The 45th Annual Iranian Mathematics Conference
August 26-29 2014
چهل و پنجمین
کنفرانس ریاضی ایران
۴ - ۷ شهریور ۱۳۹۳

معادلات دیفرانسیل خطی با مقادیر مرزی فازی

مصطفی شمس الدینی فرد، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه دامغان، m.shamsodini@std.du.ac.ir

رضا بابائی، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه دامغان، babaeireza055@gmail.com

چکیده: در این مقاله معادلات دیفرانسیل خطی با مقادیر مرزی را در نظر خواهیم گرفت. ما راه‌حل مسأله‌ای در عباراتی از یک مجموعه‌ی فازی از تابع‌های حقیقی موج‌دار را بیان می‌کنیم. هر تابع حقیقی در راه‌حل مجموعه‌ی معادله‌ی دیفرانسل خطی صدق می‌کند و مقادیر مرزی آن به فاصله‌ها وابسته است و با اعداد فازی متناظر تعیین می شود. کمترین احتمال در میان مقادیر مرزی ممکن در مجموعه‌های فازی متناظر به‌صورت احتمالی از تابع حقیقی در راه‌حل فازی تعریف شده است. بر این اساس، برای پیدا کردن راه‌حل فازی ما یک روش مبتنی بر تبدیلات خطی پیشنهاد می‌کنیم. ما نشان می‌دهیم که اگر متناظراً مسأله موج دار یک راه‌حل منحصربه‌فرد داشته باشد، آن‌گاه مسأله‌ی فازی نیز راه‌حل منحصربه‌فردی دارد. ما همچنین ثابت می‌کنیم که اگر مقادیر مرزی، اعداد فازی مثلثی باشند، آن‌گاه مقداری از راه‌حل در هر زمان، خود نیز یک عدد فازی مثلثی خواهد بود. ما پی خواهیم برد که، راه‌حل فازی به روش ما، با همان درستی که از راه‌حل مسأله‌ی موج‌دار با کاربرد اصل اضافی بدست آمده است، تعیین می‌شود. ما با شرح یک مثال روش پیشنهادی را ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مسأله مقدار مرزی، مجموعه‌ی فازی، تبدیل خطی

مقدمه

روش ما برای مسائل مقدار مرزی فازی می‌تواند هر دو نوع باشد. در روش اول فرض کنید که، حتی اگر تنها مقادیر مرزی در بررسی مسأله فازی باشند، راه‌حل تابع فازی خواهد بود. در نتیجه مشتق در معادله دیفرانسیل می تواند به‌صورت یک مشتق از تابع فازی در نظر گرفته شود. این مشتق می‌تواند، مشتتق هوکوهارا [۱] یا مشتقی در مفاهیم تعمیم یافته باشد. بِد [۲] [۱] نشان داد که اگر مشتق هوکوهارا مورد استفاده باشد، آنگاه رده‌ی بزرگی از مسائل مقدار مرزی فازی راه‌حل ندارند.

برای غلبه بر این مشکل در [۲] و [۳] مفهوم مشتق تعمیم یافته گسترش داده شده است، و به‌کار بردن این مفهوم در معادلات دیفرانسیل فازی بررسی شده است. اخیراً خاستن [۳] و نایتو [۴] راه‌حل هایی برای رده‌ای به اندازه‌ی کافی بزرگ از مسائل مقدار مرزی با استفاده از مشتق

[۱] Hukuhara
[۲] Bede
[۳] Khastan
[۴] Nieto

تعمیم یافته پیدا کرده‌اند. اگر چه این در مثال‌های ذکر شده مشاهده شده است، اما این راه‌حل‌ها برای تفسیر کردن مشکل هستند. زیرا چهار مسأله متفاوت بدست آمده اغلب با به‌کار بردن مشتقات مرتبه دوم تعمیم یافته نمی‌توانند ماهیت مسأله را منعکس کنند. روش دوم مبتنی بر تولید راه‌حل فازی از راه‌حل موج دار است. در حالت خاص برای مسأله‌ی مقدار اولیه فازی این روش می‌تواند از سه راه باشد.

راه اول استفاده از اصل اضافی است. در این روش مقدار اولیه به‌صورت یک ثابت حقیقی گرفته می‌شود، و نتیجه‌ی مسأله موج‌دار حل شده است. بنابراین ثابت حقیقی در راه‌حل با مقدار اولیه جایگزین شده است. در راه‌حل نهایی، عمل‌های حساب‌گر، عمل‌های روی اعداد فازی در نظر گرفته شده‌اند. راه دوم ارائه شده توسط هولیمریر [۵] می‌باشد که از مفهوم شمول دیفرانسیل استفاده می‌کند. در این روش با گرفتن یک برش α از مقدار اولیه، معادله دیفرانسیل داده شده به یک شمول دیفرانسیل برگردانده شده است. و راه‌حل به‌دست آمده به‌صورت برش α از راه‌حل فازی پذیرفته شده است. میسکوشی [۶] و همکارانش [۴] ثابت کردند که، تحت شرایط مطمئنی، دو راه اصلی از روش مسأله مقدار اولیه معادلند. راه سوم توسط گاسیلاو [۷] و همکارانش [۵] ارائه شده است. در این روش مسأله فازی به‌صورت یک مجموعه از مسائل موج‌دار در نظر گرفته شده است. در این مقاله ما یک معادله دیفرانسیل را با مقادیر مرزی فازی بررسی کردیم. ما مسأله را به‌صورت یک مجموعه از مسائل موج‌دار تفسیر کردیم. برای معادلات خطی ما روشی مبتنی بر ویژگی‌های تبدیلات خطی را پیشنهاد می‌کنیم. ما نشان می‌دهیم که اگر راه‌حل متناظر مسأله موج‌دار وجود داشته باشد و منحصر به‌فرد باشد، مسأله‌ی فازی نیز راه‌حلی منحصر به‌فرد دارد. به‌علاوه ما ثابت خواهیم کرد که اگر مقادیر مرزی اعداد فازی مثلثی باشند، آن‌گاه مقدار راه‌حل یک عدد فازی مثلثی در هر زمان خواهد بود. ما روش پیشنهاد شده را روی مثال توضیح خواهیم داد.

مسأله مقدار مرزی فازی

در زیر ما نماد $\tilde{u} = (u_L(r),\ u_R(r))$ را که در آن $۰ \le r \le ۱$، برای نشان دادن یک عدد فازی در شکل پارامتری استفاده می‌کنیم. ما به‌ترتیب $\underline{u} = u_L(۰)$ و $\overline{u} = u_R(۰)$ را برای نشان دادن حدود چپ و راست $\tilde{u}$ مشخص می‌کنیم. ما یک عدد فازی مثلثی را به‌صورت $\tilde{u} = (l,\ m,\ r)$ در جایی که ما داریم $\underline{u} = l$ و $\overline{u} = r$، نشان می‌دهیم. در این مقاله ما یک مسأله مقدار مرزی فازی $(FBVP)$ [۸] را با معادله دیفرانسیل خطی موج‌دار اما با مقادیر مرزی فازی در نظر گرفته‌ایم. برای روشن شدن ما معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x'' + a_۱(t)x' + a_۲(t)x = f(t) \\ x(۰) = \tilde{A} \\ x(T) = \tilde{B} \end{cases} \qquad (۱)$$

ما توجه می‌کنیم که ضرایب معادله دیفرانسیل لزوماً ثابت نیستند. فرض کنید که مقادیر مرزی را به‌صورت $\tilde{A} = a_{cr} + \tilde{a}$ و $\tilde{B} = b_{cr} + \tilde{b}$ نشان می‌دهیم، در این‌جا a_{cr} و b_{cr} برادرهایی با احتمال یک هستند، قسمت‌های موج‌دار $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ نشان داده شده‌اند.؛ $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ قسمت‌های نامعلومی با رئوس در مبدأ، مشخص شده‌اند. ما مسأله‌ی(۱) را به دو مسأله‌ی زیر می‌شکافیم:

۱) مسأله موج‌دار وابسته (که ناهمگن است):

[۵] Hullemerier
[۶] Misukoshi
[۷] Gasilov
[۸] fuzzy boundary value problem

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t) \\ x(0) = a_{cr} \\ x(T) = b_{cr} \end{cases} \qquad (2)$$

۲) مسأله همگن با مقادیر مرزی فازی:

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \\ x(0) = \tilde{a} \\ x(T) = \tilde{b} \end{cases} \qquad (3)$$

مشاهده‌ی این آسان است که یک راه‌حل مسأله داده شده (۱) به شکل $x(t) = x_{cr}(t) + x_{un}(t)$ (راه‌حل موج‌دار+تردید) است. در این‌جا $x_{cr}(t)$ یک راه‌حل مسأله‌ی موج‌دار ناهمگن (۲) است. در حالی که $x_{un}(t)$ یک راه‌حل مسأله‌ی همگن (۳) با شرایط مرزی فازی است. $x_{cr}(t)$ می‌تواند با مفاهیمی از روش‌های عددی یا تحلیلی محاسبه شود. از این‌رو (۱) به حل یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی فازی (۳) کاهش یافته است. بنابراین ما می‌خواهیم چگونگی حل این مسأله را بررسی کنیم. ما فرض می‌کنیم که راه‌حل x_{un} از (۳) یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{X}$ از توابع حقیقی مثل $x(t)$ باشد. هر تابع $x(t)$ بایددر معادله‌ی دیفرانسیل صدق کند، و باید مقادیر مرزی a و b را به‌ترتیب از مجموعه‌های $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ داشته باشد. ما احتمال تابع $x(t)$ را معادل با کمترین احتمال مقادیر مرزی آن تعریف می‌کنیم. از نظر ریاضی، مجموعه راه‌حل‌های فازی می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{X} = \{x(t) \mid x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0;\ x(0) = a;\ x(T) = b;\ a \in \tilde{a};\ b \in \tilde{b}\}$$

با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{X}}(x(t)) = min\{\mu_{\tilde{a}}(a);\ \mu_{\tilde{b}}(b)\}$$

راه‌حل تعریف شده در بالا می‌تواند به‌صورت یک دسته‌ی فازی از توابع تفسیر شده باشد. همچنین می‌توان این‌گونه تفسیر کرد که، ما یک $FBVP$ را به‌صورت یک مجموعه از مجموعه از BVP موج دار در نظر می‌گیریم. که مقادیر مرزی آن به مجموعه‌های فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ وابسته باشد.

آ. یک نمایش برداری راه‌حل حالت موج‌دار

در این‌جا ما BVPهای موج‌دار را برای معادله‌ی دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم در نظر گرفته‌ایم

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \\ x(0) = a \\ x(T) = b \end{cases} \qquad (6)$$

فرض کنید $x_1(t)$ و $x_2(t)$ راه‌حل‌هایی مستقل خطی از معادله‌ی دیفرانسیل باشند. در این صورت راه‌حل کلی به‌صورت $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ است. برای c_1 و c_2 ما دستگاه خطی زیر را داریم.

$$\begin{cases} c_1x_1(0) + c_2x_2(0) = a \\ \\ c_1x_1(T) + c_2x_2(T) = b \end{cases} \qquad (7)$$

در زیر ما یک ماتریس نمایش برای راه‌حل BVP بدست آورده‌ایم. ما دستگاه خطی (۷) را به شکل ماتریس بازنویسی می‌کنیم. $Mc = u$ که در این‌جا $M = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(T) & x_2(T) \end{bmatrix}$، $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$، $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$، راه‌حل دستگاه خطی

$$c = M^{-1}u \qquad (8)$$

می‌باشد.ما یک تابع را از راه‌حل‌های مستقل خطی تشکیل می‌دهیم $s(t) = [x_1(t) \ \ x_2(t)]$. بنابراین راه‌حل کلی می‌تواند به‌شکل ماتریس به‌صورت زیر بازنویسی شود.

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = s(t)c$$

با استفاده از(۸) داریم $x(t) = s(t)M^{-1}u$ یا

$$x(t) = W(t)\ u = w_1(t)a + w_2(t)b \qquad (9)$$

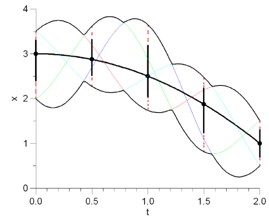
که در این‌جا

$$W(t) = s(t)M^{-1} \qquad (10)$$

مثال۱: $FBVP$ زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'' + 16x = 47 - 8t^2 \\ x(0) = (2,\ 3,\ 3/5) \\ x(2) = (0/5,\ 1,\ 1/5) \end{cases} \qquad (11)$$

حل: مسأله ناهمگن موجدار وابسته‌ی $\begin{cases} x'' + 16x = 47 - 8t^2 \\ x(0) = 3 \\ x(2) = 1 \end{cases}$ راه‌حل $x_{cr}(t) = 3 - 0/5t^2$ (خط مشکی پر رنگ در شکل۱) را دارد.



شکل۱. خطوط تیره و تیره‌ی پر رنگ‌تر بترتیب مقادیر فازی و $\alpha = 0/6$-برش آن‌ها در زمان‌های متفاوت

برای پیدا کردن قسمت نامعلوم راه‌حل فازی $\tilde{x}_{un}(t)$، ما مسأله همگن فازی $\begin{cases} x'' + 16x = 0 \\ x(0) = (-1,\ 0,\ 0/5) \\ x(2) = (-0/5,\ 0,\ 0/5) \end{cases}$ را حل خواهیم کرد. $x_1(t) = \cos 4t$ و $x_2(t) = \sin 4t$ راه‌حل‌های مستقل خطی برای معادله دیفرانسیل هستند. بنابراین $s(t) = [\cos 4t \quad \sin 4t]$، $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 8 & \sin 8 \end{bmatrix}$ و $W = s(t)M^{-1} = \frac{1}{\sin 8}[\sin(8 - 4t) \quad \sin 4t]$. با استفاده از فرمول $\tilde{X}(t) = w_1(t)\tilde{a} + w_2(t)\tilde{b}$ ما راه‌حل مسأله همگن و نیز راه‌حل موجدار را بدست می‌آوریم و به حل $FBVP$ داده شده می‌رسیم:

$$\tilde{x} = 3 - 0/5t^2 + \frac{1}{\sin 8}(\sin(8 - 4t)(-1,\ 0,\ 0/5) + \sin 4t(-0/5,\ 0,\ 0/5))$$

راه‌حل فازی یک نوار را در صفحه‌ی tx تولید می‌کند (شکل۱).

نتایج

در این مقاله ما مسأله‌ی مقدار مرزی فازی را به‌صورت مجموعه‌ای از مسائل موجدار بررسی کردیم. ما روش راه‌حلی بر اساس ویژگی‌های تبدیلات خطی را پیشنهاد دادیم. برای روشن شدن موضوع ما روش پیشنهاد شده را برای معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دو شرح دادیم. ما نشان دادیم که راه‌حل فازی به روش ما با راه‌حل توسط اصل اضافی همزمان خواهد بود.

مراجع

[1] B. Bede, A. note on, *two-point boundary value problems associated with non-linear fuzzy differential equations*,Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 986-989.

[2] B. Bede, S.G. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation*. Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 581-599.

[3] Y. Chalco-Cano, H. Rom´an-Flores, *On the new solution of fuzzy differential equations*, Chaos, Solitons, Fractals, 38 (2006) 112-119.

[4] M. Misukoshi, L.C. Barros, Y. Chalco-Cano, H. Rom´an-Flores, R.C. Bassanezi, *Fuzzy differential equations and the extension principle*, Inform. Sci., 177 (2007) 3627-3635.

[5] N.A. Gasilov, S.E. Amrahov, A.G. Fatullayev, *A geometric approach to solve fuzzy linear systems of differential equations*, Appl. Math. Inf. Sci., 5 (2011) 484-495.