

تحلیل و شبیه‌سازی عددی اندرکنش شوک و اختلالات جریانی

محمّد جان‌بزرگی*

کارشناس ارشد هوافضا

دانشکده مهندسی هوافضا - دانشگاه صنعتی شریف

محمّد فرشچی*

دانشیار مهندسی هوافضا

دانشکده مهندسی هوافضا - دانشگاه صنعتی شریف

* تهران، خیابان آزادی، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا، صندوق پستی: ۱۱۳۶۵-۸۶۳۹

چکیده در این مقاله به بررسی اندرکنش شوک و امواج اختلالی آکوستیک و ورتیسیتی می‌پردازیم. معادلات مورد استفاده معادلات اویلر می‌باشند که با استفاده از روش صریح مک‌کورمک حل می‌شوند. روش دستیابی به ساختار و محل شوک در میدان جریان از نوع برازش شوک است که در مقایسه با روش تسخیر شوک سبب حذف نوسانات ناشی از حل عددی می‌گردد. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی با تئوری خطی نشانگر معتبر بودن تئوری خطی در محدوده وسیعی از اعداد ماخ و دامنه امواج می‌باشد. تنها مورد عدم توافق نتایج شبیه‌سازی و تئوری، زاویه برخورد حوالی زاویه بحرانی است. در این شرایط، همگرایی نتیجه شبیه‌سازی به پیش‌بینی تئوری خطی در زمان به‌صورت مجانبی خواهد بود که نیازمند انجام شبیه‌سازی در زمان‌های طولانی مدت است.

واژه‌های کلیدی: شوک (موج ضربه‌ای) - اختلالات جریانی - زاویه بحرانی - برازش شوک

۱ مقدمه

اکنون بیش از نیم قرن است که از انتشار مقالات بنیادین در زمینه اندرکنش شوک و توربولانس می‌گذرد [۱، ۲، ۳]. ولی این مسأله همچنان از مباحث مورد علاقه محققین جریان‌های مافوق صوت است. در حقیقت وقوع این اندرکنش در مسایل مرتبط با جریان‌های مافوق صوت امری کاملاً طبیعی است. پیچیدگی بسیار زیاد آن از نظر تئوری از یک سو و کاربردهای فراوان آن در مواردی از قبیل افزایش سطح اختلاط و در نتیجه افزایش راندمان احتراق در یک محفظه احتراق مافوق صوت [۴]، کنترل نیروهای ناپایدار کننده حاصل از اندرکنش توربولانس‌های جوی با شوک‌های تشکیل شده روی بال یک هواپیمای گذر صوتی یا مافوق صوت، تولید صدا در اثر اندرکنش شوک‌های تشکیل شده در دهانه یک نازل فرا-انبساطی و نیز علاقه مجدد صنایع به پروازهای مسافرتی مافوق صوت با استانداردهای صوتی از سوی دیگر سبب بازگشایی همه جانبه تحقیقات در این زمینه شده است.

کوازنی [۵] اختلالات یک میدان جریان تراکم‌پذیر را به سه مود متفاوت آکوستیک، ورتیسیتی و آنتروپی تقسیم‌بندی می‌کند. این مودها در حالت کلی به‌طور کاملاً غیرخطی با یکدیگر کوپل شده‌اند. لیکن در شرایطی که انرژی جنبشی موجود در آشفتگی در مقایسه با انرژی جنبشی جریان پایه به‌اندازه کافی کوچک باشد، مجزا بودن دینامیکی این مودها فرض قابل قبولی در ساده‌سازی تئوری آشفتگی است. همچنین درحالتیکه اختلالات فشاری موجود در آشفتگی نسبت به جهش فشار متوسط در عرض شوک مقدار ناچیزی باشد، می‌توان از معادلات خطی شده رانکین-هوگونیوت برای بررسی مسأله اندرکنش شوک و آشفتگی استفاده نمود. بدیهی است این نوع برخورد سبب کسب درک مفدماتی نسبت به مکانیزم‌های اصلی و رخدادهای کلان مرتبط با این مسأله می‌گردد.

تقسیم یک میدان آشفتته به مودهای دینامیکی مجزا، امکان بررسی دقیق نحوه پاسخگویی جریان آرام به این امواج

اختلالی و پیامدهای ویژه مرتبط با هر یک را تحت فرآیند پذیرش^۱ فراهم می‌کند. یکی از مزایای این نوع برخورد با میدان‌های اختلالی، واقعی‌تر نمودن پیش‌بینی مکان وقوع گذرش جریان آرام به آشفته در لایه‌های مرزی مافوق صوت است که نیازمند دانش کافی نسبت به سطح اختلالات تولید شده در لایه شوک (ناحیه بین جسم و شوک) بعلت عبور یک مود اختلالی از درون شوک می‌باشد. به‌طور قطع افزایشی به میزان حدود ۴۰ برابر سطح اولیه اختلالات فشاری در عبور مود آکوستیک از درون شوک در یک جریان ماوراءصوت با عدد ماخ ۸ اثرات بسیار تعیین کننده‌ای بر مکان وقوع گذرش و نهایتاً در پیش‌بینی نیروی درگ تولید شده خواهد داشت. در این مقاله مطالعه تغییر ایجاد شده در سطح امواج اختلالی در عبور از درون شوک موردنظر بوده است.

در ادامه، ابتدا فرمولبندی مسأله را در یک رویکرد عددی ذکر خواهیم کرد و سپس به معرفی مختصر تئوری خطی و پارامترهای کلیدی آن می‌پردازیم. در نهایت به بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی در مقایسه با نتایج تئوری خطی خواهیم پرداخت.

۲ شبیه‌سازی عددی اندرکنش شوک و آشفتگی

از آنجا که انجام مطالعات آزمایشگاهی جهت تعیین مکانیزم‌های فیزیکی حاکم بر اندرکنش شوک و یک جریان آشفته به‌دلیل پیچیدگی بسیار زیاد موجود در فیزیک آن کار فوق‌العاده مشکلی است، می‌توان از شبیه‌سازی‌های عددی در این راستا سود جست. همچنین با توجه به سختی فراوان و نیز نیاز به شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی برای مدل کردن مسأله به‌طور واقعی، عموماً این مسأله را در قالب اندرکنش آشفتگی با شوک در یک جریان ایده‌آل درنظر می‌گیرند. حذف اثرات ویسکوزیته چندان خودنمایی نمی‌کند زیرا هدف اصلی فهم دلیل رشد انرژی جنبشی توربولانس در عبور از شوک است. در مرجع [۵] می‌توان تخمینی از اهمیت این اثرات را یافت.

۲.۱ مسأله نمونه

مسأله‌ای که برای انجام شبیه‌سازی انتخاب شده دربرگیرنده یک شوک عمودی است که در یک محیط کاملاً ساکن و یکنواخت در جهت مثبت محور x ها حال انتشار می‌باشد. چنانچه شرایط اولیه را سازگار با شرایط جهش در عبور از شوک انتخاب کنیم، این حرکت بدون هیچ تغییری ادامه خواهد یافت. حال چنانچه در لحظات بعد و در سمت راست شوک یکی از سه خانواده اختلالی شناخته شده را در جریان بالادست شوک قرار دهیم، اندرکنش آنها با شوک سبب بوجود آمدن تغییراتی در پروفیل شوک و در نتیجه جریان بعد از آن می‌شود، شکل (۱). جبهه شوک را با $x_{sh}(y, t)$ و عدد ماخ آن را با M_{sh} نشان می‌دهیم. با بکارگیری حل عددی معادلات غیرخطی اویلر در ناحیه بعد از شوک و یک مرز پایین دست، تغییرات بوجود آمده در ساختار شوک و نیز امواج عبوری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نتیجه، میدان جریان بعد از یک شوک عمودی در حال حرکت در جهت مثبت محور x از دیدگاه یک ناظر ساکن در مختصات آزمایشگاه مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

۲.۲ معادلات حاکم

معادلات اویلر در یک جریان آیزنتروپیک به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

که در آن فشار و چگالی را با کمیت‌های متناظر در جریان بالادست شوک و سرعت‌ها را با جذر حاصل تقسیم فشار و چگالی جریان آزاد بدون بعد نموده‌ایم. همچنین ابعاد مکانی را نسبت به یک طول مرجع و زمان را با حاصل تقسیم طول مرجع به سرعت بدون بعد نموده‌ایم. این معادلات را به منظور تعیین حالت جریان در میدان بعد از موج ضربه‌ای حل می‌کنیم که با توجه به تغییر شکل شوک در طول اندرکنش می‌بایست روی شبکه یکنواخت محاسباتی حل شوند. میدان فیزیکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_L \leq x \leq x_{sh}(y, t), \quad 0 \leq y \leq y_p, \quad 0 \leq t$$

که در آن x_L مرز محاسباتی سمت چپ و y_u مرز بالای میدان در راستای y می‌باشد. برای تبدیل معادلات به فضای محاسباتی از توابع تبدیل جبری زیر استفاده می‌کنیم:

$$\xi = \frac{x - x_L}{x_{sh}(y, t) - x_L}, \quad \eta = \frac{y}{y_p}, \quad \tau = t \quad (2)$$

که مولد ناحیه محاسباتی یکنواخت زیر می‌باشد:

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau \geq 0$$

همچنین معادلات حرکت ضمن این تبدیل به صورت زیر درخواهند آمد:

$$Q_\tau + BQ_\xi + CQ_\eta = 0 \quad (3)$$

که در آن:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} U & \rho \xi_x & \rho \xi_y & 0 \\ 0 & U & 0 & \xi_x \\ 0 & 0 & U & \xi_y \\ 0 & \gamma p \xi_x & \gamma p \xi_y & U \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} V & \rho \eta_x & \rho \eta_y & 0 \\ 0 & V & 0 & \eta_x \\ 0 & 0 & V & \eta_y \\ 0 & \gamma p \eta_x & \gamma p \eta_y & V \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$U = \xi_t + u \xi_x + v \xi_y, \quad V = \eta_t + u \eta_x + v \eta_y$$

مولفه‌های سرعت ناوردا می‌باشند.

۳ روش عددی و شرایط مرزی

برای تقریب مشتقات موجود در دستگاه معادلات (۳) از روش دو مرحله‌ای و مرتبه دوم مک‌کورمک استفاده می‌کنیم. فرمولبندی انتخاب شده از نوع صریح است و لذا برای داشتن یک حل پایدار می‌بایست شرط CFL را ارضاء نماید. در مرحله پیش‌بینی از تقریب تفاضل پیش‌رو و در مرحله تصحیح از تقریب تفاضل پس‌رو استفاده می‌کنیم. شبکه تفاضل محدود در میدان محاسباتی ثابت است درحالی‌که شبکه فیزیکی در جهت محور x در حال کشیده شدن می‌باشد. بنابراین

شبهه در هر گام زمانی درشت‌تر و دقت حل در حال کاهش است. خوشبختانه در مدت زمان‌های کوتاه اطلاعات موردنیاز را می‌توان از حل به‌دست آمده استخراج نمود.

شرایط مرزی میدان جریان به شرح زیر تعیین شده‌اند. مرزهای میدان در جهت y را متناوب در نظر می‌گیریم که y_p بیانگر دوره تناوب آن می‌باشد. در جهت x ، بسته به آنکه سرعت شوک در جریان چقدر باشد، جریان در مرز سمت چپ ($x = x_L$) می‌تواند مادون صوت یا مافوق صوت باشد. چنانچه عدد ماخ انتشار شوک $M_{sh} \geq 2.068$ باشد جریان جرم القایی در این مرز مافوق صوت می‌باشد و بنابراین مانند یک مرز ورودی مافوق صوت با آن برخورد می‌کنیم. برای مقادیر کمتر از این حد، مرز سمت چپ مادون صوت می‌باشد و بنابراین یکی از مشخصه‌های جریان از سمت میدان جریان به طرف این مرز حرکت خواهد نمود. در این شرایط، در صورت عدم استفاده از شرایط مرزی غیر بازتابشی، در اولین زمانی که اختلالات به مرز پایین دست می‌رسند پیرو مرجع [۶] می‌توان محاسبات را متوقف نمود.

مرز شوک در واقع مشکل‌ترین و حساس‌ترین بخش از شرایط مرزی را تشکیل می‌دهد. روش مورد استفاده روش برازش شوک می‌باشد که از نوسانات ذاتی موجود در روش‌های تسخیر شوک اجتناب نموده و شوک را همانند یک ناپیوستگی ریاضی (سازگار باحل معادلات اویلر) مدل می‌کند. از آنجا که عدد ماخ انتشار شوک در یک جریان ساکن الزاماً مافوق صوت است این مرز مانند یک ورودی مافوق صوت می‌باشد. مجموعه روابط رانکین-هوگونیوت تعیین کننده شرایط در این مرز می‌باشند. از آنجا که این روابط در جهت عمود بر شوک و نسبت به آن صادقند، لذا بردار سرعت جریان نسبت به شوک را در جهت عمود و مماس بر شوک باید بیان نمود. با فرض آنکه شوک در جهت جریان اصلی، x ، در حرکت است، می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_{sh} = u_{sh}\hat{i} + v_{sh}\hat{j}$$

با بیان این سرعت در جهات عمود و مماس بر شوک خواهیم داشت:

$$\vec{V}_{sh} = V_{n_{sh}}\hat{n} + V_{t_{sh}}\hat{t}$$

که در آن $\hat{n} = (n_x, n_y)$ بردار نرمال شوک و \hat{t} نیز بردار مماس بر شوک می‌باشند. به‌منظور استفاده در روابط رانکین - هوگونیوت، سرعت جریان نسبت به شوک به‌صورت زیر قابل بیان است (شکل (۲)):

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{sh} = V_n\hat{n} + V_t\hat{t}$$

که در آن V_n و V_t به‌ترتیب بیانگر سرعت‌های عمود و مماس بر شوک نسبت به شوک هستند. این سرعت‌های نسبی در جریان‌های بالادست و پایین دست شوک به‌ترتیب با اندیس‌های "۱" و "۲" بیان می‌شود. مؤلفه این سرعت در جهت عمود بر شوک برابر است با:

$$V_n = \vec{V}_r \cdot \hat{n} = \vec{V} \cdot \hat{n} - V_{sh} \cdot \hat{n} = \vec{V} \cdot \hat{n} - V_{n_{sh}}$$

به این ترتیب روابط رانکین - هوگونیوت به‌عنوان شرایط مرزی حاکم بر شوک (مرز سمت راست میدان) به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشند [۹]:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{V_{n_1}}{V_{n_2}}\rho_1, & V_{n_2} &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_{n_1} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_1}{\rho_1 V_{n_1}}, & p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\left(\rho_1 V_{n_1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}p_1\right) \\ u_2 &= u_1 + (V_{n_2} - V_{n_1})n_x, & v_2 &= v_1 + (V_{n_2} - V_{n_1})n_y \end{aligned} \quad (4)$$

از آنجا که این روابط نسبت به شوک اعمال می‌شوند، سرعت شوک را به‌عنوان یک کمیت معلوم نیاز دارند. لذا برای بستن روابط (۴) می‌بایست معادله حاکم بر سرعت شوک را نیز به‌دست آورد. این معادله، معادله سازگاری مربوط به مشخصه‌ای است که در جریان پایین دست شوک به‌سمت آن برمی‌گردد، مشخصه $u + c$ ، و به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial t} + \rho_2 c_2 \hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t}\right) + (\gamma p_2 \nabla \cdot \vec{V}_2 + c_2 \hat{n} \cdot \nabla p_2) = -\rho_2 c_2 \hat{n} \cdot (\vec{V}_2 \cdot \nabla \vec{V}_2) - \vec{V}_2 \cdot \nabla p_2 \quad (5)$$

که در آن c سرعت صوت است.

اکنون با جایگذاری مشتقات زمانی فشار و سرعت از روابط رانکین - هوگونیوت (روابط (۴)) در معادله سازگاری (معادله (۵)) و مرتب‌سازی آن برحسب سرعت شوک معادله موردنظر به صورت زیر به دست می‌آید [۷،۹]:

$$\frac{\partial V_{n_{sh}}}{\partial t} = \frac{-R + (D + \rho_2 c_2 A)(\mathbf{n} \cdot \vec{V}_1)_t - \rho_2 c_2 \vec{V}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_t + (E + \rho_2 c_2 B)p_{1,t} + (F + \rho_2 c_2 C)\rho_{1,t}}{D - \rho_2 c_2 (1 - A)} \quad (6)$$

که در آن

$$A = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_1}{\rho_1 V_{n_1}^2}, \quad B = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{\rho_1 V_{n_1}^2}, \quad C = -B \frac{p_1}{\rho_1},$$

$$D = \frac{\rho_1 V_{n_1}}{\gamma + 1}, \quad E = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad F = \frac{\gamma V_{n_1}^2}{\gamma + 1}$$

و

$$R = -\rho_2 c_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\vec{V}_2 \cdot \nabla \vec{V}_2 + \frac{\nabla p_2}{\rho_2} \right) - (\vec{V}_2 \cdot \nabla p_2 + \gamma p_2 \nabla \cdot \vec{V}_2)$$

پس از انتگرالگیری از معادله (۶) و تعیین سرعت عمودی شوک و با فرض اینکه سرعت شوک اساساً در جهت عمود بر مرز چپ میدان است، یعنی $v_{sh} = 0$ ، می‌توانیم بنویسیم:

$$V_{n_{sh}} = \frac{u_{sh}}{n_x}$$

سرانجام موقعیت شوک را می‌توان با انتگرالگیری از رابطه زیر به دست آورد:

$$\frac{dx_{sh}(y, t)}{dt} = u_{sh}(y, t)$$

۴ مروری بر تئوری اندرکنش خطی

شرط لازم و کافی برای اعتبار تئوری خطی آن است که انرژی موجود در میدان اختلالی به اندازه‌ای ناچیز باشد که انتقال انرژی از این میدان به میدان جریان پایه سبب بوجود آمدن تغییرات قابل ملاحظه‌ای در جریان پایه نشود. به بیان دیگر، اثرات غیرخطی ناشی از پدیده جابجایی می‌بایست در مقابل پدیده‌هایی همچون اثر گرادیان فشار در انتقال ممتوم قابل صرفنظر باشند. حذف جمله جابجایی از معادلات حاکم سبب حذف اثرات ناشی از اندرکنش‌های غیرخطی موجود در ساختار آشفتگی و حذف همبستگی‌های ناشی از این اندرکنش‌ها می‌شود.

اندرکنش خطی را به ساده‌ترین بیان می‌توان با استفاده از شکل (۳) توضیح داد. در این شکل یک جریان مافوق صوت از راست به چپ از شوک عبور نموده و در پایین دست، یک جریان مادون صوت از شوک دور می‌شود. اندیس‌های "۱" و "۲" به ترتیب بیانگر جریان‌های بالادست و پایین دست شوک می‌باشند. در هر ناحیه معادلات خطی شده‌ی اوپلر با فرض موجی بودن اختلالات کوچک دارای جواب‌هایی به شکل زیر است:

$$A' e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (7)$$

که در آن A' اندازه موج، \vec{k} بردار عدد موج و ω بیانگر فرکانس زاویه‌ای موج می‌باشند. حل معادلات خطی شده اوپلر برای امواج اختلالی با تابع شکل ارایه شده در رابطه (۷)، سه خانواده اختلالی زیر را نتیجه می‌دهد [۹]:

۱. امواج آکوستیکی:

$$s' = 0, \quad p' = A'_p, \quad (u', v') = \frac{A'_p}{\rho c |\vec{k}|} (k_x, k_y), \quad \rho' = \frac{A'_p}{c^2}, \quad \omega - \vec{V} \cdot \vec{k} = \pm c |\vec{k}| \quad (8)$$

۲. امواج ورتیستی:

$$s' = p' = \rho' = 0, \quad (u', v') = \frac{A'_v}{p |\vec{k}|} (-k_y, k_x), \quad \omega - \vec{V} \cdot \vec{k} = 0 \quad (9)$$

۳. امواج آتروپی:

$$p' = (u', v') = 0, \quad s' \neq 0, \quad \rho' = \frac{\partial \rho}{\partial s} s', \quad \omega - \vec{V} \cdot \vec{k} = 0 \quad (10)$$

با استفاده از روابط (۱۰) - (۸) می‌توان دریافت که، با فرض اختلالات کوچک، اختلالات فشار کاملاً از نوع آکوستیکی است حال آنکه اختلالات سرعت، بنابر قضیه هلمهولتز [۱۰]، دارای دو ماهیت متفاوت است: بخش تراکم‌پذیر و کاملاً غیرچرخشی آن از نوع آکوستیکی است و بخش چرخشی و کاملاً تراکم‌ناپذیر آن در خانواده اختلالات ورتیستی جای می‌گیرد. اختلالات چگالی نیز دارای دو ماهیت متفاوت است: بخشی که ناشی از تغییرات فشار در میدان است، یا به عبارت دیگر ناشی از اثرات تراکم‌پذیری است، از نوع آکوستیک است و بخشی که در اثر تغییرات درجه حرارت در فشار ثابت است از نوع آتروپی است. این بخش بیانگر تغییرات چگالی در نتیجه اثرات شناوری یا آزادسازی حرارت در سیستم در قالب احتراق در اعداد ماخ پایین است.

تئوری خطی نشان می‌دهد که عبور هر یک از این سه خانواده اختلالی از درون شوک سبب تولید خانواده‌های اختلالی دیگر می‌شود که موج عبوری به دلیل تغییر شرایط ترمودینامیکی در جریان بعد از موج ضربه‌ای، تحت زاویه‌ای متفاوت با زاویه تابش منتشر خواهد شد. کوپلینگ بین خانواده‌های اختلالی در عبور از شوک به دلیل وجود گرادیان شدید موجود در جریان پایه در عرض موج ضربه‌ای است که اساساً با عوامل غیرخطی تولید کننده این کوپلینگ متفاوت است. این کوپلینگ در عبور از جبهه شعله، به عنوان سطحی با گرادیان شدید چگالی و نیز در یک جریان برشی با گرادیان قابل ملاحظه در جریان پایه نیز اتفاق می‌افتد. این درحالی است که این جریان‌ها می‌توانند جریان‌هایی خطی باشند. بنابراین، تئوری خطی بلافاصله سه مکانیزم زیر را برای تولید مود ورتیستی (به عنوان نماینده‌ای از میدان آشفتگی) تعیین می‌کند: ۱- تقویت و عبور آشفتگی (مود ورتیستی) از درون شوک ۲- تولید مود ورتیستی در میدان بعد از موج ضربه‌ای در اثر پردازش اختلالات آکوستیکی و آتروپی و ۳- پمپ کردن مود ورتیستی از جریان متوسط غیراختلالی در اثر حرکت نوسانی شوک تحت یک عامل خارجی [۳]. در شکل (۳) زاویه تابشی برابر θ_1 و زاویه موج آکوستیک تولیدی یا عبوری در جریان بعد از شوک برابر θ_2 و در مورد امواج آتروپی و ورتیستی برابر θ_3 می‌باشد.

به ازای هر موج در جریان بالادست یک زاویه برخورد بحرانی وجود دارد که به ازای مقادیر بیش از آن، زاویه شکست موج آکوستیکی در جریان بعد از شوک مقدار موهومی خواهد بود. این زاویه، زاویه بحرانی نامیده می‌شود. از آنجا که مقادیر بیش از این زاویه در این مقاله مدنظر نیستند، خواننده علاقمند را به مرجع [۲] رجوع می‌دهیم.

مهمترین فرضیات بکار گرفته شده در تئوری خطی عبارتند از پیوستگی فرکانس زاویه‌ای و پیوستگی مؤلفه مماس بر شوک بردار عدد موج، k_y ، در عبور از شوک. این فرضیات را با فرض کوچک بودن اعوجاج شکل شوک می‌توان در صفحه شوک غیراختلالی اعمال نمود. واضح است که با افزایش میزان اعوجاج سطح شوک در نتیجه افزایش دامنه امواج اختلالی یا کاهش قدرت شوک فرض اعمال در این صفحه فرض قابل قبولی نخواهد بود.

نتایج کلیدی حاصل از تئوری خطی در واقع ضرایب تولید و تقویت‌اند که به صورت زیر برای امواج آکوستیک و ورتیستی برخوردی ارائه می‌شوند:

۱. موج برخورد کننده از نوع آکوستیکی است:

$$\frac{A'_{p,2}}{A'_{p,1}} = \frac{p'_2}{p'_1}, \quad \frac{\nabla \times \vec{V}_2}{\nabla \cdot \vec{V}_1} = \left(\rho_1 c_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_3} \right) \frac{U'_2}{p'_1} \quad (11)$$

۲. موج برخورد کننده از نوع ورتیستی است:

$$\frac{A'_{p,2}}{A'_{v,1}} = \frac{p'_2 p_1}{U'_1 c_1}, \quad \frac{\nabla \times \vec{V}_2}{\nabla \times \vec{V}_1} = \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) \frac{U'_2}{U'_1} \quad (12)$$

که به ترتیب بیانگر ضرایب تولید/تقویت امواج آکوستیکی و ورتیستی می‌باشند. در این روابط، $U' = \sqrt{u_v'^2 + v_v'^2}$ بیانگر شدت اختلالات ورتیستی است.

۵ نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و مقایسه با تئوری خطی

در شبیه‌سازی عددی، معادلات اوپلر را در دستگاه مختصات ناظر ساکن حل می‌کنیم که از این لحاظ با تئوری خطی متفاوت است. در لحظه $t = 0$ جریان سیال در میدان حل، که به $x = 0$ در مرز چپ و $x = x_{sh}(y, 0) = 0.5$ در مرز شوک محدود است، در حرکت یکنواخت قرار دارد. در همین لحظه شوک با یکی از خانواده‌های اختلالی آکوستیک یا ورتیستی تحت شرایط ورودی تحمیل شده در شوک مواجه می‌شود. با گذشت زمان، اثر این اختلالات در محدوده وسیعتری از میدان بعد از شوک منتشر خواهد شد. این اختلالات در دستگاه ناظر لخت به صورت زیر قابل بیانند:

$$\zeta' = \epsilon \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$$

که در آن ζ' نماینده کمیت‌های اختلالی موجود در یک خانواده اختلالی و ϵ نشان‌دهنده دامنه نوسانات آن است. این کمیت‌ها و ω ، که بیانگر رابطه پراکندگی هر خانواده است، از روابط (۱۰) - (۸) تعیین می‌شوند. با توجه به ساکن بودن جریان بالادست و انتقال به دستگاه مختصات شوک و توجه به این نکته که در این دستگاه $x = w_{sh}t$ ، اختلالات به صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

$$\begin{aligned} \zeta'_v &= \epsilon_v \cos(k_x w_{sh}t + k_y y) \\ \zeta'_A &= \epsilon_A \cos[(k_x w_{sh}t \pm c|\vec{k}|)t + k_y y] \end{aligned}$$

اندیس‌های "v" و "A" به ترتیب بیانگر خانواده‌های ورتیستی و آکوستیک می‌باشند. همچنین، علامت "±" در خانواده آکوستیکی بیانگر نوع موج است به نحوی که علامت "+" مشخص کننده موج چپ‌رو و علامت "-" بیانگر موج راست‌رو است. در این تحقیق از امواج چپ‌رو استفاده نموده‌ایم.

۵.۱ نتایج حاصل از شوک قوی و اختلالات ضعیف

یک شوک عمودی با عدد ماخ انتشار ۸ و نسبت فشاری برابر با ۷۴/۵ مثال مناسبی از یک شوک قوی و امواج با دامنه‌های ۰/۰۰۱ و ۰/۰۱ نیز مدل مناسبی برای اختلالات ضعیف‌اند. زاویه بحرانی آکوستیکی در این حالت ۷۳/۷۹ و زاویه بحرانی ورتیستی برابر ۱۸/۶۷ درجه می‌باشند.

شکل‌های (۴)، (۵)، به ترتیب بیانگر میدان‌های فشار، چگالی، ورتیستی و خطوط جریان اختلالی در برخورد یک موج آکوستیکی با زوایای ۲۰ و ۷۰ درجه در زمانی برابر با ۰/۲۱ ثانیه می‌باشند. از این اشکال به وضوح می‌توان اختلاف موجود در بخش آکوستیک کمیت‌های فشار و چگالی در زوایای پایین را نسبت به زوایای نزدیک به زاویه بحرانی دریافت. در زوایای بالا شکل موج سطحی کم‌کم از بین می‌رود. همچنین می‌توان دید که فشار در کل میدان دارای یک خاصیت است در حالیکه سرعت و چگالی دارای دو ماهیت متفاوتند. تولید الگوهای چرخشی در جریان بعد از موج ضربه‌ای و وجود ماهیت غیرآکوستیکی در میدان چگالی در اندرکنش موج آکوستیک با شوک مؤید پیش‌بینی تئوری خطی در تولید میدان‌های اختلالی دیگر است. در تمام شبیه‌سازی‌های انجام شده تعداد نقاط به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که در پایان شبیه‌سازی حداقل ۲۰ نقطه بر طول موج وجود داشته باشد.

به منظور ارایه نتایج کمی حاصل از شبیه‌سازی عددی، لازم است دامنه امواج را در میدان بعد از موج ضربه‌ای تخمین بزنیم. برای این کار از برازش حداقل مربعات یک منحنی سینوسی به اطلاعات در هر $\xi = cte$ و به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(\eta) = a_o + a_c \cos(k_y \eta) + a_s \sin(k_y \eta)$$

که در آن $f(\eta)$ هر کمیت موردنظر جریانی مانند فشار، دیورژانس یا \dots می‌باشد. سرانجام دامنه موج مذکور برابر $\sqrt{a_c^2 + a_s^2}$ خواهد بود. سپس مقدار به دست آمده را روی یک شبکه یکنواخت متناظر با شبکه محاسباتی که در جهت x کشیده شده است ارایه می‌کنیم. در نهایت برای تعیین ضریب تولید یا تقویت یک موج، مقادیر به دست آمده را روی بخشی از ناحیه‌ای که اختلالات در آن وجود دارند متوسط‌گیری می‌کنیم. همچنین به منظور اجتناب از رفتارهای غیرفیزیکی ناشی از اعمال کامل موج در آغاز شبیه‌سازی، تابع زیر را در دامنه اختلال ضرب می‌کنیم:

$$C_{R-U} = \begin{cases} 3 \left(\frac{t}{t_s}\right)^2 - 2 \left(\frac{t}{t_s}\right)^3 & 0 \leq t \leq t_s \\ 1 & t_s \leq t \end{cases}$$

که در آن t_s مضرری از کل زمانی است که شوک با اختلالات برخورد می‌کند. این ضریب توسط کاربر وارد می‌شود و در حالت اختلالات ضعیف و شوک قوی عموماً برابر ۱/۰ انتخاب شده است.

اشکال (۶) و (۷) به ترتیب بیانگر پاسخ‌های آکوستیک و ورتیسیته حاصل از اندرکنش امواج اختلالی آکوستیک و ورتیسیته تحت زاویه ۳۰ درجه و دامنه ۰/۰۰۱ با شوک عمودی با ماخ ۸ می‌باشند. تطابق قابل قبول نتایج به دلیل ناچیز بودن انرژی موجود در جملات غیرخطی موجود در معادلات است که اساساً سبب خطی شدن اندرکنش می‌گردد. این امر مؤید صحت عملکرد برازش شوک در کد تهیه شده است. این رفتارها همچنین در اعداد ماخ پایین‌تر و امواج ضعیف به خوبی مشاهده می‌شوند.

۵.۲ نتایج مربوط به زوایای نزدیک به زاویه بحرانی

زاویه بحرانی زاویه‌ای از برخورد موج است که به ازای زوایای کمتر از آن موج آکوستیک تولید شده یا عبور کرده در جریان بعد از موج ضربه‌ای یک موج سطحی و هارمونیک می‌باشد و به ازای زوایای بیش از آن دارای رفتار کاهشی نمایی است [۲]. شکل (۸) بیانگر وابستگی پاسخ آکوستیک و ورتیسیته به زاویه موج در برخورد یک موج آکوستیک با اندازه ۰/۰۰۱ به شوک با عدد ماخ ۸ می‌باشد. همانگونه که ملاحظه می‌گردد با نزدیک شدن به زاویه بحرانی برخورد، اختلاف بین نتیجه محاسبات و تئوری خطی افزایش می‌یابد. این واگرایی از زوایایی حدوداً ۲۰ - ۱۵ درجه کمتر از زاویه بحرانی آغاز می‌شود. نتیجه مشابه در مراجع [۶] و [۸] گزارش شده است. یکی از دلایل این امر را می‌توان به عدم وجود زمان کافی برای قرارگیری تعداد طول موج‌های زیاد و عدم ایستگاهی^۲ شدن میدان نسبت به اختلال مذکور دانست. شکل (۹) نشان دهنده وابستگی پاسخ ورتیسیته به زاویه برخورد در برخورد یک موج ورتیسیته به شوک و جزئیات پاسخ در زاویه ۶۵ درجه می‌باشد. با افزایش زمان اندرکنش و دادن فرصت کافی جهت ایستگاهی شدن میدان، می‌توان همگرایی پاسخ به پیش‌بینی تئوری خطی را مشاهده نمود. لیکن به دلیل کشیده شدن شبکه در طول زمان و کاهش شدید دقت، این امر مستلزم بررسی بیشتر و استفاده از دستگاه مختصات متصل به شوک غیراختلالی است. این در حالی است که در مرجع [۸]، واگرایی جواب تئوری و شبیه‌سازی عددی به عدم اعتبار خطی‌سازی معادلات به دلیل گذر صوتی شدن جریان بعد از موج ضربه‌ای در دستگاه مختصاتی که در آن جریان بالادست پایا است ارتباط داده شده است. این امر در صورت انرژی بودن جریان اختلالی بالادست می‌تواند صحت داشته باشد. لیکن با فرض اختلالات کوچک چندان معقول نمی‌باشد.

شکل (۱۰) نشان دهنده وابستگی پاسخ آکوستیک (که بر حسب کمیت دیورژانس ارایه شده) به زاویه برخوردی موج آکوستیک با دامنه ۰/۰۰۱ با شوک در عدد ماخ ۱/۵ در مقایسه با نتایج مرجع [۸] می‌باشد. کاری که در بدست آوردن

این نتایج انجام شده کاهش شدید عرض میدان با افزایش زاویه برخورد و در نتیجه افزایش تعداد طول موج‌های قرار گرفته در میدان بعد از موج ضربه‌ای است. لیکن با انجام این کار پاسخ ورتیسیتی به شدت تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

۵.۳ نتایج مربوط به اعداد ماخ پایین و امواج با دامنه‌های بزرگ

یکی از شرایطی که امکان عدم موفقیت تئوری خطی در پیش‌بینی اندرکنش وجود دارد، اندرکنش شوک ضعیف با امواج اختلالی قوی است. شکل (۱۱) نشان دهنده وابستگی میدان‌های آکوستیک و ورتیسیتی تولیدی به دامنه موج برخوردی در برخورد امواج آکوستیک و ورتیسیتی در زاویه 30° درجه با شوک عمودی با ماخ $M_\infty = 1/5$ می‌باشد. همانگونه که پیداست، حتی در اعداد ماخ پایین نیز اثرات غیرخطی چندان خودنمایی نمی‌کنند.

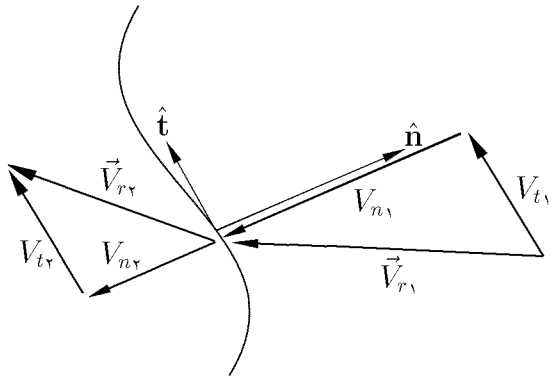
۶ نتیجه‌گیری

در این تحقیق به بررسی اندرکنش شوک و امواج اختلالی آکوستیک و ورتیسیتی پرداختیم. اهم نتایج مؤید اعتبار تئوری خطی در محدوده وسیعی از اعداد ماخ و دامنه امواج می‌باشد. تنها مورد عدم توافق نتایج و تئوری، زوایای حوالی زاویه بحرانی است. بعضی از محققین، [۸]، دلیل این امر را عدم اعتبار تئوری خطی در این محدوده به دلیل گذر صوتی شدن جریان متوسط در دستگاه مختصاتی که در آن جریان بالادست پایا است ذکر کرده‌اند. لیکن با انجام شبیه‌سازی‌های بلند مدت، با توجه به محدودیت‌های حاکم بر نوع شبیه‌سازی انجام شده، همگرایی به پیش‌بینی تئوری خطی مشاهده شد. این امر نیازمند بررسی بیشتر و انجام شبیه‌سازی با قابلیت بررسی بلند مدت تاریخچه جریان است.

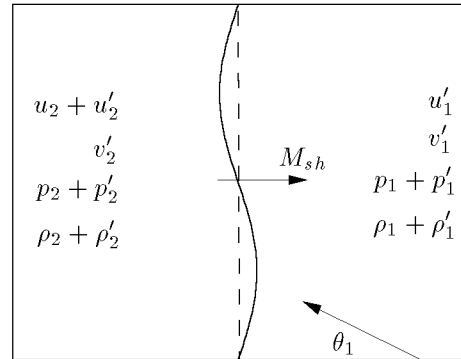
۷ مراجع

- 1- H. S. Ribner, "Convection of a Pattern of Vorticity Through a Shock Wave" NACA Rept. 1164, 1954
- 2- J. F. McKenzie, K. O. Westphal "Interaction of Linear Waves with Oblique Shock Waves" *Phys. Fluids* Vol. 11 No. 11 1968
- 3- Joshua C. Anyiwo, D. M. Bushnell "Turbulence Amplification in Shock-Wave Boundary-Layer Interaction" *AIAA J* Vol. 20, NO. 7, 1982
- 4- A. Kumar, D. M. Bushnell, M. Y. Hussaini "Mixing Augmentation Technique for Hypervelocity Scramjets" *J. Propulsion* 1989
- 5- L. S. G. Kovasznay "Turbulence in Supersonic Flow" *J. Aero. Sci.* 20, 657-682
- 6- T. A. Zang, M. Y. Hussaini, D. M. Bushnell "Numerical Computations of Turbulence Amplification in Shock-Wave Interactions" *AIAA J* Vol. 22, No. 1, 1984
- 7- G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, "Shock Shape Alteration Caused by Interaction with Organized Structures", *AIAA J* Vol. 38, NO. 6, 2000
- 8- S. Lee, S. K. Lele, P. Moin "Direct Numerical Simulation of Isotropic Turbulence interacting with a Weak Shock Wave" *JFM* Vol. 251, 1993
- ۹- محمد جان‌بزرگی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، "تحلیل و شبیه‌سازی اندرکنش شوک و اختلالات جریانی"، بهمن ۱۳۸۲.
- 10-Jeffery S. Marshall, "Inviscid Incompressible Flow", John Wiley, 2001.

۸ شکل‌ها



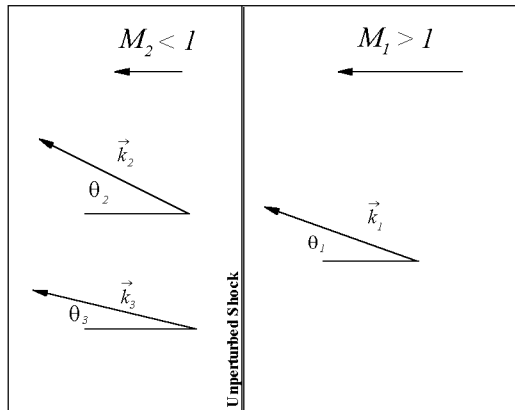
متوسط شوک ساکن است



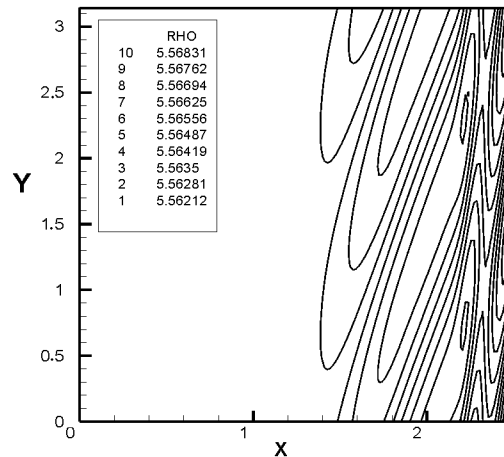
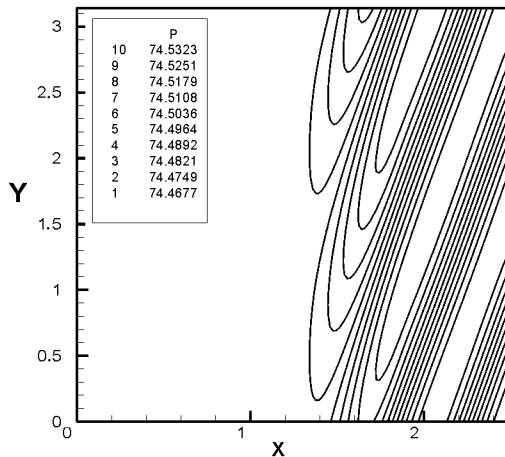
$x = x_L$ $x_{sh}(y, t)$

شکل (۲): جریان در دستگاه مختصات متصل به شوک.

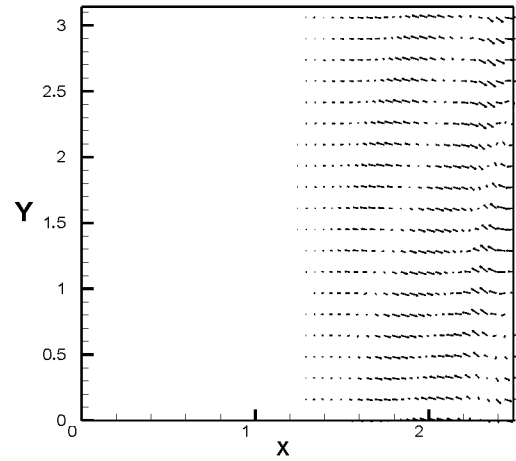
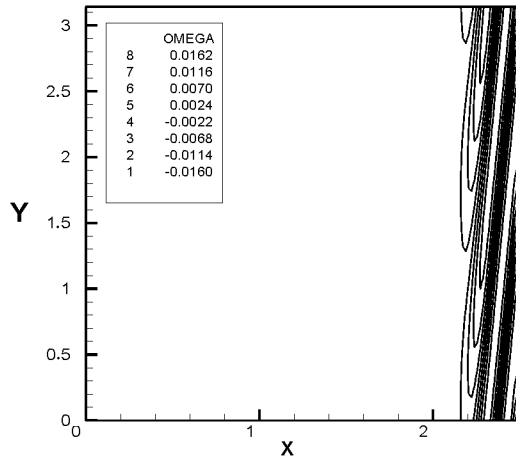
شکل (۱): هندسه جریان از دیدگاه محاسباتی



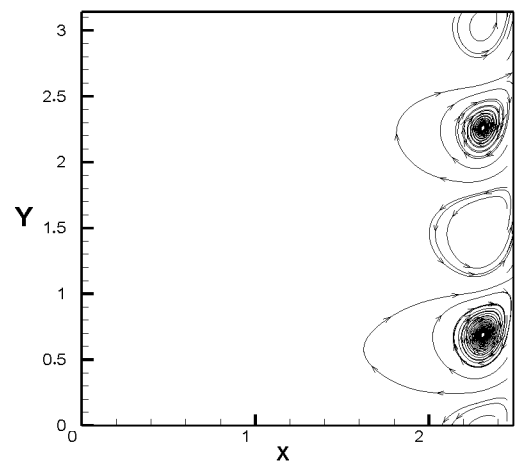
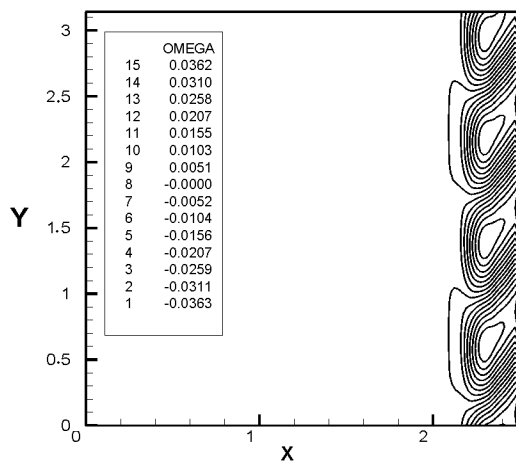
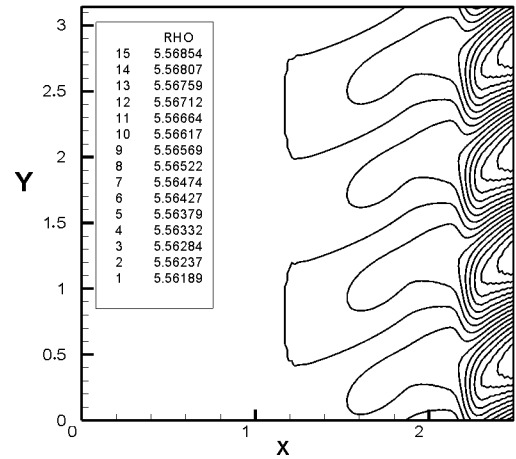
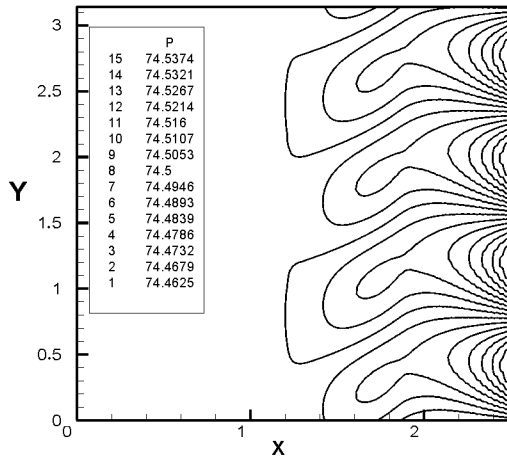
شکل (۳): هندسه عبور جریان اختلالی از درون شوک از دیدگاه تئوری خطی



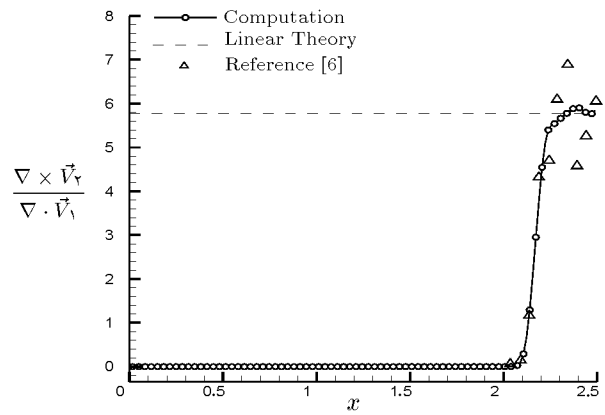
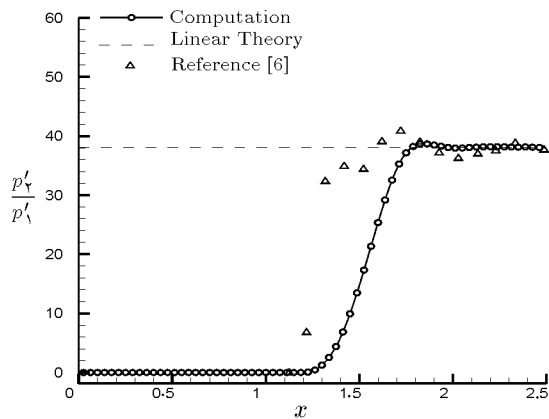
برای دیدن زیرنویس به صفحه بعد مراجعه کنید



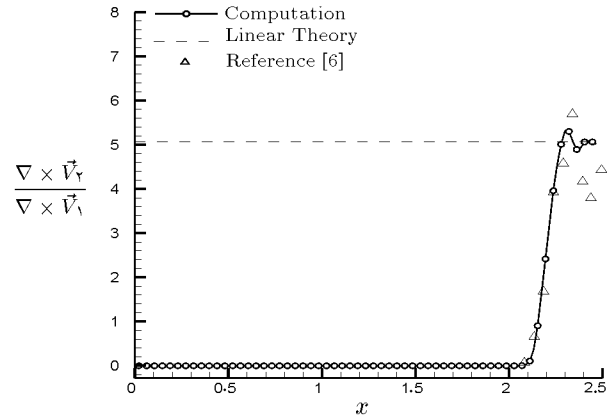
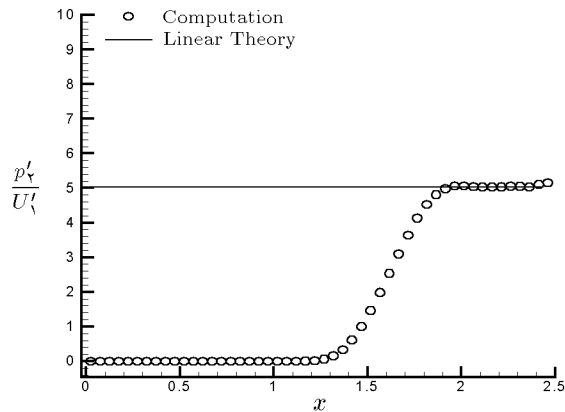
شکل (۴): میدان‌های فشار، چگالی، ورتیسیتی و بردار سرعت در اندرکنش موج آکوستیکی با دامنه 0.1 با شوک $M_\infty = 8$ تحت زاویه 20° در $t = 0.21$ ثانیه.



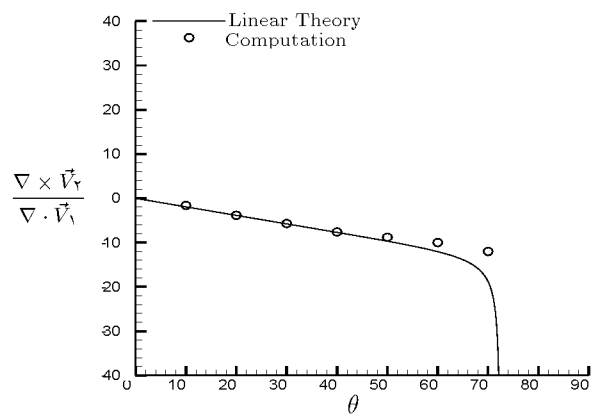
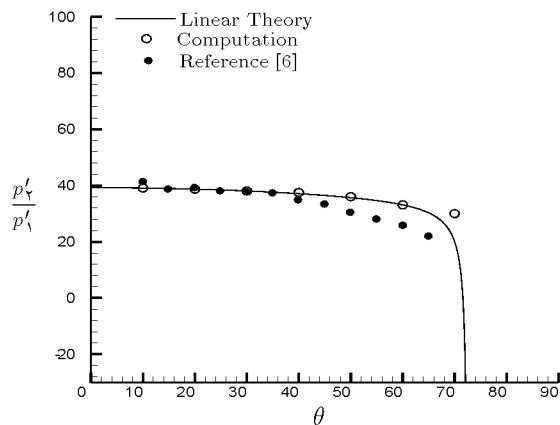
شکل (۵): میدان‌های فشار، چگالی، ورتیسیتی و خطوط جریان اختلالی در اندرکنش موج آکوستیکی با دامنه 0.1 با شوک $M_\infty = 8$ تحت زاویه 70° در $t = 0.21$ ثانیه.



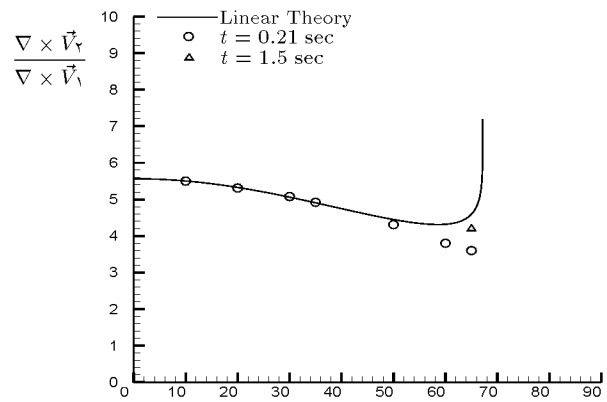
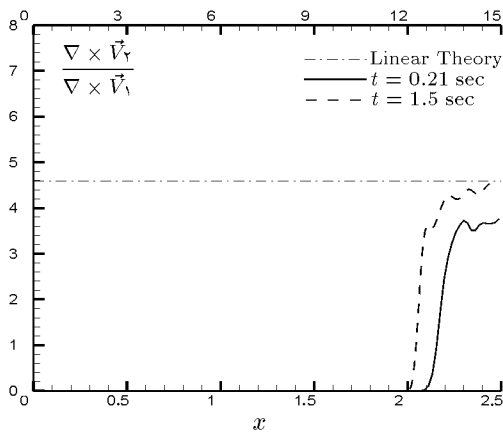
شکل (۶): پاسخ‌های ورتیسیتی و آکوستیک در برخورد موج آکوستیک با دامنه 0.001 و در زاویه 30° به شوک عمودی با ماخ $M_\infty = 8$ در $t = 0.21$ ثانیه.



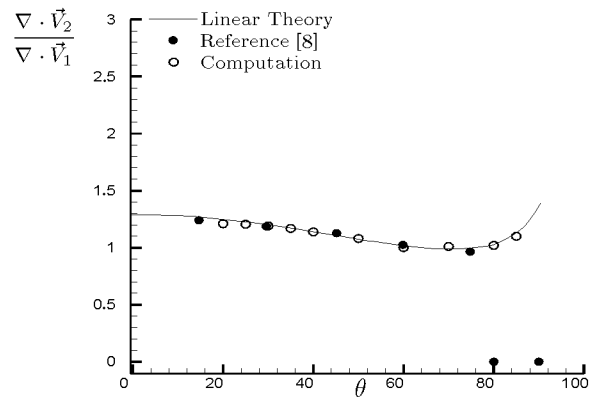
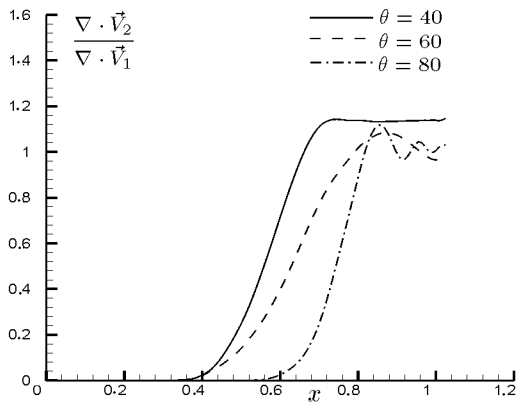
شکل (۷): پاسخ‌های ورتیسیتی و آکوستیک در برخورد موج ورتیسیتی با دامنه 0.001 و در زاویه 30° به شوک عمودی با ماخ $M_\infty = 8$ در $t = 0.21$ ثانیه.



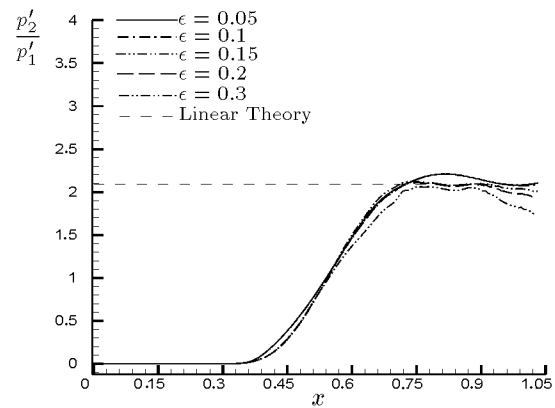
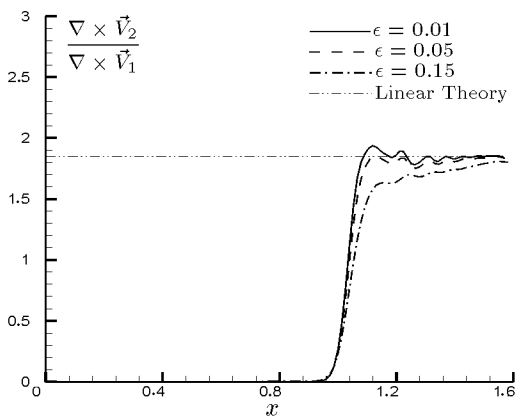
شکل (۸): وابستگی پاسخ‌های ورتیسیتی و آکوستیک به زاویه برخوردی در برخورد یک موج آکوستیک با دامنه 0.001 به شوک عمودی با ماخ $M_\infty = 8$.



شکل (۹): وابستگی پاسخ ورتیسیتی به زاویه برخورد در برخورد موج ورتیسیتی با دامنه 0.1×0.7 به شوک $M_\infty = 8$ و جزئیات پاسخ در $\theta = 65^\circ$.



شکل (۱۰): وابستگی پاسخ دیورژانس (آکوستیک) به زاویه برخوردی در برخورد یک موج آکوستیک با دامنه 0.1×0.7 به شوک عمودی با ماخ $M_\infty = 1.5$.



شکل (۱۱): وابستگی پاسخ‌های آکوستیکی و ورتیسیتی به دامنه موج برخوردی در $M_\infty = 1.5$ به امواج آکوستیک، شکل راست، و ورتیسیتی، شکل چپ.

Surf and download all data from SID.ir: www.SID.ir

Translate via STRS.ir: www.STRS.ir

Follow our scientific posts via our Blog: www.sid.ir/blog

Use our educational service (Courses, Workshops, Videos and etc.) via Workshop: www.sid.ir/workshop