پایداری ورودی–خروجی کراندار برای سیستم‌های کنترل خطی فازی

مهرآسا آیت‌اللهی* — دانشگاه پیام نور
فاطمه امینی — دانشگاه پیام نور
الهام واثقی — دانشکده فنی و حرفه‌ای دکتر شریعتی

چکیده

این مقاله، پایداری یک سیستم کنترل خطی فازی را از دیدگاه ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهد. پایداری مورد بحث، مربوط به زمانی است که ورودی و خروجی‌های کراندار برای سیستم، مطرح باشند. شرایط لازم و کافی برای دستیابی به این نوع پایداری به صورت یک قضیه ارائه و با استفاده از ریاضیات فازی اثبات خواهد گردید.

واژه‌های کلیدی: سیستم کنترل خطی فازی، پایداری، ورودی و خروجی کراندار
Mathematics Subject Classification [2010]: 34H05, 93C42, 06D72, 34K20

۱ مقدمه

در این قسمت برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز در زمینه تئوری فازی و نظریه کنترل ارائه می‌گردد. مجموعه اعداد فازی را با نماد E روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱. ([۱]) یک عدد فازی در فرم پارامتری عبارتست از زوج مرتب $(\underline{u}(\alpha),\overline{u}(\alpha))$ که $\circ \leq \alpha \leq ۱$ و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $\underline{u}(\alpha)$ تابعی کراندار و غیر کاهشی است که روی $[\circ,۱]$ پیوستگی راست دارد.

۲. $\overline{u}(\alpha)$ تابعی کراندار و غیر افزایشی است که روی $[\circ,۱]$ پیوستگی چپ دارد.

۳. $\underline{u}(\alpha) \leq \overline{u}(\alpha), \circ \leq \alpha \leq ۱$.

تعریف ۲.۱. ([۲]) به ازای هر $\circ \leq \alpha \leq ۱$ مجموعه آلفا–برش برای عدد فازی $u \in E$ عبارتست از:

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq \alpha\} & \text{if} \quad \alpha > \circ \\ cl(supp u) & \text{if} \quad \alpha = \circ \end{cases} \qquad (۱)$$

بدین ترتیب مجموعه آلفا–برش هر عدد فازی، یک بازه بسته و کراندار به صورت $[\underline{u}(\alpha),\overline{u}(\alpha)]$ تعریف می‌کند که $\underline{u}(\alpha)$ و $\overline{u}(\alpha)$ به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست $[u]_\alpha$ هستند. برای نمایش هر عدد حقیقی و دلخواه $y \in \mathbb{R}$ کافیست قرار دهیم:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} ۱ & \text{if} \quad t = y \\ \circ & \text{if} \quad t \neq y \end{cases} \qquad (۲)$$

مثلا $\tilde{\circ} = [\circ]_\alpha = (\underline{\circ},\overline{\circ})$.

* سخنران

تعریف ۳.۱. ([۳]) فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی $u = (\underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha))$ و $v = (\underline{v}(\alpha), \overline{v}(\alpha))$ عبارتست از نگاشت $d : E \times E \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ که:

$$d(u, v) = sup\, max\{|\underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha)|, |\overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha)|\} \qquad (۳)$$

به سادگی دیده می‌شود که d یک متر روی E تعریف می‌کند.

قضیه ۴.۱. *فرض کنیم $f(t)$ یک تابع فازی مقدار روی $[a, \infty)$ باشد که $[f(t)]_\alpha = (\underline{f}(t,\alpha), \overline{f}(t,\alpha))$. همچنین فرض کنیم به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ توابع $\underline{f}(t, \alpha)$ و $\overline{f}(t, \alpha)$ روی $[a, b]$ (به ازای $b \geq a$) انتگرال‌پذیر ریمان باشند و توابع مثبت $\underline{M}(\alpha)$ و $\overline{M}(\alpha)$ چنان موجود باشند که $\int_a^b |\underline{f}(t, \alpha)|\mathrm{d}t \leq \underline{M}(\alpha)$ و $\int_a^b |\overline{f}(t, \alpha)|\mathrm{d}t \leq \overline{M}(\alpha)$. در این صورت تابع $f(t)$ انتگرال‌پذیر ریمان فازی روی $[a, \infty)$ است و حاصل این انتگرال یک عدد فازی است. علاوه بر این داریم:*

$$[\int_a^\infty f(t)\mathrm{d}t]_\alpha = \left(\int_a^\infty \underline{f}(t, \alpha)\mathrm{d}t, \int_a^\infty \overline{f}(t, \alpha)\mathrm{d}t \right) \qquad (۴)$$

اثبات. برای اثبات به [۴] مراجعه شود. □

اکنون سیستم تک ورودی–تک خروجی:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad (۵)$$

را که $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$، $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$، $D \in \mathbb{R}$ و $u : \mathbb{R} \to E$، $x : \mathbb{R}^n \to E$، $y : \mathbb{R} \to E$ به عنوان یک سیستم کنترل خطی فازی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵.۱. اگر $u(t)$ به عنوان یک ورودی ضربه فازی به سیستم (۵) وارد شود آنگاه خروجی فازی ناشی از $u(t)$ را با $g(t)$ نمایش داده به عنوان پاسخ ضربه تعریف می‌کنیم و داریم:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(t)u(t - \tau)\mathrm{d}\tau \qquad (۶)$$

تعریف ۶.۱. ورودی $u(t)$ برای سیستم (۵) کراندار فازی نامیده می‌شود هرگاه $u_m = (\underline{u_m}(\alpha), \overline{u_m}(\alpha))$ وجود داشته باشد که:

$$d(|u(t)|, \tilde{0}) \leq d(u_m, \tilde{0}) \qquad (۷)$$

با توجه به تعریف فوق، پایداری ورودی–خروجی کراندار فازی بدین معناست که هر ورودی کراندار فازی $u(t)$ منجر به یک خروجی کراندار فازی گردد.

۲ نتایج اصلی

در این قسمت شرایط لازم و کافی برای پایداری ورودی–خروجی کراندار برای سیستم (۵) بیان و اثبات می‌گردد.

قضیه ۱.۲. *سیستم کنترل فازی تک ورودی–تک خروجی (۵) پایداری ورودی–خروجی کراندار دارد اگر و تنها اگر پاسخ ضربه فازی $g(t)$ روی $[0,\infty)$ مطلقا انتگرال‌پذیر فازی باشد. به عبارت دیگر، داشته باشیم:*

$$d\Big(\int_0^\infty |g(t)|\mathrm{d}t, \tilde{0}\Big) \leq d(M, \tilde{0}) < \infty$$

جاییکه $M = (\underline{M}(\alpha), \overline{M}(\alpha)) \in E$.

اثبات. فرض کنیم $g(t)$ مطلقا انتگرال‌پذیر فازی باشد و $u(t)$ یک ورودی فازی کراندار دلخواه باشد؛ یعنی $u_m = (\underline{u_m}(\alpha), \overline{u_m}(\alpha))$ وجود داشته باشد که:

$$d(|u(t)|, \tilde{0}) \leq d(u_m, \tilde{0}), \forall t \geq 0$$

طبق (۶):

$$d(|y(t)|, \tilde{0}) = d(|\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau|, \tilde{0})$$

از طرفی:

$$|\int_0^t \underline{g}(\tau,\alpha)\underline{u}(t-\tau,\alpha)\mathrm{d}\tau| \leq \int_0^t |\underline{g}(\tau,\alpha)||\underline{u}(t-\tau,\alpha)|\mathrm{d}\tau \leq \underline{u_m}(\alpha)\int_0^t \underline{g}(\tau,\alpha)\mathrm{d}\tau \leq \underline{u_m}(\alpha)\underline{M}(\alpha)$$

و

$$|\int_0^t \overline{g}(\tau,\alpha)\overline{u}(t-\tau,\alpha)\mathrm{d}\tau| \leq \int_0^t |\overline{g}(\tau,\alpha)||\overline{u}(t-\tau,\alpha)|\mathrm{d}\tau \leq \overline{u_m}(\alpha)\int_0^t \overline{g}(\tau,\alpha)\mathrm{d}\tau \leq \overline{u_m}(\alpha)\overline{M}(\alpha)$$

بنابراین طبق تعریف فاصله هاسدورف داریم:

$$d\Big(\int_0^\infty |g(t)|\mathrm{d}t, \tilde{0}\Big) \leq d(M, \tilde{0})$$

بنابراین خروجی فازی به دست آمده، کراندار است.

حال فرض کنیم سیستم (۵) پایداری ورودی–خروجی کراندار دارد اما $g(t)$ مطلقا انتگرال‌پذیر فازی نیست. در این صورت t_1 وجود دارد که:

$$d(\int_0^{t_1} |g(\tau)|\mathrm{d}\tau, \tilde{0}) = \infty$$

یا به عبارت دیگر برای هر عدد فازی $N = (\underline{N}(\alpha), \overline{N}(\alpha))$ داریم:

$$d(\int_0^{t_1} |g(\tau)|\mathrm{d}\tau, \tilde{0}) \geq d(N, \tilde{0})$$

اکنون یک ورودی فازی کراندار به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u(t_1-\tau,\alpha) = \begin{cases} \tilde{1} & g(\tau,\alpha) \geq \tilde{0} \\ \widetilde{-1} & g(\tau,\alpha) < \tilde{0} \end{cases}$$

آنگاه:

$$\underline{y}(t,\alpha) = \int_{0}^{t_1} \underline{g}(\tau,\alpha)\underline{u}(t_1-\tau,\alpha)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t_1} |\underline{g}(\tau,\alpha)|\mathrm{d}\tau \geq \underline{N}(\alpha)$$

و:

$$\overline{y}(t,\alpha) = \int_{0}^{t_1} \overline{g}(\tau,\alpha)\overline{u}(t_1-\tau,\alpha)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t_1} |\overline{g}(\tau,\alpha)|\mathrm{d}\tau \geq \overline{N}(\alpha)$$

با توجه به تعریف فاصله هاسدورف داریم:

$$d(y(t),\tilde{0}) \geq d(N,\tilde{0})$$

یعنی به ازای ورودی فازی کراندار فوق، خروجی حاصل، کراندار نخواهد بود. □

مراجع

[۱] اللهویرانلو، توفیق، طاهری، نرگس، *مجموعه‌های فازی و خواص آن*، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ۱۳۸۷.

[2] S. Salahshour, T. Allahviranloo, *Applications of fuzzy Laplace transforms*, Soft Computing 17, no. 1, (2013), pp. 221-244.

[3] B. Bede, S.G. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 151, no. 3, (2005), pp. 581-599.

[4] H.C. Wu, *The improper fuzzy Riemann integral and its numerical integration*, Information Sciences 111, no. 1, (1998), pp. 109-137.

پست الکترونیکی: m_ayatollahi@pnu.ac.ir
پست الکترونیکی: arghi_1382@yahoo.com
پست الکترونیکی: e_vasseghi@yahoo.com