سیزدهمین کنفرانس
آمار ایران
۲-۴ شهریور ۱۳۹۵

# آزمون فرضیه مربوط به میانگین متغیرهای تصادفی فازی شهودی دو جامعه

الهام رنجبر[۱]، محمد قاسم اکبری [۲]

[۱] فارغ التحصیل کارشناسي ارشد، دانشگاه بیرجند

[۲] عضو هیأت علمی دانشگاه بیرجند

**چکیده:**

در این مقاله یک دیدگاه جدید برای آزمون فرضیه بر اساس مشاهدات و فرضیه های فازی شهودی مورد بررسی قرار گرفته است در این دیدگاه ابتدا متر زینلی و همکاران را بر اساس $\alpha$ -شک اعداد فازی شهودی معرفی کرده و سپس با استفاده از آنها یک روش جدید از دیدگاه بوت استرپی برای مسئله آزمون فرضیه مربوط به میانگین دو جامعه مختلف را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** $\alpha$-شک، عدد فازی شهودی، آزمون فرضیه، بوت استرپ، فرضیه فازی

**کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** $00-\mathrm{XX}$.

## ۱ مقدمه

مسئله آزمون فرضیه‌ها در استنباط آماری از اهمیت ویژه ای برخوردار می باشند. روش‌های کلاسیک در آزمون فرضیه مبتنی بر مفروضاتی از قبیل دقیق بودن مشاهدات، دقیق بودن فرضیات آزمون، دقیق بودن پارامتر مجهول و ... می‌باشد، ولی در جهان واقعی گاهی این مفروضات برقرار نیستند. نظریه‌ی مجموعه های فازی و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی شهودی، راه‌های مناسب برای صورت بندی و تحلیل این‌گونه مفاهیم و موضوعات نادقیق می‌باشند.

اعداد فازی شهودی (فاصله ای مقدار) و همچنین $\alpha$-شک آنها یک مبحث نسبتاً جدید در محیط فازی می باشند. از این رو به دنبال تعمیم متر زینلی و همکاران براساس اعداد فازی شهودی و با استفاده از $\alpha$-شک آنها بوده تا بتوانیم از آنها برای تعمیم مسأله آزمون فرضیه های فازی برای میانگین مشاهدات فازی شهودی استفاده نماییم. آزمون فرضیه‌های فازی براساس لم نیمن-پیرسون تحت داده‌های دقیق توسط طاهری و بهبودیان (۷) و همچنین تحت داده‌های فازی توسط ترابی و همکاران(۱۰) مورد بررسی قرار گرفته است. شیوه آزمون فرضیه براساس$p$ -مقدار در یک محیط فازی توسط پرچمی و ماشینچی (۱) و آزمون فرضیه‌های فازی بر پایه تعریف نسبت درستنمایی توسط برخی از محققین از جمله توسط ترابی و بهبودیان (۸) برای فرضیه‌های فازی مورد بررسی قرار گرفته است. اکبری و

[۲] الهام رنجبر : eranjbar@birjand.ac.ir

رضایی (۲) یک روش بوت استرپی را برای آزمون فرضیه مربوط به میانگین بر اساس داده‌های فازی و با استفاده از متر یائو-ویو مورد بررسی قرار داده اند.

در این مقاله ابتدا در بخش دو، به معرفی $\alpha$ -شک ، اعداد فازی شهودی و تعریف متر فوق پرداخته ایم. در بخش سه، مسأله آزمون فرضیه های فازی برای میانگین در حالت دو نمونه ای را بر اساس $\alpha$ -شک بر روی داده های فازی شهودی با دیدگاه های مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم. و در بخش چهار به اختلاف بین میانگین ها پرداخته ایم.

## ۲ مقدمات

**تعریف ۱.۲.** (۶) لیو(۲۰۱۳) معیاری را برای مقایسه بین اعداد فازی و اعداد حقیقی معرفی کرده که به عنوان درجه ی اعتبار[۱] (میزان کوچکی عدد فازی $\tilde{A}$ نسبت به مقدار حقیقی $x$) شناخته می شود و با و با $C:\mathcal{F}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\to[0,1]$ نمایش و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$C\{\tilde{A}\leq x\}=\frac{sup_{y\leq x}\mu_{\tilde{A}}(y)+1-sup_{y>x}\mu_{\tilde{A}}(y)}{2}.$$

**تعریف ۲.۲.** (۶) کوچکترین کران بالای مجموعه همه اعضایی از $\tilde{A}_{[0]}$ را که درجه اعتبار آن‌ها حداقل به بزرگی $\alpha$ باشد، $\alpha$ -شک [۲] $\tilde{A}$ نامیده و با $\tilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهیم، یعنی : $\tilde{A}_\alpha=inf\{x\in\tilde{A}_{[0]}:C\{\tilde{A}\leq x\}\geq\alpha\}$ که $\tilde{A}_\alpha$ برای $\alpha\in(0,1]$ یک تابع غیر نزولی است.

**مثال ۳.۲.** فرض می‌کنیم $\tilde{A}=(\mu,l,r)_{LR}$ یک عدد فازی $LR$ و $x\in\mathbb{R}$ باشد، درجه اعتبار و $\alpha$ -شک آن عبارت است از

$$C\{\tilde{A}\leq x\}=\begin{cases}\frac{1}{2}L(\frac{\mu-x}{l}) & x\leq\mu,\\ 1-\frac{1}{2}R(\frac{x-\mu}{r}) & x\geq\mu,\end{cases}\quad,\tilde{A}_\alpha=\begin{cases}\mu-lL^{-1}(2\alpha) & 0<\alpha\leq 0.5,\\ \mu+rR^{-1}(2(1-\alpha)) & 0.5<\alpha\leq 1.\end{cases}$$

که اولین بار توسط پنگ و لیو (۶) بیان شد.

**لم ۴.۲.** اگر $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathcal{F}(\mathcal{R})$ باشند، آنگاه برای هر $\alpha\in(0,1]$ داریم: $(\tilde{a}\oplus\tilde{b})_\alpha=\tilde{a}_\alpha+\tilde{b}_\alpha$

**تعریف ۵.۲.** (۶) فرض کنید $\tilde{A}:(\mu,l,r)_{LR}$ یک عدد فازی $LR$ باشد. به راحتی می‌توان رابطه بین $\alpha$ -برش و $\alpha$ -شک را به صورت زیر بیان نمود:

$$\tilde{A}_\alpha=\begin{cases}\tilde{A}^L_{(2\alpha)} & 0<\alpha\leq 0.5,\\ \tilde{A}^U_{(2(1-\alpha))} & 0.5<\alpha\leq 1.\end{cases}=\begin{cases}\mu-lL^{-1}(2\alpha) & 0<\alpha\leq 0.5,\\ \mu+rR^{-1}(2(1-\alpha)) & 0.5<\alpha\leq 1.\end{cases},\tilde{A}_{[\alpha]}=[\tilde{A}_{\frac{\alpha}{2}},\tilde{A}_{1-\frac{\alpha}{2}}]\quad\forall\alpha\in(0,1]$$

در عبارت فوق دقت می‌کنیم که $\tilde{A}_\alpha$ تابعی صعودی بر حسب $\alpha\in(0,1]$ می‌باشد.

حال با استفاده از روابطه بالا متغیر تصادفی فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

**گزاره ۶.۲.** $\tilde{X}:\Omega\to\mathcal{F}_{LR}(\mathcal{R})$ یک متغیر تصادفی فازی است، اگروتنها اگر $\tilde{X}_\alpha:\Omega\to\mathcal{R}$ برای هر $\alpha\in(0,1]$ یک متغیر تصادفی معمولی باشد.

[۱] Cridilibity Degree

[۲] $\alpha$-pessimistic

**تعریف ۷.۲.** فرض کنید $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی شهودی متعارف باشد امید ریاضی آن را با $\tilde{E}(\tilde{X})$ نشان داده و

$$\tilde{E}(\tilde{X})_\alpha = E(\tilde{X}_\alpha) = \int_\Omega \tilde{X}_\alpha dp = \int_\Omega \frac{\tilde{X}^\mu_\alpha + \tilde{X}^{1-\nu}_\alpha}{2} dp.$$

**لم ۸.۲.** اگر $\tilde{A}_i = (\mu_i, l_i, r_i, l'_i, r'_i)_{LR}$ دو عدد فازی شهودی $LR$ باشند و $\lambda \in R - \{0\}$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 &= (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)_{LR} \oplus (\mu_2, l_2, r_2, l'_2, r'_2)_{LR}\\ &= (\mu_1 + \mu_2; l_1 + l_2; r_1 + r_2; l'_1 + l'_2; r'_1 + r'_2), \qquad (1.2)\\ \tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 &= (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)_{LR} \oplus (-\mu_2, r_2, l_2, r'_2, l'_2)_{LR}\\ &= (\mu_1 - \mu_2; l_1 + r_2; r_1 + l_2; l'_1 + r'_2; r'_1 + l'_2) \qquad (2.2)\end{aligned}$$

### ۱.۲ متر زینلی و همکاران (۱۲) بر اساس $\alpha$-شک

**تعریف ۹.۲.** فرض کنید $i = 1, 2$ $\quad \tilde{a}_i = (\mu_i, l_i, r_i, l'_i, r'_i)_{LR}$ دو عدد فازی شهودی $LR$ باشند زینلی و همکاران (۱۲) فاصله بین آنها به صورت زیر تعریف می کنند:

$$D^{2IF}_{Ap}(\tilde{a_1}, \tilde{a_2}) = \int_0^1 [\frac{1}{2}(\tilde{a_1}^\mu_\alpha + \tilde{a_1}^{1-\nu}_\alpha) - \frac{1}{2}(\tilde{a_2}^\mu_\alpha + \tilde{a_2}^{1-\nu}_\alpha)]^2 d\alpha$$

**قضیه ۱۰.۲.** اگر $\tilde{b}, \tilde{a}$ و $\tilde{c}$ اعداد فازی شهودی باشند، آنگاه متر $d_{Ap}(\cdot,\cdot)$ بر اساس $\alpha$-شک دارای خصوصیات زیر است:

$$i)\ D_{Ap}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$$

$$ii)\ D_{Ap}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D_{Ap}(\tilde{Y}, \tilde{X})$$

$$iii)\ D_{Ap}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \le D_{Ap}(\tilde{X}, \tilde{Z}) + D_2(\tilde{Z}, \tilde{Y})$$

فرض کنید $i = 1, 2$ $\quad \tilde{a}_i = (\mu_i, l_i, r_i, l'_i, r'_i)_{LR}$ دو عدد فازی شهودی $LR$ باشند زینلی و همکاران (۱۲) فاصله بین آنها به صورت زیر تعریف می کنند:

$$\begin{aligned}d^{2IF}_{Ap}(\tilde{a_1}, \tilde{a_2}) &= (\mu_1 - \mu_2)^2 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{4}[-l_1 - l'_1 + l_2 + l'_2 + r_1\\ &+ r'_1 - r_2 - r'_2] + \frac{(-l_1 - l'_1 + l_2 + l'_2)^2 + (r_1 + r'_1 - r_2 - r'_2)^2}{24}.\end{aligned}$$

در این قسمت فرضیه‌های فازی شهودی (که فرضیه‌های آن به صورت عدد فازی شهودی بیان می‌شوند) را می‌آوریم.

$$\text{(الف)} \begin{cases} H_0 : \theta \text{ تقریباً برابر } \theta_0 \text{ است } \quad (\tilde{\theta} \approx \tilde{\theta}_0) \\ H_1 : \theta \text{ تقریباً برابر } \theta_1 \text{ است } \quad (\tilde{\theta} \approx \tilde{\theta}_1) \end{cases}$$

## ۳ آزمون فرضیه مربوط به میانگین دوجامعه بر اساس $\alpha$-شک

در این بخش ابتدا فرضیه مربوط به تساوی واریانس های دو جامعه را بر اساس مقاله زینلی و همکاران (۱۲) مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این صورت بسته به اینکه فرضیه برابری واریانس ها رد یا قبول شود آماره آزمون خود را پایه گذاری کرده و به عبارتی دیگر یکی از دو حالات فرضیه‌های زیر را آزمون می‌کنیم:

$$\begin{cases} H^{IF}_0 : \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2, \\ \qquad\qquad\qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H^{IF}_1 : \tilde{\theta}_1 \neq \tilde{\theta}_2, \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} H^{IF}_0 : \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2, \\ \qquad\qquad\qquad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \\ H^{IF}_1 : \tilde{\theta}_1 \neq \tilde{\theta}_2. \end{cases}$$

مطابق نظریه بوت استرپی (۵) داده های خود را طوری تغییر می دهیم که تحت فرضیه $H_0^{IF}$ میانگین دو جامعه با هم برابر شود، یعنی برای هر $\alpha \in (0, 1]$ قرار می‌دهیم:

$$\tilde{Z}_{ci\alpha} = \tilde{Z}_{i\alpha} - \bar{\tilde{Z}}_{\alpha} + \frac{n\bar{Z}_{\alpha} + m\bar{Y}_{\alpha}}{n+m} \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{1.3}$$

$$\tilde{Y}_{ci\alpha} = \tilde{Y}_{i\alpha} - \bar{\tilde{Y}}_{\alpha} + \frac{n\bar{Z}_{\alpha} + m\bar{Y}_{\alpha}}{n+m} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

**لم ۱.۳.** با توجه به عبارت ۱.۳ داریم:

$$d_{Ap}^{2IF}(\bar{\tilde{z}}_c, \bar{\tilde{y}}_c) = \frac{1}{12}(-\bar{l_1} - \bar{l'_1} + \bar{l_2} + \bar{l'_2} + \bar{r_1} + \bar{r'_1} - \bar{r_2} - \bar{r'_2})^2 \neq 0$$

بنا بر عبارات فوق دو حالت را برای پایه ریزی آماره آزمون در نظر می گیریم.

**در حالت اول** اگر $d_{Ap}^{2IF}(\tilde{z}, \tilde{y}) \approx 0$ و واریانس دو جامعه برابر باشند، محاسبات خود را با مقدارآماره زیر انجام می‌دهیم.

$$t^2(\tilde{Z}_c^{*^b}, \tilde{Y}_c^{*^b}) = \frac{d_{Ap}^{2IF}(\bar{\tilde{z}}_c^{*^b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*^b})}{S_{cp}^{2*^b}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})} \tag{2.3}$$

که در آن

۱- $\bar{\tilde{z}}_c^{*^b} = \frac{1}{n} \oplus_{i=1}^n \tilde{z}_{ci}, \qquad \bar{\tilde{y}}_c^{*^b} = \frac{1}{n} \oplus_{i=1}^n \tilde{y}_{ci}$

۲- $S_{cp}^{*^b} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_{Ap}^{2IF}(\tilde{z}_{ci}^{*^b}, \bar{\tilde{z}}_c^{*^b}) + \sum_{i=1}^n d_{Ap}^{2IF}(\tilde{y}_{ci}^{*^b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*^b})}{n+m-2}} \qquad b = 1, 2, ..., B$

**در حالت دوم** اگر $d_{Ap}^{2IF}(\tilde{z}, \tilde{y}) 0$ و واریانس دو جامعه برابر باشند، قرار می‌دهیم:

$$d_{Ap}^{\prime 2IF}(\bar{\tilde{z}}_c, \bar{\tilde{y}}_c) = |d_{Ap}^{IF}(\bar{\tilde{z}}_c^{*b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*b}) - \sqrt{\frac{1}{12}(-\bar{l_1} - \bar{l'_1} + \bar{l_2} + \bar{l'_2} + \bar{r_1} + \bar{r'_1} - \bar{r_2} - \bar{r'_2})}|^2$$

در نتیجه آماره آزمون مورد نظر به صورت زیر در می‌آید:

$$t^2(\tilde{Z}_c^{*^b}, \tilde{Y}_c^{*^b}) = \frac{d_{Ap}^{\prime 2IF}(\bar{\tilde{z}}_c, \bar{\tilde{y}}_c)}{S_{cp}^{\prime *^b}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})} \tag{3.3}$$

که در آن

۱- $\bar{\tilde{z}}_c^{*^b} = \frac{1}{n} \oplus_{i=1}^n \tilde{z}_{ci}, \qquad \bar{\tilde{y}}_c^{*^b} = \frac{1}{n} \oplus_{i=1}^n \tilde{y}_{ci}$

۲- $S_p^{\prime *^b} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_{Ap}^{\prime 2IF}(\tilde{z}_{ci}^{*^b}, \bar{\tilde{z}}_c^{*^b}) + \sum_{i=1}^n d_{Ap}^{\prime 2IF}(\tilde{y}_{ci}^{*^b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*^b})}{n+m-2}} \qquad b = 1, 2, ..., B$

در صورت عدم برابری واریانس ها آماره آزمون در حالت اول به صورت زیر تغییر داده شده و محاسبات را انجام می دهیم.

$$t^2(\tilde{X}_c^{*^b}) = \frac{d_{Ap}^{2IF}(\bar{\tilde{z}}_c^{*^b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*^b})}{\frac{S_{1c}^{2*^b}}{n} + \frac{S_{2c}^{2*^b}}{m}}$$

و آماره آزمون حالت دوم به صورت زیر در می آید.

$$t^2(\tilde{Z}_c^{*^b}, \tilde{Y}_c^{*^b}) = \frac{d_{Ap}^{\prime 2IF}(\bar{\tilde{z}}_c^{*^b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*^b})}{\frac{S_{1c}^{\prime 2*^b}}{n} + \frac{S_{2c}^{\prime 2*^b}}{m}} \tag{4.3}$$

حال به دنبال آزمون فرضیه $H_0^{IF}$ در مقابل $H_1^{IF}$ با استفاده از چندک های بوت استرپی برای اعداد فازی شهودی هستیم. برای این منظور به تشریح مثال هایی که ذیلا آمده، می پردازیم.

جدول ۱: داده‌های مربوط به مثال ۲.۳

| $n$ | $\tilde{X} = (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)_T$ | $n$ | $\tilde{X} = (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)_T$ | $m$ | $\mu_2, r_2)_T$ | $m$ | $\tilde{Y} = (l_2, \mu_2, r_2)_T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | (۴۴, ۲, ۳, ۴, ۴)$_T$ | ۹ | (۱۹, ۲, ۲, ۲, ۲)$_T$ | ۱ | (۱۵, ۲, ۲, ۳, ۳)$_T$ | ۹ | (۲۳, ۱, ۱, ۲, ۲)$_T$ |
| ۲ | (۱۵, ۱, ۲, ۲, ۲)$_T$ | ۱۰ | (۲۵, ۲, ۱, ۳, ۲)$_T$ | ۲ | (۶۶, ۲, ۳, ۳, ۴)$_T$ | ۱۰ | (۴۰, ۲, ۳, ۳, ۴)$_T$ |
| ۳ | (۱۹, ۲, ۲, ۳, ۴)$_T$ | ۱۱ | (۳۰, ۲, ۳, ۳, ۴)$_T$ | ۳ | (۹۲, ۳, ۳, ۴, ۵)$_T$ | ۱۱ | (۶۹, ۲, ۲, ۲, ۳)$_T$ |
| ۴ | (۴۷, ۱, ۲, ۲, ۳)$_T$ | ۱۲ | (۶۵, ۱, ۲, ۳, ۴)$_T$ | ۴ | (۶۸, ۲, ۳, ۴, ۴)$_T$ | ۱۲ | (۸۰, ۱, ۱, ۱, ۲)$_T$ |
| ۵ | (۴۵, ۳, ۳, ۴, ۳)$_T$ | ۱۳ | (۵۵, ۲, ۳, ۳, ۴)$_T$ | ۵ | (۴۳, ۲, ۱, ۳, ۲)$_T$ | ۱۳ | (۹۲, ۳, ۲, ۳, ۳)$_T$ |
| ۶ | (۵۸, ۲, ۱, ۳, ۲)$_T$ | ۱۴ | (۲۲, ۳, ۱, ۳, ۳)$_T$ | ۶ | (۵۷, ۳, ۴, ۳, ۵)$_T$ | | |
| ۷ | (۴۹, ۲, ۲, ۲, ۳)$_T$ | ۱۵ | (۶۴, ۱, ۲, ۳, ۴)$_T$ | ۷ | (۹۹, ۴, ۳, ۴, ۴)$_T$ | | |
| ۸ | (۹۰, ۳, ۳, ۴, ۵)$_T$ | ۱۶ | (۵۰, ۲, ۱, ۲, ۲)$_T$ | ۸ | (۸۲, ۱, ۲, ۳, ۴)$_T$ | | |

**مثال ۲.۳.** دو نمونه تصادفی فازی به حجم ۱۶ $= n$ و ۱۳ $= m$ از دو جامعه مستقل مطابق جدول ۱ گرفته شده است. در مقاله (۱۲) برابری واریانس ها نشان داده شده است، آماره آزمون بر طبق ۲.۳ برابر با ۵/۱۲۵۵۸ $= t^2$ بدست می‌آید،که بر طبق جدول ۲ فرض صفر برای ۰/۰۵ $= \gamma$ را رد می‌کنیم. چندک‌های مربوط به آماره مورد نظر در جدول زیر موجود است. دقت شود که در این مثال ۰ $\approx$ ۰/۰۳۴ $= d^{2IF}_{Ap}(\bar{\tilde{z}}_c, \bar{\tilde{y}}_c)$ لذا از آماره آزمون ۲.۳ استفاده کرده‌ایم.

جدول ۲: چندک های بوت استرپ توزیع آماره آزمون

| چندک‌ها | ۰/۰۰۵ | ۰/۰۲۵ | ۰/۰۵ | ۰/۱ | ۰/۹ | ۰/۹۵ | ۰/۹۷۵ | ۰/۹۹۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| بوت‌استرپ | ۰/۰۰۰۴ | ۰/۰۰۲ | ۰/۰۰۴۸ | ۰/۰۱۶۹ | ۳/۰۹۳۴ | ۴/۵۸۸۱ | ۰۶/۳۰۸۱ | ۱۰/۸۰۰۷ |

**مثال ۳.۳.** فرض کنید دو نمونه تصادفی فازی به حجم ۱۶ $= n$ و ۱۳ $= m$ از دو جامعه متفاوت گرفته ایم، که در جدول ۳ آمده است. بر طبق مقاله (۱۲) فرضیه برابری واریانس ها پذیرفته می شود، لذا برای آزمون فرضیه برابری میانگین ها مطابق آنچه گذشت

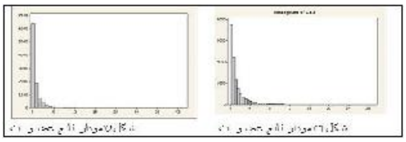
جدول ۳: داده‌های مربوط به مثال ۳.۳

| $n$ | $\tilde{X} = (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)_T$ | $n$ | $\tilde{X} = (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)_T$ | $m$ | $\tilde{Y} = (l_2, \mu_2, r_2)_T$ | $m$ | $\tilde{Y} = (l_2, \mu_2, r_2)_T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | (۴۴, ۵, ۵, ۶, ۵)$_T$ | ۹ | (۱۹, ۵, ۴, ۴, ۳)$_T$ | ۱ | (۱۵, ۱, ۱, ۲, ۱)$_T$ | ۹ | (۲۳, ۰, ۰, ۱, ۰)$_T$ |
| ۲ | (۱۵, ۴, ۴, ۴, ۳)$_T$ | ۱۰ | (۲۵, ۵, ۳, ۵, ۳)$_T$ | ۲ | (۶۶, ۱, ۲, ۲, ۲)$_T$ | ۱۰ | (۴۰, ۱, ۲, ۲, ۲)$_T$ |
| ۳ | (۱۹, ۵, ۴, ۵, ۵)$_T$ | ۱۱ | (۳۰, ۵, ۵, ۵, ۵)$_T$ | ۳ | (۹۲, ۲, ۲, ۳, ۳)$_T$ | ۱۱ | (۶۹, ۱, ۱, ۱, ۱)$_T$ |
| ۴ | (۴۷, ۴, ۴, ۴, ۴)$_T$ | ۱۲ | (۶۵, ۴, ۴, ۵, ۵)$_T$ | ۴ | (۶۸, ۱, ۲, ۳, ۲)$_T$ | ۱۲ | (۸۰, ۰, ۰, ۰, ۰)$_T$ |
| ۵ | (۴۵, ۶, ۵, ۶, ۴)$_T$ | ۱۳ | (۵۵, ۵, ۵, ۵, ۵)$_T$ | ۵ | (۴۳, ۱, ۰, ۲, ۰)$_T$ | ۱۳ | (۹۲, ۲, ۱, ۲, ۱)$_T$ |
| ۶ | (۵۸, ۵, ۳, ۵, ۳)$_T$ | ۱۴ | (۲۲, ۶, ۳, ۵, ۴)$_T$ | ۶ | (۵۷, ۲, ۳, ۲, ۳)$_T$ | | |
| ۷ | (۴۹, ۵, ۴, ۴, ۴)$_T$ | ۱۵ | (۶۴, ۴, ۴, ۵, ۵)$_T$ | ۷ | (۹۹, ۳, ۲, ۳, ۲)$_T$ | | |
| ۸ | (۹۰, ۶, ۵, ۶, ۶)$_T$ | ۱۶ | (۵۰, ۵, ۳, ۵, ۳)$_T$ | ۸ | (۸۲, ۰, ۱, ۲, ۲)$_T$ | | |

۰ $\neq$ ۱۲/۵ $= d^{2IF}_{Ap}(\bar{\tilde{z}}_c, \bar{\tilde{y}}_c)$ در نتیجه از آماره آزمون ۴.۳ استفاده می کنیم. مقدار این آماره آزمون برای این مثال ۵/۷۹ $= t^2(\tilde{z}, \tilde{y})$ می‌باشد،که در سطح ۰/۰۵ $= \gamma$ با توجه به جدول ۴ فرضیه صفر را رد می‌کنیم.

جدول ۴: چندک های بوت استرپ توزیع آماره آزمون

| ۰/۹۹۵ | ۰/۹۷۵ | ۰/۹۵ | ۰/۹ | ۰/۱ | ۰/۰۵ | ۰/۰۲۵ | ۰/۰۰۵ | چندک‌ها |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۱/۰۴۸ | ۵/۷۱۶۱ | ۴/۰۰۲۷ | ۲/۵۵۷ | ۰/۰۰۰۸ | ۰/۰۰۰۱ | ۰/۰۰۰۰۱ | ۰/۰ | بوت‌استرپ |



شکل ۱: تابع عضویت فرضیه

## ۴ اختلاف بین میانگین های جامعه بر اساس $\alpha$-شک

در مطالب گفته شده قبلی هدف از آزمون فرضیه های مربوط به میانگین های دو جامعه تساوی بین آنها بود اما در این بخش به دنبال آزمون اختلاف بین میانگین های دو جامعه می‌باشیم. یعنی فرضیه زیر را مورد آزمون قرار می دهیم:

$$\begin{cases} H_0^{IF}: \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_0, \\ \qquad\qquad\qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1^{IF}: \tilde{\theta}_1 \neq \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_0. \end{cases}$$

مطابق آنچه گذشت داده های خود را به صورت زیر تغییر داده:

$$\tilde{Z}_{ci\alpha} = \tilde{Z}_{i\alpha} - \bar{\tilde{Z}}_{\alpha} + \tilde{\theta}_0 \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{1.4}$$

$$\tilde{Y}_{ci\alpha} = \tilde{Y}_{i\alpha} - \bar{\tilde{Y}}_{\alpha} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

**لم ۱.۴.** که با توجه به ۱.۴ داریم:

$$\bar{\tilde{z}}_c = (\theta_0, \bar{l}_z + \bar{r}_z + \theta_0, \bar{l}_z + \bar{r}_z + \theta_0, \bar{l'}_z + \bar{r'}_z + \theta_0, \bar{l'}_z + \bar{r'}_z + \theta_0)$$

$$\bar{\tilde{y}}_c = (0, \bar{l}_y + \bar{r}_y, \bar{l}_y + \bar{r}_y, \bar{l'}_y + \bar{r'}_y, \bar{l'}_y + \bar{r'}_y)$$

و

$$d_{Ap}^{2IF}(\bar{\tilde{z}}_c, \bar{\tilde{y}}_c) - d_{Ap}^{2IF}(\tilde{\theta}_0, 0) = 0 \tag{2.4}$$

با استفاده از مشاهدات تغییر داده شده فوق و پذیرفته شدن فرضیه برابری واریانس ها، و عبارت ۲.۴ ، $B$ نمونه بوت‌استرپی را اختیار کرده و مقدار آماره آزمون زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$t^2(\tilde{Z}_c^{*b}, \tilde{Y}_c^{*b}) = \frac{d_{Ap}^{2IF}(\bar{\tilde{z}}_c^{*b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*b})}{S_{cp}^{*b}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}; \qquad S_{cp}^{*b} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_{Ap}^{2IF}(\tilde{z}_{ci}^{*b}, \bar{\tilde{z}}_c^{*b}) + \sum_{i=1}^{n} d_{Ap}^{2IF}(\tilde{y}_{ci}^{*b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*b})}{n+m-2}} \qquad b = 1, 2, ..., B \tag{3.4}$$

در صورت عدم برابری واریانس ها آماره آزمون به صورت زیر تغییر داده شده و محاسبات را انجام می دهیم.

$$t^2(\tilde{Z}_c^{*b}, \tilde{Y}_c^{*b}) = \frac{d_{Ap}^{2IF}(\bar{\tilde{z}}_c^{*b}, \bar{\tilde{y}}_c^{*b})}{\frac{s_{1c}^{2*b}}{n} + \frac{s_{2c}^{2*b}}{m}} \qquad b = 1, 2, ..., B$$

جدول ۵: داده‌های مربوط به مثال ۲.۴

| $n$ | $\tilde{X} = (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)$ | $n$ | $\tilde{X} = (\mu_1, l_1, r_1, l'_1, r'_1)$ | $m$ | $\tilde{Y} = (\mu_2, l_2, r_2, l'_2, r'_2)$ | $m$ | $\tilde{Y} = (\mu_2, l_2, r_2, l'_2, r'_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | $(44, 2, 3, 4, 4)_T$ | ۹ | $(19, 2, 2, 2, 2)_T$ | ۱ | $(15, 2, 2, 3, 3)_T$ | ۹ | $(23, 1, 1, 2, 2)_T$ |
| ۲ | $(15, 1, 2, 2, 2)_T$ | ۱۰ | $(25, 2, 1, 3, 2)_T$ | ۲ | $(66, 2, 3, 3, 4)_T$ | ۱۰ | $(40, 2, 3, 3, 4)_T$ |
| ۳ | $(19, 2, 2, 3, 4)_T$ | ۱۱ | $(30, 2, 3, 3, 4)_T$ | ۳ | $(92, 3, 3, 4, 5)_T$ | ۱۱ | $(69, 2, 2, 2, 3)_T$ |
| ۴ | $(47, 1, 2, 2, 3)_T$ | ۱۲ | $(65, 1, 2, 3, 4)_T$ | ۴ | $(68, 2, 3, 4, 4)_T$ | ۱۲ | $(80, 1, 1, 1, 2)_T$ |
| ۵ | $(45, 3, 3, 4, 3)_T$ | ۱۳ | $(55, 2, 3, 3, 4)_T$ | ۵ | $(43, 2, 1, 3, 2)_T$ | ۱۳ | $(92, 3, 2, 3, 3)_T$ |
| ۶ | $(58, 2, 1, 3, 2)_T$ | ۱۴ | $(22, 3, 1, 3, 3)_T$ | ۶ | $(57, 3, 4, 3, 5)_T$ | | |
| ۷ | $(49, 2, 2, 2, 3)_T$ | ۱۵ | $(64, 1, 2, 3, 4)_T$ | ۷ | $(99, 4, 3, 4, 4)_T$ | | |
| ۸ | $(90, 3, 3, 4, 5)_T$ | ۱۶ | $(50, 2, 1, 2, 2)_T$ | ۸ | $(82, 1, 2, 3, 4)_T$ | | |

**مثال ۲.۴.** فرض کنید دو نمونه تصادفی فازی به حجم $n = 16$ و $m = 13$ از دو جامعه متفاوت گرفته ایم، که در جدول زیر آمده حال به دنبال آزمون فرضیه $H_0 : \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 \oplus (19, 2, 3, 2, 4)$ در مقابل $H_1 : \tilde{\theta}_1 \neq \tilde{\theta}_2 \oplus \tilde{\theta}_0$ هستیم.در مقاله (۱۲) برابری واریانس ها نشان داده شده است، آماره آزمون برابر با $t^2(\tilde{z}, \tilde{y}) = 4/45903$ بدست می‌آید، لذا فرض صفر را می پذیریم. چندک‌های مربوط به آماره مورد نظر در جدول زیر موجود است. دقت شود که در این مثال $d_{zp}^{2IF}(\tilde{z}, \tilde{y}) = 0$ لذا از آماره آزمون ۳.۴ استفاده کردیم.

جدول ۶: چندک های بوت استرپ توزیع آماره آزمون

| چندک‌ها | ۰/۰۰۵ | ۰/۰۲۵ | ۰/۰۵ | ۰/۱ | ۰/۹ | ۰/۹۵ | ۰/۹۷۵ | ۰/۹۹۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| بوت‌استرپ | ۰/۰ | ۰/۰۰۱ | ۰/۰۰۴۵ | ۰/۰۱۶ | ۳/۰۵۶۸ | ۴/۳۰۳۹ | ۵/۳۶۴۱ | ۷/۷۵۷۳ |

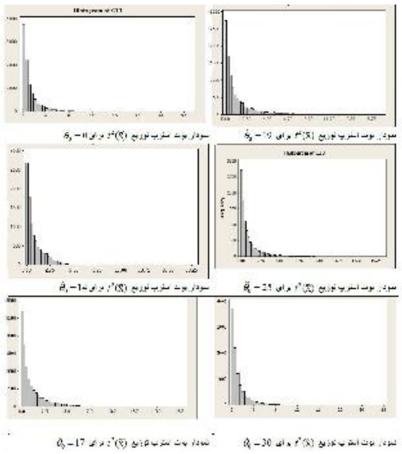
چندک‌های بوت‌استرپی، آماره آزمون و نتیجه آزمون را برای بعضی مقادیر دیگر $H_0$ در جدول ۷ و نمودار آماره آزمون این $\tilde{\theta}_0$ را در شکل ۲ می‌توانید مشاهده کنید.

جدول ۷: آماره آزمون و چندک های بوت استرپی

| $\tilde{\theta}_0$ | $t^2(\tilde{x})$ | $q^{\frac{\gamma}{2}}$ | $q^{1-\frac{\gamma}{2}}$ | نتیجه | $\tilde{\theta}_0$ | $t^2(\tilde{x})$ | $q^{\frac{\gamma}{2}}$ | $q^{1-\frac{\gamma}{2}}$ | نتیجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (۱۹،۲،۳،۲،۴) | ۰/۰۱۲ | ۰/۰۰۴۵ | ۴/۳۰۳۹ | قبول | (۰،۲،۳،۲،۴) | ۵/۱۲۵۵۸ | ۰/۰۰۴۸ | ۴/۵۸۸۱ | رد |
| (۲۵،۲،۳،۲،۴) | ۰/۳۲ | ۰/۰۰۴۱ | ۴/۵۵۷۵ | قبول | (۵،۲،۳،۲،۴) | ۳/۰۱ | ۰/۰۰۳۹ | ۴/۳۱۱۶ | رد |
| (۳۰،۲،۳،۲،۴) | ۰/۲۸ | /۰۰۴ | ۴/۵۰۴۹ | قبول | (۱۴،۲،۳،۲،۴) | ۰/۴۶ | ۰/۰۰۳۹ | ۴/۱۵۲۹ | قبول |
| (۴۰،۲،۳،۲،۴) | ۵/۱۳۵۲۲ | ۰/۰۰۴۵ | ۴/۳۰۳۹ | رد | (۱۷،۲،۳،۲،۴) | ۰/۱۱۴ | ۰/۰۰۳۹ | ۴/۱۲۲۸ | قبول |

## بحث و نتیجه‌گیری

در بخش ۳ ما سعی کردیم علاوه بر استفاده از داده های شهودی و استفاده از متر $d_{Ap}^{IF}$ بین آن ها به یک روش ساده تر و تا حدودی دقیق تر برای آزمون فرضیه دو جامعه بپردازیم. دقت می کنیم که در روش ارائه شده، بر اساس متر فوق چندک های بوت استرپی بدست آمده بسیار نزدیک به حالت غیر فازی آن می باشند. همچنین می توانیم مطالب گفته شده را برای مقایسه میانگین دو یا چند جامعه (تجزیه آزمایش ها) به کار ببریم.



شکل ۲:  نمودار کمیت محوری مربوط به ازمون فرضیه میانگین دو طرفه

## مراجع


[۱] طاهری، س. م. (۱۳۷۵). آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی، دانشگاه فردوسی مشهد.

[2] Akbari, M. GH. and Rezaei, A. (2010). Bootstrap testing fuzzy hypotheses and observation on fuzzy statistic. Expert System With Application, 37:5782-5787.

[3] Buckley, J. J. (2005). Fuzzy statistics: Hypothesis testing. Soft Computing, 9:512-518.

[4] Dubois, D. and Prade, H. (1980). Fuzzy Sets and Systems, Theory and Application, Academic Press, New York.

[5] Efron, B and Tibshirani, R. J. (1993) An Introduction to the Bootstrap. Chapman-Hall, New York.

[6] Liu, B. (2013) Uncertainty theory, 4th edn. Springer, Berlin.

[7] Taheri, S. M. and Behboodian, J. (1999). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypothesis testing. Metrika, 49:3-17.

[8] Torabi, H. and Behboodian, J. (2007). Likelihood ratio tests for fuzzy hypotheses testing. Statistical Papers, 48:509-522.

[9] Taheri, S. M. and Zarei, R. (2011). Extension principle of vague sets and its applications, Advances in Fuzzy Mathematics, 6:17-28.

[10] Torabi, H., Behboodian, J. and Taheri, S. M. (2006). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data. Metrika, 64:289-304

[11] Yao J. S. and Wu K. (2000) Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance. Fuzzy Sets and Systems, 11:257-288.

[12] Zainali, Z. and Akbari M. Gh.and Alizadeh Noughabi H. (2014) Intuitionistic fuzzy random variable and testing hypothesis about its variance. On line.