متریک ریسنر–نوردستروم در پس زمینه کیهانشناسی دوسیته

میرزا ، بهروز؛ زمانی نسب، محمد

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان ، اصفهان

چکیده

به منظور بررسی اثر انبساط بزرگ مقیاس عالم بر روی سیستمهای کوچک، با فرض یک متریک فریدمان–روبرتسون–واکر کلی با ثابت کیهانشناسی غیر صفر و در حالت $p = \rho = \kappa = 0$ جوابی برای سیاهچالهء ریسنر–نوردستروم بدست می آوریم. این متریک به ازای هر مقدار r غیر از r=0 که در آن تکینگی اساسی دارد، خوشرفتار است. با بدست آوردن معادلهء حرکت یک ذرهء خنثی در این متریک می توانیم میزان اثر انبساط عالم بر رفتار فضاپیمای پایونیر را تخمین بزنیم.

Reissner-Nordstrom Solution in de Sitter Background

Mirza, Behrouz; Zamani-Nasab, Mohammad

Physics Department, Isfahan University of Technology , Isfahan

Abstract

In order to study the effect of large scale cosmological expansion on small systems, we assume a FRW-type coordinate system in presence of a non-zero Λ and derive a Reissner-Nordstrom type metric. It is an analytic function of r for all values except at r=0 which is singular. By determining the equation of motion in this metric, we can estimate how the expansion of the universe may effect on the Pioneer's motion

PACS No. *(04 , 98)*

مقدمه

از هنگامی که هابل داده های رصدی را به عنوان وجود انبساط عالم تعبیر کرد این سوال بوجود آمد که آیا اثر این انبساط در ابعاد کوچک (نسبت به اندازه های کیهان) قابل روءیت است؟ به نظر می رسد که در چند سال گذشته دو موضوع (بیش از همه) باعث شده که بار دیگر توجه برخی کیهانشناسان به این مساله جلب شود:

۱. داده های حاصل از ردیابی فضاپیماهای پایونیر ۱۰و۱۱ که از منظومهء شمسی خارج شده اند بیانگر وجود یک شتاب متمایل به سمت خورشید در مسیر حرکت آنهاست که بر اساس نسبیت عام استاندارد قابل توجیه نیست [۱]. برخی سعی کرده اند این شتاب را به اثرات حاصل از انبساط عالم نسبت دهند[۲].

۲. آخرین داده های کیهانشناسی حاصل از رصد ابرنواخترهای با z بزرگ چنین نتیجه می دهند که عالم بر خلاف آنچه قبلاً تصور می شد به صورت شتابدار در حال انبساط است، که می تواند به عنوان وجود یک ثابت کیهانشناسی غیر صفر تعبیر شود؛ وجود این ثابت متریک های استاتیک را با برخی داده های رصدی در تعارض قرار می دهد.

اخیراً ژائو و زهانگ به شیوه ای ساده، بدون حل کامل معادلات میدان اینشتین و با استفاده از روش قیاسی توانستند حل دقیق ریسنر–نوردستروم را در پس زمینهء فریدمان–روبرتسون–واکر بدست آورند[۳]. ما در این مقاله با حل کامل معادلات اینشتین و با استفاده از روش ذکر شده در [٤]، این متریک را بدست می آوریم.

متریک

ds^2 را به شکل کلی زیر که دارای تقارن کروی و نیز وابستگی

به زمان است فرض می کنیم:

$$ds^2 = -B(r,t)dt^2 + a(t)^2[A(r,t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + Sin^2(\theta)d\varphi^2)] \qquad (1)$$

با استفاده از مولفه های این متریک می توانیم تانسور اینشتین را محاسبه کنیم. برای حل معادلات اینشتین به مولفه های تانسور انرژی-تکانه نیز احتیاج داریم. با فرض

$$\Phi = -\frac{Q}{\rho} = A_0 \qquad (2)$$

که در آن Φ پتانسیل الکتریکی، Q بار الکتریکی و $\rho = a(t)r$ مختصهء شعاعی فیزیکی است عناصر غیر صفر این تانسور به آسانی قابل محاسبه است. حال اگر خود را به A و B هایی محدود کنیم که تابعیت آنها از r و t به شکل $B = B(\rho)$ و $A = A(\rho)$ باشد، با استفاده از

$$\nabla_b F^{ab} = 4\pi j^a = 0 \qquad (3)$$

می توان نتیجه گرفت $B = A^{-1}$. اکنون می توانیم معادلات اینشتین را حل کنیم. در حضور ثابت کیهانشناسی و در دستگاه یکای انتخابی خود(c=G=1) داریم $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$.
اگر عالم دوسیته را به عنوان یک حالت حدی از جهان واقعی در نظر بگیریم یعنی $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = (\frac{\ddot{a}}{a}) = \frac{\Lambda}{3}$ و با انتخاب مولفه های rr، رابطه زیر حاصل می شود

$$-\frac{\Lambda}{3}\rho^3 A + \frac{\rho}{A} = \rho - \frac{\Lambda}{3}\rho^3 + \frac{Q^2}{\rho} + C \qquad (4)$$

با حل این معادله و استفاده از شرایط مرزی مقدار ثابت C برابر -2M بدست می آید. بنابراین، متریک نهایی ما به صورت زیر خواهد بود

$$ds^2 = -\frac{1}{2}[\sqrt{(1-\frac{2M}{\rho}+\frac{Q^2}{\rho^2}-\frac{\Lambda}{3}\rho^2)^2+\frac{4\Lambda}{3}\rho^2} + (1-\frac{2M}{\rho}+\frac{Q^2}{\rho^2}-\frac{\Lambda}{3}\rho^2)]dt^2 \qquad (5)$$
$$+2e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}[\sqrt{(1-\frac{2M}{\rho}+\frac{Q^2}{\rho^2}-\frac{\Lambda}{3}\rho^2)^2+\frac{4\Lambda}{3}\rho^2} + (1-\frac{2M}{\rho}+\frac{Q^2}{\rho^2}-\frac{\Lambda}{3}\rho^2)]^{-1}dr^2 + \rho^2(d\theta^2 + Sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

اگر Λ صفر باشد، رابطهء (۵) به متریک آشنای ریسنر-نوردستورم؛ و در صورتی که Q و M صفر باشند به متریک فریدمان-روبرتسون-واکر برای فضای دوسیته تبدیل می شود. تبدیلی به صورت

$$\rho = a(t)r$$
$$\bar{t} = t + \frac{\dot{a}}{a}\int^{\rho}\frac{A(\bar{\rho})\,\bar{\rho}\,d\bar{\rho}}{1-\frac{2M}{\bar{\rho}}+\frac{Q^2}{\bar{\rho}^2}-\frac{\Lambda}{3}\bar{\rho}^2} \qquad (6)$$

رابطهء (۵) را به متریک ریسنر-نوردستورم-دوسیته استاتیک تبدیل می کند. متریک بدست آمده برخلاف انتظار جز تکینگی موجود در مبدأ، $\rho = 0$، تکینگی دیگری ندارد. این یک خاصیت تعیین کننده است زیرا نشان می دهد که در صورت وجود یک Λ ی ناصفر، هر چند کوچک، و در صورتی که ابعاد کوچک جهان نیز در انبساط عالم شرکت کنند سیاهچاله ها افق رویداد نخواهند داشت. اگر تبدیل مختصات ذکر شده در (٦) را اعمال کنیم تکینگی ها دوباره ظاهر می شوند و به نظر می رسد که ما در اینجا با یک مورد از تکینگی های برهنه روبرو هستیم.

بررسی حرکت یک جسم آزمون خنثی

ابتدا معادله ی ژئودزیک را برای چهار مختصهء $x^a = (t,r,\theta,\varphi)$ بدست می آوریم. همواره می توان با انتخاب دستگاه مختصات مناسب شرایطی را فراهم کرد که حرکت جسم در صفحهء $\theta = \frac{\pi}{2}$ صورت بگیرد و نیز با فرض $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$ ($\tau =$ پارامتر آفین) می توان نشان داد که جسم همیشه در همین صفحه باقی خواهد ماند. با ساده سازی چهار رابطهء بدست آمده، استفاده از شرایط مرزی و با توجه به اینکه یک ذرهء جرم دار یک ژئودزیک زمان گونه را می پیماید[۵]، رابطهء زیر بدست می آید:

$$(\frac{d\rho}{d\tau})^2 = 1-(1-\frac{2M}{\rho}+\frac{Q^2}{\rho^2}-\frac{\Lambda}{3}\rho^2)(1+\frac{J^2}{\rho^2}) \qquad (7)$$

که J در آن ثابت تکانهء زاویه ای است. اگر مطابق شیوهء معمول در مکانیک کلاسیک، فرض کنیم $u = \frac{1}{\rho}$؛ به معادلهء نهایی حرکت می رسیم:

$$u'' + u = \frac{M}{J^2} + 3Mu^2 - \frac{Q^2 u}{J^2} - 2Q^2 u^3 - \frac{\Lambda}{3u^3 J^2} \qquad (8)$$

که جملهء $3Mu^2$ تصحیح آشنای نسبیت عام، جملات $\frac{Q^2 u}{J^2}$ و $-2Q^2 u^3$ حاصل از بار غیر صفر سیاهچاله و جملهء آخر بیان کنندهء اثر انبساط عالم بر مسیر حرکت هر جسم است. برای اینکه تخمینی از بزرگی این جمله و میزان اثر آن بر مسیر حرکت اجسام داشته باشیم کمیت ε را به شکل زیر معرفی می کنیم:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Lambda}{3u^3 J^2}}{\frac{M}{J^2}} = \frac{\Lambda}{3M}\rho^3 \qquad (9)$$

برای بررسی این اثر در منظومهء شمسی باید قرار دهیم

$$M = M_{sun} \cong 1.5 \times 10^5\, cm$$
$$\Lambda = (1.29 \pm 0.23) \times 10^{-56}\, cm^{-2}$$

در نتیجه برای عطارد:

$$\rho \cong 5 \times 10^{12}\, cm \Rightarrow \varepsilon \cong 10^{-13}$$

همچنین می توان انحراف مدار این سیاره در هر صد سال را تخمین زد:

$$a = 5.8 \times 10^{12} \qquad e = 0.2$$

$$\Delta_\varphi = \frac{\pi \Lambda J^6}{M^4} = \frac{\pi \Lambda a^3 (1-e^2)^3}{M} \cong 10^{-14} \frac{\sec ond}{centurey}$$

که هر دو مقدار بسیار کوچک و در هر گونه آزمایش قابل صرف نظر است. کمیت ε برای فضاپیمای پایونیر نیز قابل محاسبه است:

$$\rho \cong 10^{15}\, cm \Rightarrow \varepsilon \approx 10^{-6}$$

مشاهده می شود که این مقدار نمی تواند رفتار غیر عادی پایونیر را توجیه کند. اثر این جمله در دینامیک خوشه های کهکشانی قابل توجه خواهد بود.

نتیجه گیری

با حل معادلات اینشتین با ثابت کیهانشناسی غیر صفر برای یک متریک کلی فریدمان-روبرتسون-واکر، جوابی برای یک سیاهچالهء باردار بدست آوردیم. این متریک دارای یک تکینگی اساسی در $\rho = 0$ و فاقد افق است. با بررسی حرکت یک جسم خنثی در این فضا-زمان می توان مشاهده کرد که اثر انبساط عالم نمی تواند رفتار غیر عادی پایونیر را توضیح دهد.

سپاسگزاری

لازم می دانیم از دکتر شهرام خسروی برای بحث های ارزشمندشان تشکر و قدردانی نماییم. هزینهء طرح پژوهشی فوق توسط دانشگاه صنعتی اصفهان پرداخت شده است.

مرجع‌ها

[1] J. D. Anderson; P. A. Laing; E. L. Lau; A. S. Liu; M. M. Nieto and S. G. Turyshev, *Phys. Rev. D* **65**, (2002) 082004.

[2] J. L. Rosales; gr-qc/0212019.

[3] C. J. Gao and S. N. Zhang; *Phys. Lett. B.* **595,** 28 (2004).

[4] A. H. Abbasi; *JHEP* **04**, 011 (1999)

[5] H. Stephani; "*General Relativity*" 2nd Edition, Cambridge University Press, (1996)