  وجود دارد که:

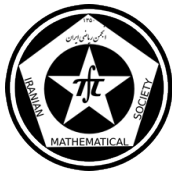
$$d\left(\int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau, \tilde{\sigma}\right) = \infty$$

یا به عبارت دیگر برای هر عدد فازی  $N = (\underline{N}(\alpha), \overline{N}(\alpha))$  داریم:

$$d\left(\int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau, \tilde{\sigma}\right) \geq d(N, \tilde{\sigma})$$

اکنون یک ورودی فازی کراندار به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u(t_1 - \tau, \alpha) = \begin{cases} \tilde{\sigma} & g(\tau, \alpha) \geq \tilde{\sigma} \\ -\tilde{\sigma} & g(\tau, \alpha) < \tilde{\sigma} \end{cases}$$



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

پایداری ورودی-خروجی کراندار برای سیستم‌های کنترل خطی فازی



دانشگاه یزد

سخنرانی

آنگاه:

$$\underline{y}(t, \alpha) = \int_0^{t_1} \underline{g}(\tau, \alpha) \underline{u}(t_1 - \tau, \alpha) d\tau = \int_0^{t_1} |\underline{g}(\tau, \alpha)| d\tau \geq \underline{N}(\alpha)$$

و:

$$\bar{y}(t, \alpha) = \int_0^{t_1} \bar{g}(\tau, \alpha) \bar{u}(t_1 - \tau, \alpha) d\tau = \int_0^{t_1} |\bar{g}(\tau, \alpha)| d\tau \geq \bar{N}(\alpha)$$

با توجه به تعریف فاصله هاسدورف داریم:

$$d(y(t), \tilde{\circ}) \geq d(N, \tilde{\circ})$$

□

یعنی به ازای ورودی فازی کراندار فوق، خروجی حاصل، کراندار نخواهد بود.

## مراجع

- [۱] اللهویرانلو، توفیق، طاهری، نرگس، مجموعه‌های فازی و خواص آن، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ۱۳۸۷.
- [2] S. Salahshour, T. Allahviranloo, *Applications of fuzzy Laplace transforms*, Soft Computing 17, no. 1, (2013), pp. 221-244.
- [3] B. Bede, S.G. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 151, no. 3, (2005), pp. 581-599.
- [4] H.C. Wu, *The improper fuzzy Riemann integral and its numerical integration*, Information Sciences 111, no. 1, (1998), pp. 109-137.

پست الکترونیکی: m\_ayatollahi@pnu.ac.ir

پست الکترونیکی: arghi\_1382@yahoo.com

پست الکترونیکی: e\_vasseghi@yahoo.com

# SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه

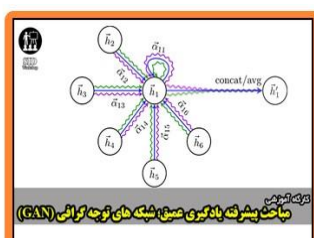


فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



کارگاه آنلاین کاربرد نرم افزار SPSS در پژوهش



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛ شبکه های توجه گرافی (Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین مقاله نویسی IEEE و ISI و پژوهش فنی و مهندسی