

مدل سازی جریان همراه با توربولانس آزاد با روش گردابه‌های تصادفی در جریان سیال تراکم ناپذیر اطراف استوانه

سیامک اسلامی

کارشناس ارشد مکانیک

تهران - نارمک - دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه علم و صنعت ایران

mnouri@iust.ac.ir

نوروز محمد نوری

استادیار

چکیده:

معمولا در حل های عددی توربولانس آزاد جریان ناچیز فرض می‌شود و یا از مدل هایی برای اعمال اثرات توربولانس آزاد جریان استفاده می‌شود. در این تحقیق برای بدست آوردن مدل توربولانس آزاد جریان، معادله انتقال ورتیسیتی به روش گردابه‌های تصادفی (RVM) حل شده است. به این منظور جریان به صورت شبکه گسسته‌ای از ذرات دارای ورتیسیتی (حباب های ورتکس) گسسته می‌شود که هر یک از المان ها دارای سیرکولاسیون محدود و مستقل Γ می‌باشند. در این روش که بر مبنای توزیع گسسته ورتیسیتی استوار است، حرکت های تصادفی تعدادی گردابه با دیدگاه لاگرانژی در قالب یک الگوریتم عددی تعقیب می‌شود. مدل بدست آمده ویژگیهای آماری جریان توربولانس را به خوبی ارضا می‌کند که شامل ثابت ماندن شدت توربولانس جریان در طول زمان و نیز صفر شدن متوسط نوسانات سرعت در هر نقطه از جریان با گذشت زمان می‌باشد. ضمن اینکه مدل مورد نظر قانون بقای جرم و شرط سیرکولاسیون صفر برای یک سطح بسته دلخواه در داخل جریان را نیز به خوبی ارضا می‌کند. نتیجه نهایی مدل به صورت رابطه‌ای بین شدت توربولانس آزاد جریان و خصوصیات فیزیکی جریان ارائه شده است. از مدل بدست آمده برای بررسی توربولانس آزاد جریان حول استوانه در یک جریان تراکم ناپذیر استفاده شده است و نتایج بدست آمده با نتایج تجربی مقایسه شدند.

واژه‌های کلیدی - روش گردابه های تصادفی، توربولانس آزاد جریان، شدت توربولانس

۱- مقدمه

در بررسی جریان های حول اجسام غوطه ور جریان بالادست جسم را می‌توان در دو حالت با توربولانس و بدون توربولانس بررسی کرد که در حالت اول با توربولانس آزاد جریان روبرو هستیم. توربولانس آزاد جریان به دلیل اثری که بر جریان اطراف جسم می‌گذارد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است این اثر را می‌توان به تاثیر در ناحیه گذر در لایه مرزی^۱ و نیز در مورد اثر توربولانس آزاد جریان بر انتقال حرارت در لایه مرزی و تاثیر آن که بر ضریب درگ اجسام می‌گذارد تقسیم بندی کرد.

¹ Transition

محققین در مورد اثر توربولانس آزاد جریان بر انتقال حرارت در لایه مرزی تحقیقات متعددی انجام داده‌اند. کندجویان (Kondjoyan) [۴] در سال ۲۰۰۲ مقاله‌ای منتشر کرد و در آن به جمع بندی تحقیقات آزمایشگاهی و عددی که تا آن زمان در مورد تاثیر توربولانس آزاد جریان بر انتقال حرارت در لایه مرزی انجام شده بود، پرداخت. از مهمترین تحقیقات انجام شده در زمینه تاثیر توربولانس آزاد جریان بر ناحیه گذر لایه مرزی، آزمایش های انجام شده توسط دایبان و همکارانش (Dyban) [۶و۵] است که در سال ۱۹۷۷ انجام شده است که در سالهای اخیر با گسترش کامپیوترها و پیشرفت سخت افزاری آنها پنیو و همکارانش (Peneau) [۱۳و۱۴و۱۵] همان نتایج را با شبیه سازی ادی های بزرگ (LES) تایید کردند. محققین تحقیقات زیادی در مورد اثر توربولانس آزاد جریان بر نیروی مقاوم در مقابل حرکت اجسام انجام داده‌اند که اکثراً آزمایشگاهی بوده و تحقیقات عددی کمی در این مورد صورت گرفته است. ساتاپاتی (Satapathy) [۷] در مورد نوسانات نیروی درگ برای یک مکعب قرار داده شده در جریان همراه با توربولانس آزاد آزمایش هایی انجام داد. همچنین نتایج اندازه گیری شده مشابهی توسط اینستین و السامنی (Einstein&Elsamni) [۸]، کو و گراف (Ko&Graf) [۹و۱۰] و چنگ و کلاید (Cheng&Clyde) [۱۱] بدست آمده است که همگی در مورد نوسانات نیروی درگ و لیفت در جریان همراه با توربولانس آزاد است. تحقیقات انجام شده در مورد اثر توربولانس آزاد جریان بر ضریب درگ به دو موضوع تقسیم می‌شوند. یکی در مورد اثر توربولانس آزاد جریان بر ضریب درگ در ناحیه قبل از رینولدز بحرانی است و دیگری به اثر توربولانس آزاد جریان بر ضریب درگ در ناحیه رینولدز بحرانی و بعد از آن می‌پردازد. در مورد اول اساسی ترین کار انجام شده توسط کو و گراف (Ko&Graf) [۹و۱۰] می‌باشد. تغییرات درگ با رینولدز در منطقه شرایط بحرانی توسط محققین مختلفی نظیر دیویس (Davis)، براون (Brunn)، وارسپ (Warsop)، فاگ (Fage) و ساری (surry) در شدت های مختلف توربولانس مورد مطالعه قرار گرفته است و این تحقیقات نشان می‌دهند که با زیاد شدن شدت توربولانس رینولدز بحرانی کاهش می‌یابد. در این تحقیق به اثر توربولانس آزاد جریان بر ضریب درگ استوانه در ناحیه قبل از رینولدز بحرانی پرداخته شده است. به این منظور در ابتدا توربولانس آزاد جریان با استفاده از روش گردابه‌های تصادفی مدل شده است. جهت حصول به این امر در ابتدا روند حل میدان جریان استوانه که توسط روش گردابه‌های تصادفی صورت گرفته تشریح می‌گردد و در ادامه با داشتن معادلات توربولانس آزاد جریان به چگونگی مدل کردن توربولانس آزاد جریان پرداخته می‌شود و در نهایت با استفاده از این مدل تاثیر توربولانس آزاد جریان بر ضریب درگ سیلندر استوانه‌ای بررسی می‌گردد و نتایج بدست آمده با نتایج تجربی [۹و۱۰] مقایسه می‌شوند.

روش گردابه‌های تصادفی برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ توسط چورین (Chorin) [۱] در رابطه با کار بر روی یک سیلندر دوار ارائه شد. روش او را چیر (Cheer) در سال ۱۹۸۳ [۲] ادامه داد و در سال ۱۹۸۹ با کار بر روی سیلندر دوار در اعداد رینولدز ۳۰۰۰ و ۹۵۰۰ کامل کرد [۳]. با توجه به تعقیب گردابه‌ها از دیدگاه لاگرانژی، روش گردابه‌ای، روش لحظه‌ای، بدون مدل کمکی و بدون شبکه محاسباتی است که بجای متغیرهای اولیه (سرعت و فشار) از متغیرهای ثانویه یعنی ورتیسیتی می‌شود.

۲- روش حل میدان جریان استوانه با روش گردابه‌های تصادفی

در روش فوق‌الذکر بر مبنای اجزای گردابه‌ای معمولاً تعداد محدودی گردابه عددی تولید و با دیدگاه لاگرانژی در قالب یک الگوریتم عددی تعقیب می‌شوند. این گردابه‌ها در یک میدان حل با جریان پتانسیل مشخص حرکت می‌کنند. در این روش اصل مهم قانون بیو-ساوار و تابع گرین می‌باشد که بر مبنای القای سرعت مرکز هر گردابه بر روی گردابه‌های دیگر است. گردابه‌های مذکور به شکل حبابی و یا صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شوند که در این تحقیق، روشی بیان گردیده که تلفیقی از هر

دو نوع گردابه وجود خواهد داشت. برای بررسی جریان ناپایدار هر گام زمانی به دو گام جزئی تر تقسیم می‌شود. در گام جزئی اول از اثر نفوذ ورتیسیتی صرف‌نظر شده و فقط مکانیزم جابجایی برای مراکز گردابه‌ها با استفاده از انتگرال‌گیری زمانی به روش اوپلری یا رانگ کوتای مرتبه ۴ صورت می‌گیرد. گام جزئی دوم تأثیر نفوذ ورتیسیتی بصورت جابجایی تصادفی با استفاده از الگوریتم گام تصادفی در نظر گرفته می‌شود. یعنی نفوذ لزجی با اضافه کردن جزء حرکت ناشی از جابجایی تصادفی با یک واریانس مشخص بدست می‌آید. شرط مرزی سرعت عمودی صفر روی سطح جسم ناشی از جریان زمینه (پتانسیل) به کمک چشمه و چاه (دوبلت) و سرعت عمودی ناشی از سرعت القایی گردابه‌های تولید شده با روش تصویر ارضاء می‌شود. شرط عدم لغزش روی سطح نیز با خلق ورتیسیتی روی مرز قابل ارضاء خواهد بود. اکنون به اختصار معادلات حاکم بر روش گردابه‌های تصادفی ذکر می‌گردد:

معادلات اساسی حاکم بر دینامیک یک سیال لزج تراکم ناپذیر دوبعدی با لزجت نیوتنی ثابت توسط معادلات بقای جرم و مومنتوم با شرایط مرزی و شرایط اولیه زیر مشخص می‌شود:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{U} \quad (2)$$

$$B.C. : \quad \vec{U} = 0 \quad \text{On boundary} \quad (3)$$

$$I.C. : \quad \vec{U} = 0 \quad \text{At } t = 0 \quad (4)$$

برای رهایی از ترمهای غیرخطی معادله ناویر-استوکس در روش گردابه‌های تصادفی از معادله انتقال ورتیسیتی استفاده می‌شود که با توجه به تعریف ورتیسیتی ($\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U}$) و با توجه به این مسئله که در حالت دو بعدی ورتیسیتی یک مقدار اسکالر است که توسط رابطه $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ تعریف می‌شود، با گرفتن کرل از معادله (۲) و با استفاده از معادله (۱) و با توجه به این نکته که کرل گرادیان فشار $\nabla \times \nabla P$ و دیورژانس سرعت صفر هستند لذا:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (5)$$

معادله (۵) بیان کننده انتقال ورتیسیتی طی دو مکانیزم جابجایی و نفوذ می‌باشد، که با فرض کوچک بودن گام زمانی این فرآیند انتقال را می‌توان به دو مکانیزم جداگانه تقسیم کرد و در یک بازه زمانی هر دو مکانیزم را بطور جداگانه در دو گام زمانی جزئی اعمال کرد.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{ترم جابجایی} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad \text{ترم نفوذ} \quad (7)$$

در گام جزئی اول انتقال ورتیسیتی توسط مکانیزم جابجایی صورت می‌گیرد که با حل معادله (۶) بدست می‌آید و بصورت جابجایی لاگرانژی تعداد زیادی از المانهای ورتکس محدود که در واقع توزیع ω هستند قابل بیان می‌باشد و در گام جزئی دوم حل معادله (۷) بوسیله جابجایی تصادفی همان المانهای ورتکس بر اساس یک متغیر تصادفی گوسی بدست می‌آید (واریانس $\sqrt{\frac{2t}{\text{Re}}}$) و شرایط مرزی مسئله توسط اضافه کردن یک میدان سرعت پتانسیل در گام جابجایی و ایجاد المانهای ورتکس اضافی برای ارضای شرط عدم لغزش در گام نفوذ ارضاء می‌شوند.

تغییر مکان کلی گردابه‌ها تحت مکانیزم جابجایی و نفوذ در انتهای هر گام زمانی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + \sum_{j=1}^n u_j dt + \eta_x \\ y(t + \Delta t) = y(t) + \sum_{j=1}^n v_j dt + \eta_y \end{cases} \quad (8)$$

در معادله فوق η_x, η_y ناشی از حل قسمت نفوذ می‌باشند که در نزدیک سطح جسم (لایه مرزی) چون تغییرات در جهت y شدیدتر از جهت x می‌باشد از η_x صرفنظر می‌شود و مقادیر سرعت طبق روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} u_i = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij} \cdot \sigma} \\ v_i = +\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij} \cdot \sigma} \end{cases} \quad (9)$$

که در آن x, y مکان گردابه‌ها، r_{ij} فواصل مراکز گردابه‌ها نسبت به یکدیگر و σ شعاع هسته گردابه می‌باشند. تا فاصله Δs از استوانه گردابه‌ها بصورت صفحه‌ای هستند و خارج از این ناحیه گردابه‌ها بصورت حبابی در نظر گرفته می‌شوند. یعنی هر گردابه حبابی توسط یک گردابه صفحه‌ای با طول S تولید می‌شود، لذا مقدار قدرت گردابه‌های حبابی برابر $\Gamma_i = u_i S$ و میزان قدرت گردابه‌های صفحه‌ای برابر Γ_i / S خواهد بود. اگر گردابه‌ها از سیال بسمت مرزها حرکت کنند و از میدان حل خارج شوند حذف می‌شوند، همچنین اگر گردابه‌ای داخل جسم واقع شود، هم می‌توان آنرا طبق روش تصویری (Method of image) به موقعیت تصویری خود به داخل میدان برگرداند و هم می‌توان آنرا حذف کرد. در قسمت نواحی دور از مرز برای صفر کردن سرعت عمودی روی مرز از روش تصویری استفاده شده است و u_i, v_i ثنی که شرط مرزی نرمال را در این حالت ارضاء کنند از روابط زیر بدست آورده می‌شوند.

$$u_i = u_{pi} + u_{wi} + u_{wi1} + u_{wi2} \quad (10)$$

$$v_i = v_{pi} + v_{wi} + v_{wi1} + v_{wi2} \quad (11)$$

که در آن u_{pi}, v_{pi} سرعت‌های پتانسیلی در نقطه i در جهت‌های x, y سرعت‌های القائی تمامی گردابه‌های حبابی واقع در نقطه j ، روی نقطه i در جهت‌های x, y سرعت‌های القائی تصاویر گردابه‌های حبابی واقع در نقطه a^2/r روی نقطه i در جهت‌های x, y سرعت‌های القائی تصاویر گردابه‌های حبابی واقع در مرکز سیلندر روی نقطه i در جهت‌های x, y . همه روابط سرعت در این ناحیه با روابطی شبیه (9) بدست می‌آیند [13].

۳- توروبولانس آزاد جریان و معادلات آن

در توروبولانس آزاد جریان، معادلات حاکم بر جریان بالا دست جسم همان معادلات حاکم بر توروبولانس در حالت کلی است با ذکر این نکته که در بررسی توروبولانس آزاد جریان، جریان بالا دست در ارتباط با عامل آشفتگی آن در نظر گرفته نمی‌شود و به توروبولانس تنها به عنوان خصوصیتی از جریان بالا دست جسم نگریسته می‌شود که کیفیت جریان با پارامتری تحت عنوان شدت توروبولانس، مشخص می‌شود.

۳-۱ معادلات جریان سیال در توروبولانس

برای در نظر گرفتن اثر اغتشاش در میدان جریان مرسوم است که آن را با نشان دادن مقادیر لحظه‌ای به صورت مجموع مقداری متوسط و مقدار نوسانی تابع زمان، اعمال نمایند. و از نظر ریاضی آن را به صورت $\phi(t) = \Phi + \phi'(t)$ می‌نویسند.

متوسط Φ مربوط به خاصیت جریان ϕ به صورت $\Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \phi(t) dt$ تعریف می‌شود. در یک جریان دائمی مقدار

متوسط زمانی ثابت است در حالی که در جریان غیر دائم تابعی از زمان می‌باشد. میانگین زمانی نوسانات خاصیت ϕ به

صورت $\overline{\phi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \phi'(t) dt = 0$ تعریف می‌شود. اطلاعات مربوط به نوسان بخشی از جریان از جذر متوسط مربع

نوسانات به صورت $\phi_{rms} = \sqrt{\overline{\phi'^2}} = \left(\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\phi')^2 dt \right)^{1/2}$ بدست می‌آید. اگر سرعت در هر نقطه از جریان را با

مشخص کنیم خواهیم داشت $\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0$ که u', v', w' نوسانات سرعت در سه راستا می‌باشند.

در این حالت انرژی جنبشی k (در واحد جرم) مربوط به آشفتگی از رابطه $k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ تعیین می‌شود و

شدت توربولانس به سرعت جریان متوسط مرجع به صورت $I_u = \frac{(2/3 k)^{1/2}}{U_{ref}}$ مرتبط می‌شود.

همانطور که گفته شد در یک جریان توربولانس کمیت های جریان را می‌توان به صورت مجموع یک مقدار متوسط و یک

نوسان وابسته به زمان نوشت. برای نمایش اثر نوسانات آشفتگی بر روی جریان متوسط، معادلات پیوستگی و اندازه حرکت را

همزمان برای جریان تراکم ناپذیر با لزجت ثابت بررسی می‌کنیم و با قرار دادن مجموع مولفه متوسط و نوسانی متغیرهای \vec{u}

و به کار بردن روابط میانگین زمانی، معادلات میانگین زمانی پیوستگی و اندازه حرکت نتیجه می‌شوند:

$$\text{div } \vec{U} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(U\vec{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div grad } U + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \quad (13 \text{ الف})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(V\vec{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div grad } V + \left[-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \quad (13 \text{ ب})$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(W\vec{U}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div grad } W + \left[-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right] \quad (13 \text{ ج})$$

عبارات سمت راست معادلات بالا، عبارات تنش اضافی اند و عبارت از سه تنش قائم و سه تنش برشی هستند.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\rho \overline{u'^2}; \tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2}; \tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\rho \overline{u'v'}; \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \overline{u'w'}; \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho \overline{v'w'} \end{aligned}$$

این تنش های اضافی، تنش های رینولدز نامیده می‌شوند و مجموعه معادلات (13) را «معادلات رینولدز» می‌نامند.

در بررسی توربولانس توجه بر کمیتهای متوسط مشخصی متمرکز می‌شود که همان تنش های رینولدز هستند که در عملکرد میانگین زمانی روی معادلات اندازه حرکت بدست آمدند.

۲-۳ تنشهای رینولدز در توربولانس آزاد جریان

همانطور که گفته شد از تنشهای رینولدز به عنوان کمیاتی متوسط برای بیان جریان توربولانس استفاده می‌شود. توربولانس آزاد جریان دارای ساختار ایزوتروپیک است. [۱۲] بنابراین در هر نقطه از جریان نوسانات سرعت u', v', w' از نظر مقداری از یک مرتبه می‌باشند. و بنابراین تمامی شش مقدار تنش رینولدز در یک عبارت خلاصه می‌شوند و بنابراین انرژی جنبشی k (در واحد جرم) به صورت $k = \frac{3}{2} \overline{u'^2} = \frac{3}{2} \overline{v'^2} = \frac{3}{2} \overline{w'^2}$ در می‌آید و اگر سرعت جریان متوسط مرجع در توربولانس آزاد جریان به صورت $U_{ref} = U_\infty$ تعریف شود شدت آشفتگی در هر نقطه به صورت $I_u = \frac{(2/3 k)^{1/2}}{U_{ref}} = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_\infty} = \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{U_\infty} = \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{U_\infty}$ خلاصه می‌شود. توربولانس آزاد جریان به دلیل عدم وجود شرط مرزی ناشی از وجود جسم خارجی، دارای ساختار همگن است و بنابراین در تمام نقاط جریان دارای یک شدت توربولانس هستیم. بر مبنای آنچه گفته شد ارضای شرایط آماری توربولانس آزاد جریان به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$u' = v' = w' = 0, \quad I_u = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_\infty} = \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{U_\infty} = \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{U_\infty} = const \quad (14)$$

۴-۴ مدل کردن توربولانس آزاد جریان به روش گردابه‌های تصادفی

یک مدل آشفتگی عبارت از یک رویه محاسباتی برای بستن سیستم معادلات جریان آشفته است. معادلات حاکم بر توربولانس معادلات میانگین زمانی اند (معادلات ۱۳)، و از این معادلات تنشهای رینولدز به عنوان کمیاتی متوسط برای بیان جریان توربولانس استخراج می‌شوند. در کاربرد این روابط برای توربولانس آزاد جریان، تنشهای رینولدز به یک عبارت تحت عنوان شدت توربولانس آزاد جریان خلاصه شدند. و برای ارضای شرایط آماری جریان همراه با توربولانس آزاد روابط (۱۴) باید بر جریان حاکم باشند. برای بدست آوردن مدل توربولانس آزاد، معادله انتقال ورتیسیتی در حالت بدون بعد به روش گردابه‌های تصادفی حل شده است. به این منظور جریان به صورت شبکه گسسته‌ای از ذرات دارای ورتیسیتی (حبابهای ورتکس) گسسته می‌شود که هر یک از این المانها دارای سیرکولاسیون محدود و مستقل Γ می‌باشند. در این روش حرکت‌های تصادفی تعدادی گردابه با دیدگاه لاگرانژی در قالب یک الگوریتم عددی تعقیب می‌شوند که قانون بیوساوار مبنای القای سرعت مرکز هر گردابه بر روی گردابه‌های دیگر است و حل جابجایی از آن نتیجه می‌شود. و تابع گرین نفوذ گردابه در اثر لزجت را می‌دهد. مدل بدست آمده ویژگیهای آماری توربولانس را به خوبی ارضا می‌کند.

۴-۱ تحلیل مساله و بدون بعد کردن آن

همانطور که گفته شد جریان سیال تراکم ناپذیر به صورت شبکه گسسته‌ای از ذرات دارای ورتیسیتی گسسته شد. پارامترهای فیزیکی دخیل در مساله عبارتند از:

$\Gamma \left(\frac{m^2}{sec} \right)$	قدرت گردابه	$U_\infty \left(\frac{m}{sec} \right)$	سرعت متوسط جریان آزاد
$\nu \left(\frac{m^2}{sec} \right)$	لزجت سینماتیکی	$\delta(m)$	شعاع هسته ورتکس

فرم بی بعد معادله انتقال ورتیستی در حالت کلی عبارت است از :

$$\frac{\omega_0 L_0}{V_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{\omega} = \frac{v_0}{L_0 V_0} \nabla^2 \bar{\omega} \quad (15)$$

با تعریف پارامترهای $L_0 = \delta$, $V_0 = U_\infty$, $\omega_0 = \frac{U_\infty}{\delta}$, $\bar{t} = \frac{t U_\infty}{\delta}$ فرم بی بعد معادله انتقال ورتیستی به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{\omega} = \frac{1}{\text{Re}_\delta} \nabla^2 \bar{\omega} \quad \& \quad \text{Re}_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu} \quad (16)$$

همانطور که در بخش (۲) آمده است این معادله بیانگر انتقال ورتیستی طی دو مکانیزم نفوذ وجابجایی است که رابطه (۹) بیانگر حل جابجایی است که با توجه به ابعاد مشخصه تعریف شده، صورت بدون بعد آن خواهد شد:

$$\bar{u}_i = -\frac{1}{2\pi} \sum \frac{\Gamma_j}{\delta U_\infty} \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{r_{ij}^2} - \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\Gamma_j}{\delta U_\infty} \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{r_{ij}} \quad (الف 17)$$

$$\bar{v}_i = \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\Gamma_j}{\delta U_\infty} \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{r_{ij}^2} + \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\Gamma_j}{\delta U_\infty} \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{r_{ij}} \quad (ب 17)$$

که از روابط فوق $\Gamma^* = \frac{\Gamma}{U_\infty \delta}$ را به عنوان Γ بدون بعد تعریف می کنیم.

همان طور که گفته شد حل نفوذ ناشی از جابجاییهای تصادفی المان های ورتکس بر اساس یک متغیر تصادفی گوسی ناشی از

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\frac{2t}{\text{Re}}}$ می باشد که با قرار دادن عدد رینولدز بر حسب طول مشخصه تعریف شده بر مبنای شعاع هسته ورتکس خواهیم داشت:

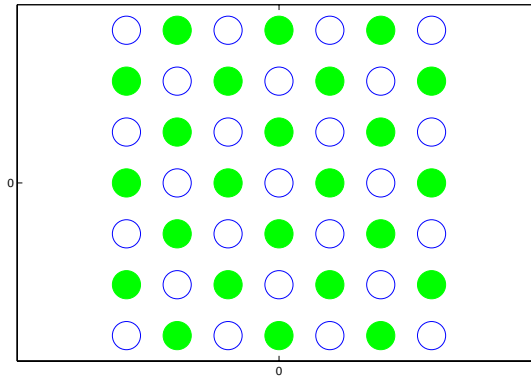
$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\Delta t}{\text{Re}_\delta}} = \sqrt{\frac{2\Delta t U_\infty}{U_\infty \delta / \nu}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{2\nu \Delta t}$$

که این انحراف معیار مبنای تولید اعداد تصادفی است و تغییر مکان کلی المانهای ورتکس در دو گام جزئی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \sum_{j=1}^n \bar{u}_j \Delta t + \eta_x \\ \bar{y}(t + \Delta t) = \bar{y}(t) + \sum_{j=1}^n \bar{v}_j \Delta t + \eta_y \end{cases} \quad (18)$$

۲-۴ مدل کردن مساله

در این مدل شبکه‌ای از ورتکسها با قدرتهای یکسان مثبت و منفی بصورت همگن و متقارن چیده شده‌اند به گونه‌ای که فاصله بین مراکز هر دو ورتکس مجاور یکسان است. این مجموعه ورتکس به عنوان بخشی از جریان در نظر گرفته می‌شود. شکل (۱) نمای نزدیکی از این آرایش را نشان می‌دهد که d ، فاصله هر دو ورتکس بصورت تابعی از انحراف معیار به صورت $d = 10\sigma_f$ تعریف می‌شود.



شکل (۱) آرایش اولیه ورتکسها

همانگونه که در شکل (۱) پیداست نوع آرایش یک در میانی ورتکسها از نظر علامت، به گونه‌ای است که در لحظه ابتدایی، با توجه به اینکه ورتکسهای مثبت و منفی قرار گیرنده در یک خط در خلاف جهت هم بر یک نقطه سرعت القا می‌کنند بنابراین سرعت در مرکز مربع صفر است. از آنجا که این مجموعه از ورتکسها به عنوان بخشی از جریان در نظر گرفته شده‌اند بنابراین محدوده اولیه آنها را می‌توان به عنوان یک حجم کنترل در نظر گرفت که پس از خارج شدن ورتکسها از آن توسط حرکت انتقالی ورتکسهای بعدی جانشین می‌شوند. پس به این دلیل و برای انجام عملیات محاسباتی بر روی تعداد محدودی ورتکس، با حذف سرعت متوسط جریان آزاد (U_∞) از خارج شدن ورتکسها از محدوده اولیه شان جلوگیری می‌کنیم و چون در جریان توربولانس ترم نفوذ از نظر مقیاس زمانی بر ترم جابجایی غلبه دارد می‌توان از ترم جابجایی صرف نظر کرده و تنها حل نفوذ را اعمال کرد. بنابراین رابطه (۱۸) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{cases} \bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \eta_x \\ \bar{y}(t + \Delta t) = \bar{y}(t) + \eta_y \end{cases} \quad (19)$$

در طول زمان آرایش ورتکسها بر اساس رابطه (۱۹) به هم می‌ریزد و ورتکسها در مرکز مربع به عنوان یک نقطه دلخواه از جریان بر اساس رابطه (۱۷) سرعتی القا می‌کنند که شدت توربولانس را نتیجه می‌دهد.

در این مدل شرایط مختلف توربولانس آزاد جریان با قدرت گردابه‌ها (Γ^*) برای القای سرعت و انحراف معیار (σ_f) برای ایجاد حرکت تصادفی گردابه‌ها به منظور نفوذ بر اثر لزجت، توصیف می‌شود. شکل (۲) یک حالت از این شرایط مختلف توربولانس آزاد را نشان داده است. ارضای شرایط آماری توربولانس در نمودارها کاملاً مشهود است. نمودار شدت توربولانس جریان بر حسب زمان برای سرعت‌های نوسانی در دو جهت مختلف می‌باشند که همان طور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت شدت‌های توربولانس به یک مقدار همگرا می‌شوند که ایزوتروپیک بودن میدان جریان را بیان می‌کنند و شدت توربولانس جریان را نتیجه می‌دهند.

در محاسبه شدت توربولانس تعداد ورتکس ها ۵۰۰۰ تا و برای بی بعد کردن مساله $U_{\infty} = 1$ فرض شده است. محدود انحراف معیار از ۰,۲ تا ۱ در نظر گرفته شده‌اند و به ورتکس ها قدرت بی بعد ۰,۱ تا ۱ داده می‌شود و حالات گوناگون جریان با توربولانس آزاد بدست آورده می‌شوند.

۳-۴ ارتباط خصوصیات فیزیکی جریان و شدت توربولانس

از آنجا که در مدل مورد نظر، آرایش ورتکسها یعنی محدوده قرارگیری آنها تنها تابعی از انحراف معیار است ($d = 10\sigma_f$) بنابراین در یک انحراف معیار خاص، ورتکسها با داشتن آرایش مکانی یکسان، می‌توانند Γ^* های مختلفی داشته باشند. از آنجا که طبق رابطه (۱۷) سرعت القاء شده در هر نقطه تنها تابعی از توزیع مکانی ورتکسها و قدرت ورتکس ها می‌باشد، با توجه به یکسان بودن توزیع مکانی در یک انحراف معیار معین، شدت توربولانس تنها تابعی از قدرت گردابه‌هاست و بین دو شدت توربولانس حاصله در دو Γ^* مختلف و در یک انحراف معیار یکسان رابطه $\frac{\Gamma_2^*}{\Gamma_1^*} = \frac{I_{u2}}{I_{u1}}$ برقرار است و خواهیم داشت: $\frac{I_u}{\Gamma^*} = f(\sigma_f)$ از اینرو می‌توان نتایج حاصل از حالات گوناگون جریان با توربولانس آزاد را با تقسیم بر قدرت بی بعد گردابه‌ها براساس رابطه بالا در شکل (۳) خلاصه کرد.

۵- استفاده از مدل توربولانس برای حل جریان همراه با توربولانس آزاد حول سیلندر استوانه‌ای

در حل جریان حول استوانه به روش گردابه‌های تصادفی چند پارامتر عددی وجود دارند که عبارتند از بازه زمانی (Δt)، شعاع هسته ورتکس (δ) و حداکثر قدرت گردابه‌ها (Γ_m) و نیز ضخامت لایه مرزی آرام (ds).

برای حل مساله استوانه در یک رینولدز مشخص و در یک شدت توربولانس خاص، طیف وسیعی از این داده‌ها را می‌توان به عنوان ورودی به کار برد، ولی همگی آنها به جواب مطلوب منجر نمی‌شود. مثلاً برای $Re_D = 1000$ اگر

($\Delta t = 0.1 \text{ sec}$; $\delta = 0.05 \text{ m}$; $\Delta s = \frac{0.037\pi}{\sqrt{Re}}$) فرض شوند، با تغییر Γ_m مقادیر ضریب درگ حاصله بسیار متفاوت

خواهند بود. ضریب درگ در $Re = 10^3$ برابر با $C_D = 1.11$ می‌باشد. برای $\Gamma_m = 0.25$ ، $C_D = 0.1$ برای $C_D = 0.3$ ، $\Gamma_m = 0.2$ و برای $C_D = 0.5$ ، $\Gamma_m = 0.1$ بدست می‌آیند. به همین ترتیب جواب مورد نظر نسبت به تغییر هر یک از داده‌های ورودی حساسیت دارد. با داشتن جواب $C_D = 1.11$ برای $Re = 10^3$ می‌توان با سعی و خطا، مقادیری را که منجر به جواب می‌شوند به دست آورد. ولی این سوال پیش می‌آید که اگر $C_D = 1.11$ در دسترس نباشد چگونه باید این مقادیر را حاصل کرد؟

به این منظور می‌توان از مدل توربولانس به دست آمده به عنوان یک روش منطقی برای بدست آوردن این پارامترها استفاده کرد. چرا که همان طور که در شکل (۳) نشان داده شده است این مدل بین پارامترهای فیزیکی حاکم بر جریان یعنی δ ، Γ_m و U_{∞} و شدت توربولانس آزاد جریان I_u ارتباط برقرار می‌کند و برای یک جریان همراه با توربولانس آزاد با یک شدت توربولانس خاص می‌تواند مجموعه‌ای از داده‌ها را که منجر به این شرایط می‌شود را بدست دهد. از این رو می‌توان در حل جریان حول اجسام مختلف اعم از سیلندر استوانه‌ای، سیلندر بیضوی، سیلندر مربعی و سایر اشکال دو بعدی به روش گردابه‌های تصادفی، با داشتن شدت توربولانس آزاد جریان مورد نظر کمیت‌های فیزیکی جریان را مشخص کرد و مساله مزبور را حل کرد.

در استفاده از مدل مورد نظر در حل توربولانس آزاد جریان، برای بی بعد کردن مساله $U_\infty = D = \rho = 1$ در نظر گرفته شده‌اند که در این صورت Re_D به صورت $Re_D = \frac{1}{\nu}$ در می‌آید و برای δ خواهیم داشت $\delta = \frac{1}{N}$ که N تعداد

تقسیمات دایره است از این رو شکل (۳) به صورت رابطه‌ای بین $\frac{I_u}{N\Gamma_m}$ و $N\sqrt{\frac{2\Delta t}{Re_D}}$ خلاصه می‌شود.

در یک Re_D مشخص و شدت توربولانس I_u معلوم باید با محاسبه $N, \Gamma_m, \Delta t$ مساله حل شود که برای استفاده از نمودار با تعیین کردن دو تا از این مقادیر دیگری بدست می‌آید.

در این تحقیق $\Delta t = 0.05 \text{ sec}$ قرار داده شده است و مقدار N طوری تعیین شده که $\sigma_f = N\sqrt{\frac{2\Delta t}{Re_D}}$ برابر با ۰,۲ شود

و از آنجا Γ_m بدست می‌آید که برای شدت توربولانس ۰,۴ تا ۰,۶ مقدار N از ۳۰ تا ۵۸ به ترتیب برای Re_D از ۲۰۰۰ تا ۸۰۰۰ تغییر می‌کند و Γ_m دارای مقادیر ۰,۰۵ و ۰,۰۶۴ و ۰,۰۷۵ و ۰,۰۸۵ به ترتیب برای شدت های توربولانس ۰,۴ و ۰,۵ و ۰,۶ می‌باشد.

۶- نتایج و جمع بندی

شکل (۴) یک نمونه از نتایج بدست آمده برای ضرایب درگ ولیفت است که از مدل توربولانس آزاد در طول زمان برای اعداد رینولدز مختلف در شدت های گوناگون توربولانس آزاد بدست آمده است که همگرایی مقادیر درگ با گذشت زمان در این شکل کاملاً مشهود است.

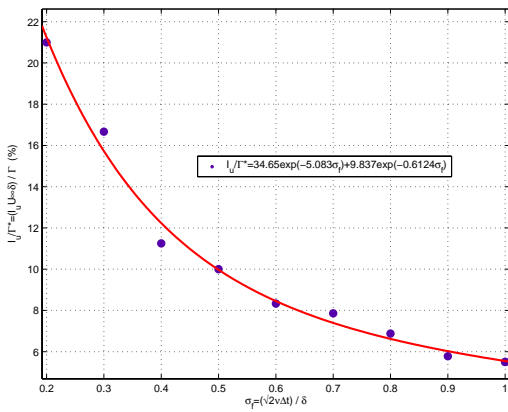
شکل (۵) ضرایب درگ ولیفت محاسبه شده از مدل توربولانس آزاد را، با نتایج تجربی بدست آمده توسط کو و گراف [۱۰] در شدت های توربولانس پایین تر از ۱۰٪ مقایسه می‌کند که در شکل (۶) این مقایسه در مورد ضریب درگ و شدت توربولانس انجام شده است و همانگونه که ملاحظه می‌شود تطابق خوبی بین این جواب ها به لحاظ محدوده قرارگیری وجود دارد و از لحاظ مقدار متوسط تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.

۷- مراجع

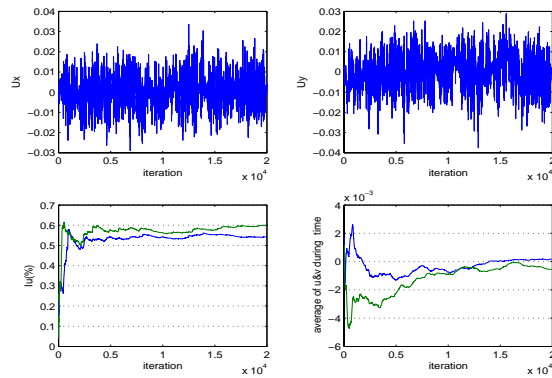
- [1] Chorin, A.J.: Numerical study of slightly viscous flow; J.Fluid Mech. Vol.57 (1973), 785-796
- [2] Cheer, A.Y., "A Study of Incompressible 2-D Vortex Flow Past a Circular Cylinder", SIAM, J.Sci. Comp., Vol.4. pp.685-705, 1983
- [3] Cheer, A.Y., "Unsteady Separated Wake Behind an Impulsively Started Cylinder in Slightly Viscous Fluid", J.Fluid Mech., Vol.201, pp.485-505, 1989
- [4] Kondjoyan, A. Peneau, F and Boisson, H.C., "Effect of high free stream turbulence on heat transfer between plate and air flows: A review of existing experimental results", Int.J.Therm.Sci. 41 page 1-16, 2002
- [5] E.P.Dyban and E.Ya.Epick, "Transferts de Chaleur et Hydrodynamique Dans Les Ecoulements Randus Turbulence", Monographie Traduite du Russe a l'I.N.R.A (traduction N.Zuzine, revision A.Kondjoyan) disponible au laboratoire, 1985
- [6] E.P.Dyban, E.Ya.Epick and T.T.Surpun, "Characteristics of the laminar layer with increased turbulence of the outer stream", International Chemical engineering, 17(3):501-504 July 1977
- [7] Satapathy, B., "Turbulence effects on the drag of three-Dimensional Bodies in Mid stream", Ph.D.Thesis, Univ.of Roorke, Roorkee, 1980
- [8] Einstein, H.A. and EL-samni. "Hydrodynamic forces on a rough waal". Rev of modern physics. Vol 21, No.3, July 1949

- [9] Ko,S.C. and W.H.Graf, “Darg coefficient and turbulence characteristics”, Proc. of 14th Congress of IAHR, Paris (France), Vol 2,1971
- [10] Ko,S.C. and W.H.Graf, “Darg coefficient of cylinders in turbulent flow”, JHD,Proc.ASCE,Vol 98 ,No HY-5,1972
- [11] Cheng.E.D.H and C.G.Clyde, ”Instantaneous hydrodynamic lift and drag forces on large roughness elements in turbulent open channel flow “ ,Sedimentation Symposium to Honour Einstein.(Ed.)H.W.Shen, Fort Collins(USA),1972
- [12] Garde, R.J., “Turbulent Flow “, New Age International (P) Ltd. Publishers, 2000
- [13] Jafari, M.M.,”Analysis of Flow over Two Dimensional Bodies Near the Free Surface Using Random Vortex Method”,M.Sc. Thesis,Department of Mechanical Eng. , Iran University of Science and Technology,2002 (in Farsi)
- [14] Versteeg, H.K. and Malalasekera, W, “An Introduction to Computetional Fluid Dynamics: The Finite Volume Method” McGraw-Hill Inc., 1995
- [15] F.P'eneau,H.C.Boisson, and N.Djilali. ”Large eddy simulation of the influence of high free-stream turbulence on spatially evolving boundary layer”, Int .J.of Heat and Fluid Flow,21:640-647,2000
- [16] F.P'eneau,H.C.Boisson, A.Kondjoyan and N.Djilali. ”Structure of flat plate boundary layer subjected to free-stream turbulence”, Int .J.of Computational Fluid Dynamics,18(2):1-14,February 2004
- [17] F.P'eneau,D.Legendre, J.Magnaudet, and H.C.Boisson ” Large eddy simulation of a spatially growing boundary layer using a dynamic mixed subgrid-scale model”,Symposium ERCOFTAC on Direct and Large-Eddy Simulation, Cambridge May 1999,12-14 may 1999

۸- شکل‌ها

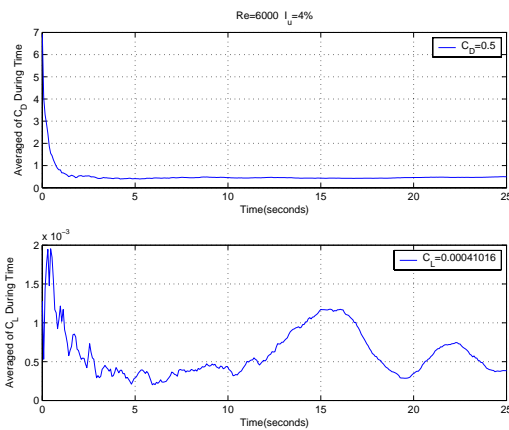


شکل (۳) ارتباط بین خصوصیات فیزیکی جریان سیال تراکم ناپذیر و شدت توربولانس

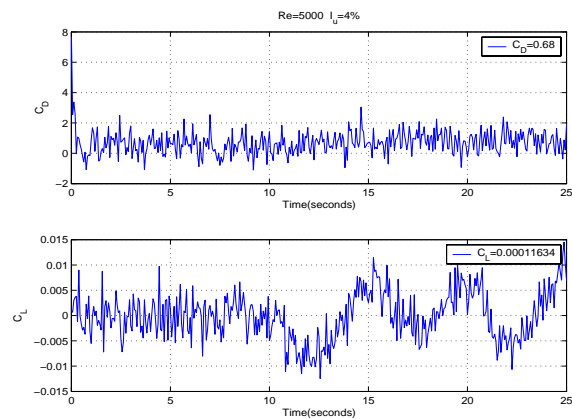


شکل (۲) سرعت، سرعت متوسط و شدت توربولانس برای

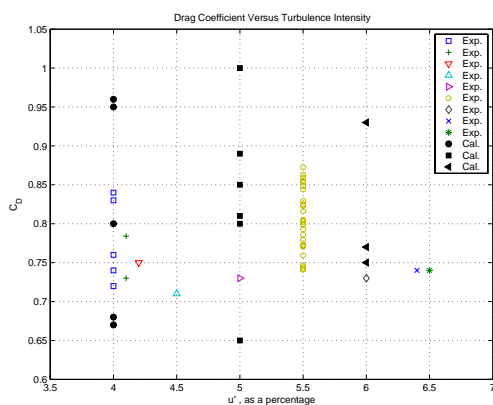
$$\Gamma^* = 0.1, \sigma_f = 1$$



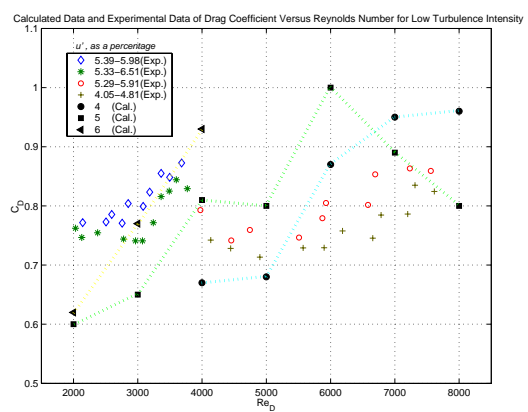
شکل (ب) ضرایب برآ و پسآ در طول زمان



شکل (الف) تغییرات ضرایب برآ و پسآ در طول زمان



شکل (۶) مقایسه ضرایب درگ در مقابل شدت های توربولانس، برای نتایج محاسباتی و اطلاعات آزمایشگاهی برای اعداد رینولدز از ۲۰۰۰ تا ۸۰۰۰



شکل (۵) مقایسه ضرایب درگ در مقابل عدد رینولدز برای شدت های توربولانس پائین، برای نتایج محاسباتی و اطلاعات آزمایشگاهی