

## استفاده از POD/SVD در استخراج ساختارهای متجانس یک میدان آشفته آماري-همگن

فریدون ثابت‌قدم

استادیار - دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

[fsabet@dpimail.net](mailto:fsabet@dpimail.net)

وحید اصفهانیان

دانشیار - دانشکده فنی

دانشگاه تهران

محمد افتخاری یزدی

دانشجوی دکتری - دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

**چکیده:** در این مقاله با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه (POD)، یک میدان ترکیبی تعینی-تصادفی مورد بررسی قرار گرفته و موده‌های متجانس و شبه متجانس آن استخراج شده و از این طریق، تقریبی رتبه کاسته از میدان اولیه بدست آمده است. ابتدا با حل عددی مستقیم (DNS) معادله (KS) از روش طیفی گالرکین، یک میدان آشوبناک مکانی-زمانی آماری-همگن در فضا و غیر متناوب در زمان بدست آمده است. سپس با استفاده از روش POD موده‌های ویژه و توابع ویژه میدان حاصل استخراج شده و در نهایت با استفاده از بسط گالرکین، مدلی رتبه کاسته از میدان ایجاد می‌شود. نتایج نشان‌دهنده بازیافت حدود ۴۰ درصد از انرژی میدان با استفاده از پنج مود اول POD است. برای انجام POD از روش تجزیه مقادیر تکین (SVD/snapshots) استفاده شده است که در مقایسه با روش‌های مرسوم محاسبه مستقیم مقادیر ویژه، دارای راندمان بسیار بالاتری بوده است.

**واژه‌های کلیدی:** تجزیه متعامد بهینه؛ ساختارهای متجانس؛ آشوب مکانی-زمانی؛ تجزیه مقادیر تکین؛ بسط گالرکین

### ۱. مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در قابلیت‌های کامپیوترها و روشهای محاسباتی، از یک طرف توانائی‌های محاسبات دینامیک سیالاتی را افزایش داده است و از سوی دیگر باعث افزایش انتظارات و نیازهای محققین و صنایع شده است. امروزه پیش‌بینی و محاسبه ساختارهای بزرگ‌مقیاس غیردائم و پرانرژی که در جریان‌های آشفته ظاهر می‌شوند و به ساختارهای متجانس<sup>۱</sup> معروف شده‌اند، از جمله چالش‌های اساسی پیش روی دینامیک سیالات عددی است. یکی از مهمترین و شاید تنها روش استاندارد تحلیل این ساختارها در حال حاضر روش تجزیه متعامد بهینه<sup>۲</sup> (POD) است.

در یک تعریف کلی، روش POD یک دستگاه مختصات  $n$  بعدی متعامد ایجاد می‌کند که نسبت به همه دستگاه‌های مختصات متعامد  $n$  بعدی دیگری که برای توصیف آنسامبلی از یک میدان مفروض می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، تقریب بهتری را ارائه می‌کند. بدین ترتیب می‌توان توصیفی رتبه‌کاسته از سیستم‌های دینامیکی با بعد بینهایت ارائه کرد که با تعداد

جملات معلوم، بهینه باشد. البته لازم به ذکر است که این بهینگی از دید بازیافت انرژی در مدل رتبه کاسته است. این روش در نوشتجات علمی مختلف بسته به نوع کاربرد و شاخه مورد نظر با نام‌های مختلفی ظاهر شده است. تاریخچه ای بر روش POD و تشریح روشهای کلاسیک انجام آن را می‌توان به طور کامل در مقاله تفصیلی Smith و همکاران پیدا کرد [۱]. این روش ابتدا و به صورت مستقل توسط Karhunen و Loeve و سپس Kosambi به عنوان روشی جهت تحلیل داده‌های آماری که دارای نوعی الگو<sup>۱</sup> بودند مطرح شد. برای اولین بار در زمینه جریان آشفته، Lumley در سال ۱۹۶۷ پیشنهاد کرد که از POD می‌توان برای استخراج ساختارهای بزرگ‌مقیاس ظاهر شده در این جریان‌ها استفاده نمود [۲]. پس از آن با توجه به محدودیتهای کامپیوترها و روشهای محاسباتی، این روش برای مدتها بدون کاربرد باقی ماند. لیکن در اواخر دهه هشتاد میلادی قرن گذشته، به تدریج کاربردهای POD افزونی یافت. خصوصا با مطرح شدن روش snapshots توسط Sirovich [۳]، این روش به عنوان ابزاری کارآمد برای ایجاد مدل‌های رتبه‌کاسته برای سیستم‌های دینامیکی پیچیده‌ای که داده‌هایی از تجربه و یا حل‌های عددی مستقیم دارند نمایان شد. تاکنون بسیاری از مسائل مکانیک سیالات، از قبیل جریان کوئت [۴] و جریان در یک حفره<sup>۲</sup> [۵] و بسیاری حالات دیگر با استفاده از روش POD مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. با توجه به توانایی POD در استخراج مودهای پر انرژی، استفاده از آن در پدیده‌های شامل اثرات متقابل سازه و سیال و همچنین مسائل کنترل جریان<sup>۳</sup> اخیرا بسیار مورد استقبال قرار گرفته است. در این مقاله، هدف استخراج ساختارهای متجانس یک میدان حاصل از حل معادله KS<sup>۴</sup> با استفاده از روش POD است.

معادله دیفرانسیل KS در ابتدا به عنوان مدلی برای ناپایداری‌های روی سطح مشترک و لبه شعله و آشفته‌گی فازها در واکنش‌های شیمیایی پیشنهاد شد. بعدها این معادله و معادلات مشتق شده از آن برای مدل کردن انجماد، جریان آشفته چندبعدی، ناپایداری‌های Rayleigh - Benard، نوسانات غلظت شیمیایی حول یک نقطه تعادل و بسیاری پدیده‌های دیگر استفاده شدند [۶]. خواص غیرخطی این معادله به‌گونه‌ای شبیه به معادلات NS<sup>۵</sup> است که در بسیاری از مقالات اخیر، از آن به عنوان مدلی استاندارد برای بررسی دینامیک غیرخطی سیستم‌های آشوبناک مکانی-زمانی<sup>۶</sup> که جریان‌های آشفته دارای ساختارهای متجانس نیز جزء آنها محسوب می‌شوند، استفاده شده است.

در اغلب موارد، منظور از بررسی آشوب زمانی در سیستم‌هایی که دامنه مشخصی از فضا را نیز در بر می‌گیرند؛ که به نام آشوب مکانی-زمانی معروف شده است؛ یافتن یک توصیف آماری-تعیینی از رفتار سیستم دینامیکی مورد نظر در مقیاس‌های مکانی با طول‌های زیاد و مقیاس‌های زمانی به حد کافی طولانی است [۶]. تئوری‌های نسبتا مفصلی در رابطه با طول موج‌های بلند و زمان‌های طولانی برای میدان‌های صدق‌کننده در معادله KS ارائه شده‌اند [۷]. همچنین در [۸] با استفاده از تجزیه موج‌واره<sup>۷</sup> برای توصیف آشوب مکانی-زمانی، از معادله KS استفاده شده است. در مقاله حاضر، هدف به‌دست آوردن توصیفی رتبه‌کاسته و آماری از رفتارهای طولانی مدت ساختارهای بزرگ‌مقیاسی است که در میدان‌های صدق‌کننده در معادله KS ظاهر می‌شوند. منظور از آماری بودن این است که توصیف حاصل، یک فرایند متوسط‌گیری آنسامبلی را گذرانیده است.

پس از بدست آمدن توابع پایه مناسب از روش POD، روش معمول برای ایجاد مدل رتبه کاسته از سیستم، روش بسط گالرکین است. در این مقاله نیز پس از یافتن مودهای POD، از بسط گالرکین برای بنا کردن مدلی رتبه کاسته از میدان اصلی استفاده خواهد شد. هر چند چنین روشی سابقه‌ای نسبتا طولانی دارد، لیکن کاربردهای آن در زمینه مکانیک سیالات محدود به دهه

<sup>1</sup> Patern  
<sup>2</sup> Cavity flow  
<sup>3</sup> Flow Control  
<sup>4</sup> Kuramoto-Sivashinsky  
<sup>5</sup> Navier Stokes Equations  
<sup>6</sup> Spatio-temporal Chaos  
<sup>7</sup> Wavelet

میلاادی گذشته و عمدتاً پس از همه‌گیر شدن روش POD بوده است. برای دیدن فرمولاسیون کلی این روش و جزئیات اعمال آن به برخی جریان‌ها می‌توان به [۱] و [۶] مراجعه کرد.

برای به دست آوردن توابع پایه POD، تانسورهای همبستگی دونقطه‌ای مورد نیاز است که معمولاً یا از کارهای تجربی و یا داده‌های حاصل از حل‌های عددی مستقیم (DNS) ناشی می‌شوند. برای داشتن تانسورهای همبستگی نیز به حجم زیادی از داده‌ها مورد نیاز خواهد بود. پس از آن، در نهایت یک مسئله مقدار ویژه با بعد بسیار زیاد باید حل شود. به همین دلیل تا مدت‌ها امکانات سخت‌افزاری و تکنیک‌های محاسباتی آن چنان قدرت نداشتند که بتوانند ایده POD را جامه عمل بپوشانند. این مشکلات با ارائه روش snapshots توسط Sirovich تا حدود زیادی مرتفع گردید [۳]. با استفاده از این روش، زمان حل مسئله مقدار ویژه مورد نیاز POD به نحو چشمگیری کاهش می‌یابد. در این روش، برای تحلیل POD میدانی که دارای تعداد  $N$  نقطه است و داده‌های آن در یک آنسامبل با  $M$  عضو جمع شده است و  $N \gg M$ ، به جای حل یک مسئله مقدار ویژه  $N \times N$ ، یک مسئله مقدار ویژه  $M \times M$  حل می‌شود.

انجام عملیات POD بصورت سنتی منجر به یک مسئله مقدار ویژه شده و با یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، مودهای POD و متوسط انرژی جنبشی هر مود بدست می‌آیند. در سالهای اخیر با توجه به ارتباط تنگاتنگی که روش تجزیه مقادیر تکین<sup>۱</sup> (SVD) با مسائل مقدار ویژه دارد، فرمولاسیون استخراج مودهای POD با استفاده از این روش ابداع شده و مورد استفاده روز افزون قرار گرفته است [۱۰]. این روش در عمل خود را بسیار کارآمدتر از روش سنتی یافتن مستقیم مقادیر ویژه نشان داده است. همچنین اعمال روش snapshots به (SVD) نیز بهینگی روش را دوچندان کرده است [۹].

در این مقاله، ابتدا معادله KS از روش طیفی گالرکین حل عددی مستقیم (DNS) شده و سپس میدان حاصل، از روش POD با استفاده از تکنیک SVD/snapshots مورد تحلیل قرار گرفته و ساختارهای متجانس آن استخراج شده‌اند و نتایج حاصل با سایر تحقیقات مشابه مقایسه شده است. چنانکه نشان داده خواهد شد، تنها با استفاده از پنج مود POD می‌توان تقریباً ۴۰ درصد از انرژی میدان را بازیابی کرد. بدین ترتیب می‌توان مدل‌هایی با تعداد ابعاد واقعاً کم برای بازسازی میدان ایجاد کرد.

## ۲. آشوب مکانی-زمانی با استفاده از معادله KS

ساختارهای متجانس اغلب در میدان‌های آشوبناک مکانی-زمانی دیده می‌شوند که حداقل در یک راستا دارای شرایط مرزی همگن و پریودیک هستند. یکی از معادلاتی که چنین میدان‌هایی را ایجاد می‌کند، معادله KS است. در تحقیق حاضر، برای ایجاد ساختارهای متجانس، از میدان حاصل از حل این معادله استفاده شده است. هر چند اشکال مختلفی از معادله KS توسط محققین مختلف ارائه شده است، لیکن در اینجا ما معادله KS یک بعدی و شرایط مرزی آن را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_t + u_{xx} + u_{xxx} + uu_x = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(L,t) \quad u_x(0,t) = u_x(L,t), \dots \quad (2)$$

در این معادله جمله  $u_{xx}$  به مثابه یک منبع انرژی عمل می‌کند، درحالی که جمله  $u_{xxx}$  نقشی پایدارکننده داشته و مانند یک چاه انرژی است که با عدد موج، تاثیر آن افزایش می‌یابد. معادله KS دارای دو ویژگی عمده مشابه با معادلات NS است که باعث میشود بتوان از آن در شبیه‌سازی جریان‌های آشوبه‌دار ساختارهای متجانس استفاده کرد:

**الف-** به سادگی می‌توان نشان داد که محدوده‌ای از اعداد موج ناپایدار وجود دارد که مسئول تولید آشفتگی در میدان

هستند. عدد موج مربوط به نرخ رشد حداکثر  $|k| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L}{\pi}$  است [۸].

ب- شباهت مهم دیگر این معادلات در رابطه با تقارن‌های انتقالی و انعکاسی آنهاست. در حقیقت معادله KS با شرایط مرزی متناوب، دارای همان تقارن‌های انتقالی و انعکاسی معادلات NS در جهت عرضی در جریان‌های لایه مرزی است. به این ترتیب بدیهی است که تفکیک مودال معادلات و اثرهای متقابل مودها در جملات خطی و غیرخطی در دو مسئله شبیه به هم خواهند بود.

چنانکه گفته شد، اشکال مختلفی از معادله KS توسط محققین مختلف ارائه شده‌است. در خصوص این شکل خاص تعریف معادله KS ذکر موارد زیر لازم است:

۱. اولاً به سادگی می‌توان نشان داد که با چنین تعریفی، میدان حاصل *drift free* یعنی دارای میانگین صفر خواهد بود که این خاصیت در پایداری معادله در حین پیشروی حل عددی بسیار مفید است.

۲. ثانیاً طول *L* در این معادله، در حقیقت پارامتر کنترلی معادله در گذار از رفتار میرا به تناوبی، شبه تناوبی و نهایتاً کاملاً آشوبناک است. از این نظر، طول *L* نقش عدد رینولدز در معادلات NS را به عهده دارد.

در تحقیق حاضر معادله (۱) با شرایط مرزی (۲) از روش طیفی گالریکین حل عددی مستقیم (DNS) شده است.

## ۲-۱- اعمال روش طیفی گالریکین<sup>۱</sup> به معادله KS

روش گالریکین یکی از دو روش مرسوم حل‌های طیفی است. هر چند که استفاده از این روش سابقه‌ای نسبتاً طولانی دارد، لیکن کاربرد آن در تحلیل جریان‌های آشفته خصوصاً پس از معرفی روش POD بسیار بیشتر شده‌است. به دلیل سراسر بودن فرمولاسیون این روش، اعمال آن به معادلات حاکم به سادگی صورت می‌پذیرد و تقریباً همه توانایی‌های روش *collocation* را نیز دارا است. اخیراً از این روش در تحلیل متوسط مودال جریان‌های آشفته نیز استفاده شده است [۱۱] و [۱۳]. یکی از محاسن بزرگ روش گالریکین، تنوع در انتخاب پایه‌های آن است. پایه‌های مناسب می‌توانند از بین مودهای فوریه، چیشیف، مودهای POD و یا مجموعه‌های دیگر چند جمله‌ای‌های متعامد و یا موج‌واره‌ها انتخاب شوند.

برای تشریح روش، اگر حل *u* در هر زمان معین *t* در فضای فاز<sup>۲</sup> را با *X* نشان دهیم، آن‌گاه اگر  $u = u(x, t)$  یک تابع تعریف شده بر روی قلمرو مکانی  $\Omega$  باشد، *X* نیز باید یک فضای تابعی تعریف شده در سراسر قلمرو  $\Omega$  بوده و شامل همه حل‌های ممکنه معادله فوق خواهد بود. در سیستم‌های با انرژی محدود، معمولاً زیرفضاهای تابعی در  $L^2(\Omega)$  انتخاب می‌شوند و دسته‌هایی از آنها انتخاب می‌شوند که مشتق‌های آنها نیز به  $L^2$  تعلق دارند. به طور کلی، شرایط مرزی نیز در تعریف *X* وارد می‌شوند به طوری که هر نوع حل ممکن برای یک مسئله مقدار اولیه-مرزی که  $u \in X$ ، به طور خودکار شرایط مرزی را ارضاء خواهد کرد. با انتخاب مناسب فضای فاز، معمولاً می‌توان وابستگی صریح نسبت به متغیر مکانی *x* را نیز حذف کرد.

معمولاً حل عمومی یک PDE از روش گالریکین شامل دو گام اساسی است. ابتدا تابع *u* به صورت یک مجموع متناهی از حاصل ضرب ضرایب مودال وابسته به زمان در المان‌هایی از یک پایه مناسب *X* بیان می‌شود که در این بسط، المان‌های پایه  $\varphi_j(x)$  بر اساس عدد موج مکانی مرتب می‌شوند یعنی

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^K a_j(t) \varphi_j(x) \quad (3)$$

سپس با اعمال این شکل اولیه جواب به معادلات حاکم و انجام ضرب داخلی، به معادلات تحولی<sup>۱</sup> برای ضرایب مجهول به شکل زیر خواهیم رسید

$$\frac{da}{dt} = F(a) \quad (4)$$

که با حل معادله تحولی، جواب مسئله در فضای حالت<sup>۲</sup> به دست خواهد آمد. در رابطه فوق  $F(\cdot)$  یک تابع برداری عمومی غیرخطی است که می‌تواند شامل مشتق‌ها و یا انتگرال‌های مکانی نیز باشد. در تحقیق حاضر نیز همین روند برای حل معادله KS طی شده است. بدین منظور بسط (۳) به معادله (۱) اعمال شده و با توجه به پیرویدیک بودن شرایط مرزی، برای توابع پایه از مودهای فوریه به صورت

$$\varphi_k(x) = \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) \quad (5)$$

استفاده شده است که در آن  $a_k$ ها ضرایب مودال مختلط هستند و تقارنی به صورت  $a_{-k}(t) = a_k^*(t)$  در مورد آنها صادق است که  $a_k^*$  نشان‌دهنده مزدوج مختلط  $a_k$  است. ضرب داخلی روی  $L^2$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g^*(x)dx \quad (6)$$

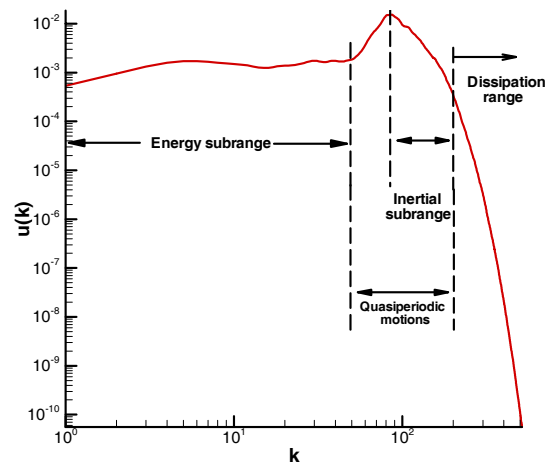
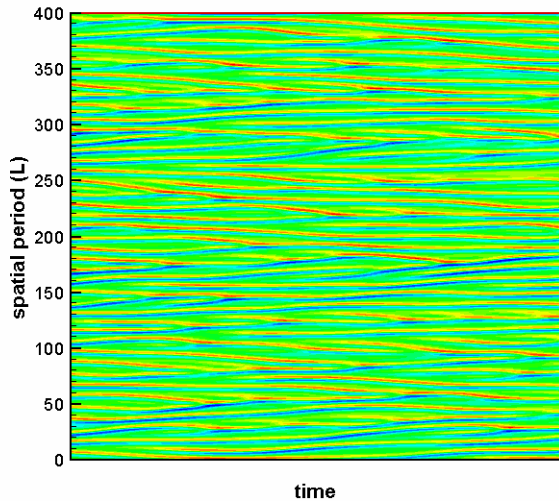
با اعمال موارد فوق به معادله (۱)، و استفاده از خاصیت تعامد مودهای فوریه و پس از ساده‌سازی‌های لازم خواهیم داشت:

$$\dot{a}_l = \frac{2\pi l^2}{L} \left[ 1 - \left( \frac{2\pi l}{L} \right)^2 \right] a_l - i \sum_j j a_j a_{l-j} \quad (7)$$

حل معادله (۷) ضرایب بسط (۳) را بدست خواهد داد که جواب معادله (۱) را تشکیل می‌دهند. این معادلات برای درجه سرزنی دلخواه  $K$  استخراج شده‌اند که می‌توان آنها را به صورت  $K$  معادله مختلط و یا  $2K$  معادله حقیقی در زمان انتگرال گیری کرد.

انتگرال‌گیری زمانی را می‌توان به دو صورت صریح و یا ضمنی انجام داد. مزیت روش انتگرال‌گیری زمانی صریح معمولاً در اجرای ساده‌تر آن است، ولی با توجه به ملاحظات مربوط به پایداری، اغلب استفاده از روش‌هایی که حداقل به صورت جزئی ضمنی باشند توصیه می‌شود. در اغلب موارد تجزیه زمانی ضمنی با استفاده از روش Crank-Nicolson که دارای دقت مرتبه دوم است انجام می‌شود، ولی معادله اختلافی پسرو مرتبه دوم نیز به طور موفقیت‌آمیزی در این زمینه به کار رفته است. در تجزیه زمانی صریح بیش از همه از روش‌های رانج-کوتا<sup>۳</sup> با دقت مرتبه دوم، سوم یا چهارم استفاده می‌شود که جایگزین روش‌های Adams-Bashforth و Leapfrog با دقت مرتبه دوم شده‌اند. دو روش اخیر در هر مرحله زمانی به محاسبات کمتری نیاز دارند، ولی در روش‌های رانج-کوتا به علت محدوده بازتر پایداری، استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر ممکن است. بنابراین، علیرغم نیاز روش‌های رانج-کوتا به محاسبات بیشتر در هرگام زمانی، امکان انتخاب گام‌های زمانی بزرگ‌تر، نسبت به روش‌های قبلی، آنها را ارجح‌تر نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در بسیاری از میدان‌های آشوبناک، انتخاب گام زمانی باتوجه به محدودیت پایداری جملات جابجایی انجام می‌شود که ممکن است اندازه آن بسیار کمتر از گام زمانی تعیین شده توسط کوچک‌ترین مقیاس‌های زمانی موجود در حل باشد.

Evolution equations<sup>1</sup>  
State space<sup>2</sup>  
Runge-Kutta method<sup>3</sup>



شکل (۱): طیف توزیع انرژی بر حسب اعداد موج. هر سه شکل (۲): میدان حل در طی زمان. غالب بودن یک محدوده از مودها آشکار است. در طی زمان تقریباً هر امتزاجی بلافاصله با یک اشتقاق دنبال می‌شود بطوریکه عدد موج غالب تقریباً همیشه ثابت می‌ماند.

در تحقیق حاضر برای انتگرال‌گیری در زمان، از روش رانج-کوتای مرتبه چهار استفاده شده است. هرچند که الگوریتم گام زمانی تصحیح‌شونده<sup>۱</sup> با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است، لیکن با توجه به اینکه اطلاعات میدان در زمان‌های مشخصی مورد نیاز بوده است، در نهایت، گام زمانی ثابت به عنوان روش اصلی در انجام اجراءهای برنامه انتخاب شده است.

## ۲-۲- حل عددی مستقیم (DNS) معادله KS

معادلات (۷) تشکیل یک دستگاه معادلات مرتبه اول کوپل‌شده را می‌دهند. اگر تعداد معادلات به حد کافی زیاد در نظر گرفته شوند می‌توان تمام ناحیه انرژی<sup>۲</sup>، ناحیه اینرسی<sup>۳</sup> و ناحیه اضمهلال<sup>۴</sup> را استخراج کرد که بدین ترتیب به یک حل عددی مستقیم (DNS) برای معادلات رسیده‌ایم. از طرف دیگر تعداد مودهای لازم برای رسیدن به ناحیه اضمهلال، یعنی بزرگترین عدد موج لازم، وابسته به طول دامنه مکانی  $L$  است. کارهای تحلیلی و مشاهدات عددی زیادی در رابطه با نحوه رفتار معادله KS در طولهای مختلف انجام شده‌است که نشان می‌دهند اولین نقطه انشعاب<sup>۵</sup> معادله در  $L = 2\pi$  است و با افزایش طول، رفتار معادله به تدریج شبه تناوبی، آشوبناک و در نهایت شبه‌آشفته می‌شود. در تحقیق حاضر برای اینکه بتوان اولاً رفتاری حتی الامکان شبیه به جریان آشفته داشت و ثانیاً بتوان نتایج حاصل را با نتایج سایر محققین مقایسه کرد، طول  $L = 64 \times 2\pi \approx 400$  در نظر گرفته شده‌است. رفتار معادله برای این طول در [۶ و ۷] بطور کامل تشریح شده و تعداد مودهای لازم برای رسیدن به انتهای ناحیه اضمهلال نیز ۵۱۲ مود فوریه مختلط و یا ۱۰۲۴ مود حقیقی تعیین شده‌است. برای پیشروی در زمان، از روش رانج-کوتای مرتبه چهارم با گام زمانی ثابت استفاده

<sup>1</sup> Adjustable timestep

<sup>2</sup> Energy Range

<sup>3</sup> Inertial range

<sup>4</sup> Dissipation range

<sup>5</sup> Bifurcation

شده است. شرایط اولیه بصورت تصادفی با تابع توزیع احتمال<sup>۱</sup> ثابت در نظر گرفته شده است. پس از گذشت یک زمان آرامش<sup>۲</sup> نسبتاً کوتاه، در حدود ۳ ثانیه، میدان حل بصورت پایدار در آمده و r.m.s دامنه ها تقریباً ثابت می ماند. طیف فرکانسی نوسانات نیز تقریباً بدون تغییر باقی می ماند. این نقطه، محل آغاز ثبت میدان در نظر گرفته شده است. شکل (۱) توزیع r.m.s دامنه را نسبت به عدد موج نشان می دهد. موارد زیر در مورد این طیف قابل ذکر هستند:

۱. اولاً غالب بودن محدوده ای از اعداد موج کاملاً مشهود است. چنانکه دیده می شود، منحنی دارای قله ای در حوالی عدد موج ۱۸۰ است. برخی تحلیل های تئوریک نیز لزوم وجود چنین ناحیه ای و محل آن را تعیین می کنند [۸]. البته ذکر این نکته لازم است که پهنای ناحیه اعداد موج غالب در این منحنی، نسبت به برخی از جریانهای واقعی آشفته نسبتاً زیاد است. این مطلب خصوصاً روشهای استخراج مودهای غالب و ساختارهای متجانس را دچار مشکلات جدی می کند [۱۳].

۲. در اعداد موج کوچک، با توزیع تقریباً ثابتی روبرو می شویم. به عبارت دیگر منحنی کاملاً صاف است. این ناحیه کاملاً مشابه با ناحیه انرژی در جریانهای آشفته است.

۳. پس از یک افزایش در مقدار r.m.s دامنه ها در حوالی اعداد موج ۱۸۰، با یک ناحیه نسبتاً کوچک کاهش توانی<sup>۳</sup> روبرو می شویم که کاملاً در تطابق با ناحیه اینرسی جریانهای آشفته است. تئوری هایی در رابطه با این ناحیه وجود دارد مبنی بر اینکه دقیقاً مانند ناحیه اینرسی جریانهای آشفته، کاهش در انرژی نوسانات در این ناحیه، فقط ناشی از یک توزیع مجدد<sup>۴</sup> انرژی به مودهای با عدد موج کوچکتر است و ارتباطی با اضمحلال ندارد [۷].

۴. بلافاصله پس از ناحیه کاهش توانی، با یک ناحیه کاهش نمائی<sup>۵</sup> روبرو می شویم که کاملاً در تشابه با ناحیه اضمحلال در جریانهای آشفته است.

این گونه توزیع انرژی نسبت به اعداد موج و یا فرکانس، در بین جریانهای آشفته دارای ساختارهای متجانس کاملاً مشترک است. البته بسته به هندسه و شرایط جریان، محل فرکانس غالب و همچنین پهنای باند فرکانسهای غالب می تواند بسیار متفاوت باشد [۱۲]. به هر حال هدف تقریباً تمامی روشهای شبه تعینی<sup>۶</sup> (SDM)، رسیدن به مدلهائی است که بتواند محل و مقدار نسبی این دامنه ها را پیش بینی کند.

شکل (۲) میدان ساخته شده از روی دامنه های بدست آمده را نشان می دهد. در این شکل نیز موارد زیر قابل توجه است:

۱. در این شکل نیز غلبه امواج با اعداد موج مشخصی کاملاً به چشم می خورد. لازم به ذکر است که این غلبه در طی زمان بصورت آماری ثابت می ماند.

۲. هر چند به سادگی در مورد تناوبی بودن رفتار موج های غالب نمی توان اظهار نظر کرد، لیکن به هر حال به نحو مشهودی رفتار آنها کاملاً هم تصادفی نیست.

۳. چنانکه دیده می شود در برخی نقاط، امواج با یکدیگر برخورد کرده و ممزوج می شوند. اما تقریباً هر امتزاجی بلافاصله با یک اشتقاق همراه است. بطوریکه تعداد امواج غالب در هر زمان بصورت آماری ثابت مانده و لذا عدد موج غالب تقریباً ثابت است.

1 Probability Density Function (PDF)  
 2 Settling time  
 3 Power law decrease  
 4 Redistribution  
 5 Exponential decrease  
 6 Semi Deterministic Methods

موارد فوق همگی موید شباهت میدان حاصل با میدانهای جریان آشفته دارای ساختارهای متجانس است و به همین دلیل، تحلیل POD این میدان برای استخراج ساختارهای وابسته آن می‌تواند به عنوان راهگشایی برای تحلیل میدانهای واقعی جریان سیال محسوب شود.

### ۳- روش POD و snapshot POD

به منظور تاکید بیشتر بر فرمولاسیون، بدون ورود به مشکلات ناشی از تعداد زیاد ابعاد، یک آنسامبل  $\{u^k\}$  از میدانی اسکالر را در نظر می‌گیریم که هر کدام از اعضاء آن به صورت تابع  $u = u(x)$  در فاصله  $0 \leq x \leq 1$  تعریف می‌شوند. با توجه به این که به دلیل همگنی میدان و وجود تقارن در شرایط مرزی، در نهایت مودهای فوریه به عنوان توابع پایه در نظر گرفته می‌شوند، لذا  $u$  را مقداری مختلط در نظر می‌گیریم. به منظور رسیدن به تقریبی مناسب از اعضاء  $\{u^k\}$ ، لازم است هر  $u$  بر روی توابع پایه مناسبی تصویر شود. فرض می‌کنیم که  $u$  ها به یک فضای ضرب داخلی تعلق دارند که در اینجا آن را  $L^2([0,1])$ ، فضای هیلبرت خطی از توابع مختلط مربع انتگرال‌پذیر، در نظر می‌گیریم. روش POD یک نماینده مناسب برای کلیه اعضاء آنسامبل فوق ایجاد می‌کند به طوری که از نظر انرژی موجود در مودهای نوسانی بیشینه باشد. می‌توان نشان داد که برای رسیدن به چنین پایه متعامد مناسبی باید داشته باشیم [۶]:

$$\max_{\varphi \in L^2([0,1])} \frac{\langle (u, \varphi)^2 \rangle}{\|\varphi\|^2} \quad (۸)$$

که  $\|\cdot\|$  قدرمطلق و  $L^2$  نرم را با تعریف زیر نمایش می‌دهند

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} \quad (۹)$$

می‌توان نشان داد که چنین مسئله ای منجر به یک مسئله وردشی<sup>۱</sup> مقید بصورت زیر خواهد شد:

$$\int_{\Omega} \langle u(x)u^*(x') \rangle \varphi(x') dx' = \lambda \varphi(x) \quad (۱۰)$$

لذا توابع پایه بهینه در حقیقت ویژه‌تابع‌هایی هستند که از معادله انتگرالی Fredholm نوع دوم فوق بدست می‌آیند. چنانکه دیده می‌شود، هسته<sup>۲</sup> انتگرال فوق عبارت از تابع خودهمبستگی<sup>۳</sup> است. در عمل به جای استفاده از فرم پیوسته معادله (۱۰)، از فرم گسسته آن استفاده می‌شود. در این حالت اگر هر کدام از  $\mathbf{M}$  عضو آنسامبل  $\{u^k\}_{k=1}^M$  را برداری  $\mathbf{N}$  بعدی بدانیم که نمایانگر یک snapshot است، آنگاه تابع خودهمبستگی به ماتریسی  $N \times N$  بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$R = \langle u \otimes u^* \rangle \quad (۱۱)$$

و بدین ترتیب فرم گسسته معادله (۱۰) به یک مسئله مقدار ویژه  $N \times N$  بدل خواهد شد که بردارهای ویژه آن مودهای POD و مقادیر ویژه آن متوسط انرژی جنبشی هر مود خواهند بود [۶]. Sirovich نشان داد که این مسئله را می‌توان به یک مسئله  $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$  تبدیل کرد که در آن  $\mathbf{M}$  تعداد اعضاء آنسامبل است. با فرض  $\varphi$  به عنوان یک تابع ویژه داریم

$$\varphi = \sum_{k=1}^M a_k u^k \quad (۱۲)$$

که ضرایب  $a_k$  باید تعیین شوند. می‌توان نشان داد که این ضرایب از مسئله مقدار ویژه زیر بدست می‌آیند [۳]:

<sup>1</sup> Variational  
<sup>2</sup> Kernel  
<sup>3</sup> Autocorrelation function



$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{M} (u^i, u^k) a_k = \lambda a_i \quad (13)$$

چنانکه دیده می شود تنها شرط لازم برای  $u$  اینست که  $u^k$  مستقل خطی باشند. این روش به روش snapshots POD معروف است. روش POD اغلب با محاسبات مفصل مقادیر و توابع ویژه ماتریس هائی بسیار بزرگ همراه بوده و اغلب بدون استفاده از روش snapshots مورد استفاده قرار نمی گیرد بطوریکه امروزه این روش به صورت یک جزء لاینفک POD مطرح است. روش snapshot POD در طی سالهای گذشته به کرات مورد استفاده قرار گرفته است و کارآمدی خود را نشان داده است. لیکن اخیرا استفاده از SVD برای انجام POD پیشنهاد شده است و با توجه به سادگی انجام عملیات و کارآمدی آن، به سرعت در حال جایگزین شدن است [۹ و ۱۰].

### ۳-۱- روش POD/SVD

یکی از پرقدرت ترین روشهای تجزیه ماتریسی، روش تجزیه مقادیر تکین (SVD) است. توانائی این روش در اعمال به ماتریس های غیرمربعی و عدم نیاز به متقارن بودن ماتریس باعث شده است که امروزه این روش به یکی از محبوب ترین روش های عملی جبرخطی تبدیل شود. اساس روش بر این خاصیت استوار است که هر ماتریس  $A_{(M \times N)}$  را می توان بصورت زیر تفکیک کرد

$$A_{(M \times N)} = U_{(M \times M)} \Sigma_{(M \times N)} V_{(N \times N)}^T \quad (14)$$

که در آن  $U_{(M \times N)}$  یک ماتریس متعامد است که ستون های آن بردارهای ویژه  $AA^T$  هستند و  $V_{(N \times N)}$  نیز یک ماتریس متعامد است که ستون های آن بردارهای ویژه  $A^T A$  هستند و  $\Sigma_{(M \times N)}$  ماتریسی شبه قطری است که عناصر روی قطر آن مقادیر تکین ماتریس  $A$  هستند. ارتباط بین مقادیر تکین و مقادیر ویژه ماتریس  $A$  را به سادگی از متعامد بودن ماتریس های  $U$  و  $V$  می توان استخراج کرد. زیرا به سادگی می توان نشان داد که

$$AA^T = U \Sigma^2 U^T \quad (15)$$

$$A^T A = V \Sigma^2 V^T \quad (16)$$

با توجه به اینکه (۱۵) و (۱۶) هر دو تبدیلهائی تشابهی<sup>۱</sup> با استفاده از ماتریس های  $AA^T$  و  $A^T A$  تشکیل می دهند، آشکار می شود که مقادیر تکین ماتریس  $A$  در حقیقت مجذورهای مقادیر ویژه ماتریس های  $AA^T$  و  $A^T A$  هستند. بنابراین انجام تجزیه مقادیر تکین ماتریس  $A$  معادل با یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $AA^T$  هستند که چنانکه دیدیم همان مودهای POD و متوسط های انرژی مودها را بدست می دهند.

اعمال روش snapshots به این تجزیه نیز به سادگی امکان پذیر است. با ضرب رابطه (۱۴) در  $U^T$  خواهیم داشت

$$U^T A = \Sigma V^T \quad (17)$$

که تشکیل ماتریس هائی  $M \times N$  می دهند. با توجه به اینکه  $M - N$  ستون آخر  $\Sigma$  و  $M - N$  سطر آخر  $V^T$  صفر هستند، لذا این تعداد معادله را می توان از مجموع محاسبات کسر کرد. یعنی اگر  $k$  مقدار ویژه غیر صفر در نظر بگیریم، آنگاه  $k$  سطر اول  $\Sigma V^T$  غیر صفر و متعامد هستند. لازم به ذکر است که نرم این سطرها مقادیر تکین نظیر هر سطر خواهند بود. لذا در مجموع پروسه زیر را می توان برای انجام snapshots SVD پیشنهاد کرد:

۱. ماتریس  $Q$  را که ستون های آن بردارهای ویژه ماتریس  $B_{(M \times M)} = A_{(M \times N)} A_{(N \times M)}^T$  هستند بدست می آوریم.

۲. با ضرب  $U^T$  در  $A$  خواهیم داشت

$$Q = U^T A = \Sigma V^T \quad (18)$$

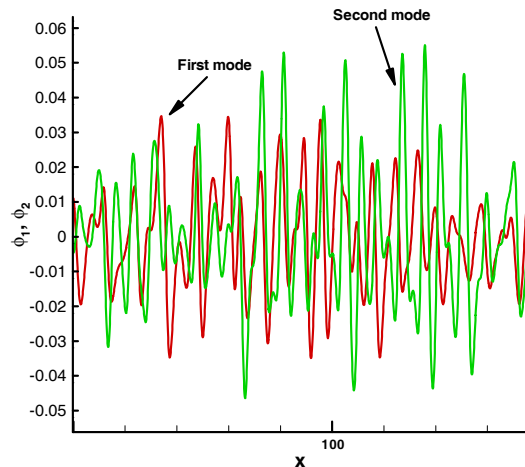
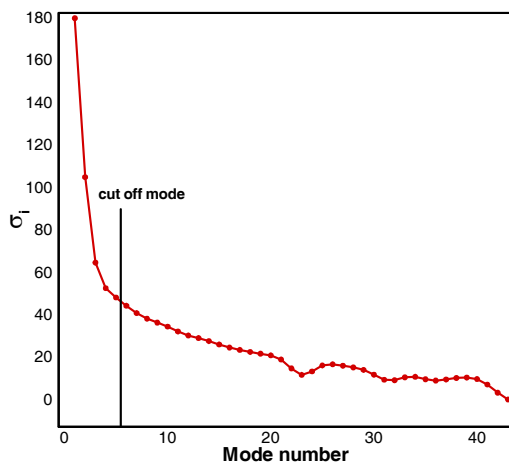
۳. با استفاده از سطرهای غیر صفر  $Q$  مقادیر تکین  $A$  را که همان نرم های بردارهای ویژه هستند بدست می آوریم

$$\sigma_i^2 = Q_i Q_i^T \quad (19)$$

۴. ستونهای  $V$  را با داشتن  $\sigma_i$  می توان بدست آورد.

$$\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 v_{11} & \sigma_1 v_{12} & \sigma_1 v_{13} & \bullet & \bullet & \sigma_1 v_{1M} \\ \sigma_2 v_{21} & \sigma_2 v_{22} & \sigma_2 v_{23} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \sigma_3 v_{31} & \sigma_3 v_{32} & \sigma_3 v_{33} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \sigma_M v_{M1} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \sigma_M v_{MM} \end{bmatrix} \quad (20)$$

در تحقیق حاضر همین روند برای تحلیل داده های حاصل از حل عددی مستقیم معادله KS استفاده شده است.



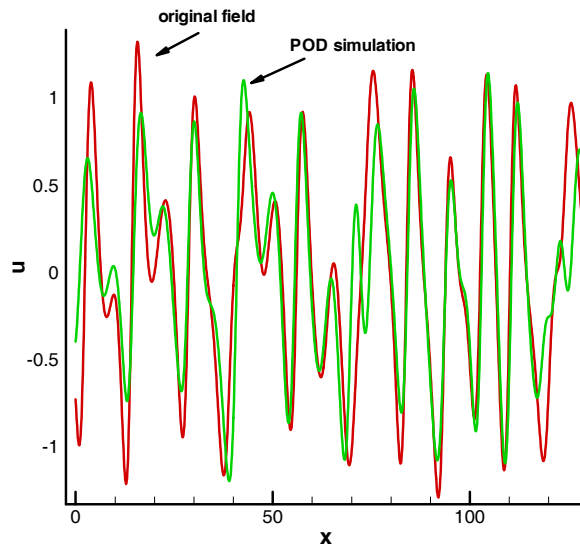
شکل (۳): توزیع مقادیر تکین نسبت به شماره مود. پس از مود پنجم، کاهش چشمگیری در شیب سهم انرژی هر مود از انرژی کل بوجود می آید.

شکل (۴): مودهای اول و دوم POD. اندازه نسبی مودها به ترتیب صعودی مرتب می شوند.

### ۳-۲- تحلیل میدان حاصل از حل عددی مستقیم معادله KS

با داشتن نتایج حاصل از حل عددی مستقیم، می توان مودهای پرنرژی میدان را با استفاده از روش POD استخراج کرد. برای یافتن تابع خودهمبستگی، دو روش مرسوم وجود دارد. برای میدانهای آماری-دائم<sup>۱</sup> یعنی میدانهایی که در آنها مقادیر متوسط تابع زمان نیستند، معمولاً snapshots از مقادیر حاصل از یک اجرای برنامه در زمانهای مختلف بدست می آیند. البته با توجه به اینکه snapshots لزوماً باید مستقل خطی باشند، لذا نمونه گیری از میدان باید در فواصل زمانی مناسبی انجام پذیرد. در مورد میدانهای آماری-گذرا<sup>۲</sup> لازم است که با انجام اجرای متعدد برنامه از یک شرایط اولیه اسمی یکسان، برای هر مقطع زمانی، آنسامبل مورد نظر را از اجرای برنامه در همان زمان مورد نظر بدست آورد.

<sup>1</sup> Statistically stationary  
<sup>2</sup> Statistically nonstationary



شکل (۵): بخشی از میدان بازسازی شده با استفاده از پنج مود اول POD. تطابق در اعداد موج پائین بیشتر است.

در تحقیق حاضر، هر دو روش فوق اجراء شده‌اند لیکن با توجه به هدف نهائی که بدست آوردن یک مدل گذرا با زمان از میدان حل بوده است، تاکید اصلی بر ایجاد آنسامبل با استفاده از اجراءهای متفاوت بوده است. برای بدست آوردن آنسامبل گذرا با زمان، از چهل اجراء مختلف با شرایط نامی یکسان استفاده شده است. بدین ترتیب برای هر گام زمانی، ماتریسی با چهل ستون که هر ستون آن از برداری با  $3501$  بعد تشکیل شده است بدست می‌آید. با استفاده از روند تشریح شده در بخش قبل، ابتدا ماتریس  $Q$  از طریق حل یک مسئله مقدار ویژه  $40 \times 40$  بدست آمده و سپس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مورد نظر استخراج می‌شوند. برای نمایش نتایج، تنها یک گام زمانی یعنی  $t = 80$  تشریح می‌شود. سایر گام‌های زمانی نیز کاملاً مشابه با همین مورد هستند. در شکل (۳) توزیع مقادیر تکین نسبت به شماره مود نمایش داده شده است. چنانکه دیده می‌شود، شیب افت سهم هر مود در ساختن انرژی کل میدان چندان زیاد نیست. البته به هر حال، پس از مود پنجم، شیب به نحو چشمگیری کاهش می‌یابد. به همین دلیل، در بازسازی میدان از پنج مود اول استفاده شده است. اگر نسبت انرژی دریافت شده برای بازسازی میدان را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$E = \left( \sum_{i=1}^{K_{cut}} \lambda_i \right) / \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \right) \quad (21)$$

در این صورت با استفاده از پنج مود اول در حدود  $40\%$  درصد از انرژی میدان بازیافت خواهد شد. البته همانگونه که در [۱۲] آمده است، با توجه به تعاریف جدید ساختارهای متجانس، تنها مقدار انرژی بازیافت شده توسط مودها در تفکیک صحیح ساختارهای متجانس از نامتجانس دارای اهمیت نبوده بلکه تعیینی و یا تصادفی بودن میدان بازسازی شده نیز دارای اهمیت است. واقعیت این است که با افزایش تعداد مودهای POD سهم قسمت تصادفی در میدان بازسازی شده بیشتر خواهد شد. در شکل (۴) مودهای اول و دوم POD در مقابل یکدیگر ترسیم شده‌اند. نکته قابل توجه این است که از آنجا که مقادیر تکین به ترتیب نزولی مرتب می‌شوند، لذا بطور طبیعی نرم مودها بصورت صعودی مرتب خواهد شد یعنی نرم مود دوم بزرگتر از مود اول و الی آخر. در نهایت نیز میدان بازسازی شده با استفاده از پنج مود در شکل (۵) ترسیم شده است. همانگونه که دیده می‌شود، رفتار کلی میدان بازسازی شده کاملاً مطابق با میدان اولیه است. لیکن در مورد نوسانات کوچک‌تر چنین تطابقی وجود ندارد که با توجه به حذف حدود  $60\%$  درصد از انرژی میدان، کاملاً قابل پیش‌بینی است.

#### ۴- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

قابلیت روش تجزیه متعامد بهینه (POD) در استخراج ساختارهای متجانس از یک میدان همگن آماری مورد بررسی قرار گرفته است. پهنای زیاد طیف توان میدان‌های همگن آماری در ناحیه اعداد موج غالب، استخراج ساختارهای متجانس از این قبیل میدان‌ها را مشکل‌تر می‌سازد. برای رسیدن به میدان پایه، از حل عددی مستقیم (DNS) معادله KS استفاده شده است. میدان حاصل با استفاده از روش POD/SVD تحلیل شده و از بین موده‌های استخراج شده، با استفاده از بسط گالرکین پنج مودی، میدان دوباره‌سازی شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش عدد مود، علاوه بر کاهش انرژی موجود، مودها تصادفی‌تر می‌شوند. لیکن به هر حال در همه موده‌های POD بخش‌های تصادفی و غیر تصادفی وجود دارد.

#### ۵- مراجع

- [1] Smith, T. R., Moehlis, J., Holmes, P., Low dimensional modelling of turbulence using the proper orthogonal decomposition: a tutorial, *Kluwer Academic Publishers*. 2004.
  - [2] Lumley, J. L., The structure of inhomogeneous turbulence, In A. M. Yaglom and V. I. Tartarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, pp. 166-78. Nauka, Moscow, 1967.
  - [3] Sirovich, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures, Parts I-III, *Quarterly of Applied Math.*, XLV(3):561-82, 1987.
  - [4] Moehlis, J., Smith, T. R., Holmes, P., Faisst, H., Models for turbulent plane couette flow using the proper orthogonal decomposition, *Phys. Fluids* 14 2493 (2002)
  - [5] Ahlman, D., Soderlund, F., Jackson, J., Kurdila, A., Shyy, W., Proper orthogonal decomposition of time dependent lid-driven cavity flows, *Phys. Fluids*, 3, 2337-2354, (2002).
  - [6] Holmes, P., Lumley, J. L., Berkooz, G., *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*, Cambridge University Press, 1998.
  - [7] Armbruster, D., Heiland, R., Kostelich, E. J., KLTOOL: a tool to analyses patio-temporal complexity, *Chaos*, 4(2):421-4, 1994.
  - [8] Berkooz, G., Elezgaray, J., Holmes, P., Coherent structures in random media and wavelets, *Physica D*, 61:47-58, 1992.
  - [9] Zhang, B., Lian, Y., Shyy, W., Proper orthogonal decomposition for three dimensional membrane wing aerodynamics, 33<sup>rd</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference & Exhibit, Orlando, FL, 2003.
  - [10] Fahl, M., Computation of POD basis functions for fluid flows with Lanczos methods, *Math. Comp. modeling*, 2002.
  - [11] Sabetghadam, F., Generalization of the RANS equations using mean modal decomposition of the Navier Stokes equations, ASME Engineering System design and Analysis Conference, UK, 2004.
  - [12]- Bonnet, J.P., Delville, J., Glauser, M.N., Antonia, R.A., Bisset, D.K., Cole, D.R., fiedler, H.e., Garem, J.H., Hilberg, D., Jeong, J., Kevlahan, N.K.R., Ukeiley, L.S., Vincendeau, E. , Collaborative Testing of Eddy Structures Identification Methods in Free Turbulent Shear Flows, *Experiments in Fluids*, 25 197-225, Springer Verlag Publishing, 1998
- [۱۳] ثابت‌قدم، ف.، طبیی رهنی، م.، شرافتمند، ش.، مقایسه عملکرد تجزیه متوسط مودال (MMD) در استخراج‌های متجانس با موده‌های POD و فوریه. نهمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها، شیراز ۱۳۸۳ (ارسال شده).