

# SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛  
شبکه های توجه گرافی  
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از  
وب آو ساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی

## حل عددی انتقال حرارت جریان آرام سیال با لزجت متغیر در طول ورودی مجاری حلقوی

محمد اسماعیل خوشروان      اسماعیل اسماعیل زاده      پرویز علوی تبریزی      سید فرامرز رنجبر  
 استاد دانشکده مکانیک      دانشیار دانشکده مکانیک      استادیار دانشکده مکانیک      مربی دانشکده مکانیک  
 تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - دانشکده فنی مهندسی مکانیک - E-mail:alavitabrizi@tabrizu.ac.ir

### چکیده

در این مقاله یک روش جدید برای محاسبه اعداد ناسلت جریان آرام سیالات نیوتنی با اعداد پراتل مختلف در طول ورودی مجاری حلقوی ارائه شده است. نظر باینکه در طول ورودی مرکب ترتیب توسعه یافتن جریان از نظر حرارتی و هیدرودینامیکی وابسته به عدد پراتل می باشد لذا کل روند محاسبه ضریب انتقال حرارت جابجائی به تعداد اعداد پراتل انتخابی تکرار می شود تا اثر تقدم توسعه یافتن پروفیل های سرعت یا دما بر روی آن مشهود شود. در روش جدید معادلات دیفرانسیل غیرخطی، غیرهمگن و بیضی گون منتهوم و انرژی بطور مزدوج (Coupled) با تاکید به لزجت متغیر سیال توسط روش تفاضل محدود (FDM) حل می شوند. در روش های پیشین برای برآورد ضریب انتقال حرارت سیال از مجاری حلقوی یک تعداد مفروضات تسهیلی بکار برده شده است بطوریکه جهت خطی کردن معادله منتهوم از تقریب لانگهار استفاده شده تا امکان حل انتگرالی مسئله هیدرودینامیک فراهم شود و مسئله طول ورودی حرارتی با یک معادله دیفرانسیل از نوع Strum-Liouville حل شده است. بجز از برخی شرایط مرزی ساده، حل معادلات حاکم فقط بطرق عددی میسر شده که آنها شامل خطی کردن معادلات بقاء، قطع سری های نامتناهی، حل عددی انتگرال Stieltjes و استفاده از اصل برهم نهی نتایج حل مستقل مسئله انتقال حرارت از جدارهای مجرای حلقوی بوده است. لذا این روش غیرمزدوج و پرتقریب منجر به نتایج پرخفا گردیده است. نهایتاً نشان داده خواهد شد که نتایج روش جدید از جامعیت و دقت بالاتری نسبت به روش های قبلی برخوردار است.

واژه های کلیدی: مجرای حلقوی، مبادله کن گرما، عدد ناسلت موضعی، عدد پراتل، ضریب انتقال حرارت جابجائی

### ۱ - مقدمه

در طبقه بندی ساختاری مبادله کنهای گرما از نوع لوله ای، مبدلهای دو لوله ای که از دو لوله دایروی هم محور ساخته می شود جایگاه ویژه ای دارد و برای محاسبه ضرایب جابجائی متوسط سیالات لوله و حلقه (جریان از مجرای حلقوی بین دو لوله) از همبسته Sieder & Tate استفاده می شود که فقط برای تبادل گرما از یک وجه کاربرد دارد [1].

در مبدلهای فشرده سه سیالی از نوع لوله ای هم یکی از سیالات در مجرای حلقوی جریان دارد. برای محاسبه دقیق سطح تبادل حرارتی لازم در مبادله کنها و تجهیزات انتقال گرما نیاز به مقدار صحیح و دقیق ضرایب انتقال حرارت از هر دو وجه می باشد. بالاخص در مواقعی که جریان در طول ورودی قرار می گیرد تغییرات عدد ناسلت موضعی شدید می باشد و در همه موارد هم حداقل مقدار آن متعلق به انتهای طول ورودی حرارتی است.

با مراجعه به کتب انتقال حرارت و بخش مبادله کنهای گرما، حل اغلب مسائل طرح حرارتی مبادله کنها با استفاده از معادلاتی است که شامل جریانهای کاملاً توسعه یافته است، در نتیجه سطح تبادل بزرگتری حاصل می شود و به اصطلاح طراحی Over Design می گردد. مورد دیگر مختص سیالاتی است که خواص آنها شدیداً وابسته به درجه حرارت است که موجب تغییرات ضریب انتقال حرارت در طول مسیر جریان می شود. برای سیالات با خواص ثابت یا با خواصی که وابستگی ضعیفی به دما دارند، تغییر ضریب انتقال حرارت در طول مبادله کن گرما تقریباً خطی می باشد ولی برای سیالات با خواص متغیر نحوه تغییرات غیرخطی می باشد.

از طرفی هم بجز موارد استثنائی، شار گرمای عبوری از دیواره ثابت نمی باشد لذا با توجه به جمیع دلایل موجود لازم است که اعداد ناسلت موضعی بفرم تابعی از طول و سایر مشخصه ها محاسبه گردد و بهترین راهکار حل پیوسته و متوالی عنصر به عنصر ناشی از تقسیمات طولی می باشد.

بطور کلی منظور نظر در این مقاله حل عددی مسئله انتقال حرارت جابجائی در مجرای حلقوی برای سیالات نیوتنی با لزجت متغیر و تابع دما در رژیم آرام و در طولهای ورودی هیدرودینامیک و حرارتی ضمن توسعه یافتن جریان است که در بخش روش پیشنهادی بطور نسبتاً مبسوط توضیح داده می شود.

نهایتاً حاصل کار با نتایج روشهای قبلی مقایسه شده و جامعیت و دقت آن مورد بحث قرار می گیرد و چون برای تدوین روش جدید، مرجع تازه ای وجود نداشته لذا ناچاراً به منابع و مراجع قدیمی مورد استفاده در روشهای قبلی رجوع شده است.

## ۲ - پیشینه مسئله

Heaton و همکارانش [3,2] مسئله انتقال حرارت در مجرای حلقوی برای جریان ورقه ای سیال با خواص ثابت در طول ورودی مرکب را مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش Langhaar که حل انتگرالی مسئله طول ورودی هیدرودینامیک در جریان از لوله های گرد و صاف است استفاده کرده و برای جریان از مجرای حلقوی با استفاده از معادله انتگرالی ممنوم رابطه ویژه ای برای نیمرخ سرعت در کل ناحیه ورودی بدست آوردند و آنرا در معادله انرژی جاگذاری کردند. برای مسئله انتقال حرارت جهت کسب نیمرخ توزیع دما از روش انتگرالی مشابهی استفاده نمودند.

روش کار آنها بر اساس شرط شار حرارتی ثابت از دیوار پایه گذاری شده و نتایج با فرض یک دیوار در تبادل گرما و دیوار دیگر عایق بدست آمده است. برای شرایط ترکیبی چون معادلات ممنوم و انرژی با اعمال تقریب هائی، خطی شده بود لذا از اصل برهم نهی نتایج استفاده شده است. اما روش آنها برای حالتی که شار حرارتی از دیوار تغییرات محوری داشته باشد قابل استفاده نبود.

Klein و همکارانش [4] قبلاً برای جریان از داخل لوله دایروی و صاف با شرایطی که شار گرمائی در امتداد محور لوله تغییراتی داشته مسئله را حل نموده بودند. آنها با تبدیل شرط دمای ثابت دیواره به شرط گرادیان ثابت دما در جدار، برای حالت شار ثابت گرما از جدار متوسل به روش جداسازی متغیرها در معادله دیفرانسیلی انرژی شدند (معادله ای که در فرم بی بعد با شرط  $Re.Pr > 100$  و با حذف اثر هدایت طولی حرارت در سیال به وضعیت خطی و همگن درآمده بود) با این ترتیب یک معادله دیفرانسیلی از نوع Sturm-Liouville حاصل می شد که با معرفی تعدادی مقادیر ثابت و تعدادی مقادیر ویژه، با بسط سری نامتناهی حل می گردید، سپس کل سطح را به عناصر سطح با شار حرارتی ثابت تقسیم نموده و با استفاده از مقادیر ثابت و ویژه برای هر عنصر به یک انتگرال Stieltjes رسیدند و چون این انتگرال به سهولت قابل حل نبود لذا قسمت تغییرات پیوسته شار را در یک انتگرال Reimann وارد کرده و قسمت تغییرات ناپیوسته را به یک عبارت جمع تبدیل نمودند که این جمع و انتگرال برای سطوح با توزیع ساده دما بطور تحلیلی قابل حل بود و در سایر موارد بطور عددی حل می گردید.

Lundberg و همکارانش [6,5] روش حل تحلیلی برای جریان ورقه ای سیال نیوتنی با خواص ثابت از مجرای حلقوی با گرمایش غیرمتقارن از دو جدار مجرا ارائه دادند. آنها مسئله را یکبار برای حالت کاملاً توسعه یافته حرارتی و هیدرودینامیکی و یکبار هم برای طول ورودی حرارتی حل کردند که در هر دو حال معادله پروفیل سرعت معلوم بود. خلاصه روش کار عبارت بود از بکارگیری پارامترهائی همبسته با نسبت شعاعها در معادله ممنوم ساده شده به جریان یک بعدی با رژیم آرام و توسعه یافته از داخل لوله های گرد و صاف، سپس با اعمال حدود مناسب در انتگرال گیری از معادله حاصل، رابطه نیمرخ سرعتها در مجرای حلقوی بدست آمده که آن را در معادله انرژی تحت مختصات استوانه ای

برای جریان ورقه ای توسعه یافته از لوله های گرد و صاف قرار داده و بر حسب این اصل که شار حرارتی معین از هر سطح ، گرادیان دما را در آن سطح مشخص می کند ، شرایط مرزی را فراهم آورده و از معادله انرژی ، مستقیماً انتگرال گیری نمودند. برای تامین شرایط مرزی تبادل گرما از یک وجه در معادله انرژی دو حالت خاص منظور نمودند :

الف - گرمایش از طریق جدار بیرونی با فرض عایق بودن جدار داخلی مجرای حلقوی

ب - گرمایش از طریق جدار داخلی با فرض عایق بودن جدار خارجی مجرای حلقوی

با توجه به اینکه معادله انرژی خطی شده بود لذا حسب دو حالت فوق از آن مستقیماً انتگرال گیری کردند و برای گرمایش غیرمتقارن از طریق جدارها ، نتایج دو حالت را بطریق برهم نهی Super position جمع نمودند.

### ۳ - روش پیشنهادی و معادلات حاکم

برای جریان سیال نیوتنی از داخل مجرای حلقوی با جایجائی اجباری در رژیم ورقه ای به دلیل تقارن شکل مجرا نسبت به محور جریان و گرمایش محیطی متقارن از معادلات ناویه - استوکس دو بعدی در مختصات استوانه ای با تقارن محوری استفاده شده و معادلات بقاء جرم ، ممتوم و انرژی بفرم معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی ظاهر می گردد. شرایط اولیه در معادلات حاکم بقرار زیر است :

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad \text{- سیال نیوتنی با خواص متجانس}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \text{- جریان جرم ، ممتوم و انرژی در حالت پایا}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = 0 \quad \text{- جریان تراکم ناپذیر}$$

- خواص سیالات از جمله جرم مخصوص ، گرمای ویژه ، ضریب هدایت گرمائی ثابت و مستقل از دما

$$\rho = Const. \quad C_p = Const. \quad K = Const.$$

$$\mu = \mu(T) \quad \text{- لزجت تابعی از دما}$$

جهت سهولت عملیات از جمله گرادیان لزجت صرفنظر می شود و در حل تفاضل محدود از مقدار شبکه ای لزجت بفرم  $\mu_{i,j}$  استفاده می گردد در نتیجه بر حسب تغییرات دو بعدی دما  $T = T(r, x)$  تغییرات لزجت نیز دوبعدی خواهد بود و جهت اجتناب از پیچیدگی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی غیرخطی ، ابتدا لزجت را مثل سایر خواص ثابت در نظر گرفته و توزیع دما را محاسبه می کنیم و سپس مقادیر شبکه ای لزجت را قرار داده و بطور تکراری نتایج توزیع سرعت و دما را یکی پس از دیگری اصلاح نموده و عملیات را با حصول توزیع دما و اصلاح مقادیر شبکه ای لزجت تکرار تا مقادیر قطعی حاصل گردد.

$$U_V''' = 0 \quad \text{- عدم وجود منبع انرژی}$$

- بکارگیری تابع اتلاف  $\Phi_V$  بمنظور احتمال استفاده از سیالاتی با لزجت زیاد مثل روغن ها

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( K \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{- گرمایش محیطی متقارن}$$

- وجود تقارن محوری از نظر توزیع سرعت و دما در جهت طولی جریان و نهایتاً حضور دوبعدی جریان جرم و جریان انرژی در راستای مولفه های  $r$  و  $x$  در مختصات استوانه ای با تقارن محوری

### ۳-۱ - معادلات بقاء

الف - معادله بقاء جرم

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

ب - معادله ممتوم بفرم بیضی گون در جهت طولی جریان

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (2)$$

ج - معادله ممتوم بفرم بیضی گون در جهت شعاعی

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \quad (3)$$

د - معادله بقاء انرژی

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + \frac{\mu}{\rho \cdot C_p} \Phi_V \quad (4)$$

$$\Phi_V = \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4-1)$$

برای کاهش تعداد متغیرها جمله فشار را حذف می کنیم و با معرفی تابع جریان  $(\psi)$  و تراورد چرخش  $(\omega)$  معادله ممتوم حاصل می شود.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = \frac{\rho}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\omega) + \frac{\partial}{\partial r} (v\omega) \right] \quad (5)$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی غیرخطی و غیرهمگن و بیضی گون می باشد. لازم بذکر است که تراورد چرخش عبارت است از:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (6)$$

و مؤلفه های سرعت هم با استفاده از تابع جریان عبارتند از:

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

و رابطه بین  $\omega$  و  $\psi$  بصورت تابعی از  $r$  و  $x$  در مختصات استوانه ای هم عبارت است از:

$$\omega = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \quad (8)$$

### ۴ - حل عددی و معادلات تفاضل محدود

ابتدا برای مجرای حلقوی شعاع هیدرولیک را محاسبه می کنیم و سپس معادلات (۴) و (۵) و (۷) و (۸) را با اعمال

$r_h$  به  $r$  و  $x$  به  $V$  ،  $u$  به  $V$  و  $v$  بی بعد می کنیم؛

$$r_h = \frac{D_h}{4} = (r_o - r_i) / 2$$

$$r^* = \frac{r}{r_h}, \quad x^* = \frac{x}{r_h}, \quad u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V}$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{V r_h^2}, \quad \omega^* = \frac{r_h \omega}{V}$$

$V$  سرعت متوسط بوده و برحسب دبی جریان بر سطح مقطع مجرا قابل محاسبه است. با صرفنظر از علامت \* در توابع و متغیرها، حالت بی بعد معادلات (۶) و (۷) و (۸) مشابه خود شده و حالت بی بعد معادله (۵) بشکل زیر درمی آید:

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{4}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right) \quad (9)$$

و با بی بعد کردن دمای  $T$  بصورت  $T^* = \frac{T - T_w}{T_o - T_w}$  که در آنجا  $T_o$  دمای ورودی سیال به هر عنصر طولی و  $T_w$  دمای دیواره عنصر می باشد. با صرفنظر از علامت \* معادله بقاء انرژی بصورت زیر درمی آید:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{4}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{4E_C}{\text{Re}} \cdot \Phi_V \quad (10)$$

$$\Phi_V = 4 \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial x} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (10-1)$$

که در معادلات بالا عدد رینولدس جریان  $\text{Re} = \frac{\rho V D_h}{\mu}$  و عدد اکرت جریان  $Ec = \frac{V^2}{C_p \Delta T}$  و عدد پکلت جریان  $Pe = \frac{4Vr_h}{\alpha} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$  که  $\text{Pr} = \frac{\mu \cdot C_p}{K}$  عدد پرائنتل و  $\alpha = \frac{K}{\rho \cdot C_p}$  ضریب پخش حرارتی و  $\Delta T = T_o - T_w$  اختلاف دمای ورودی سیال با دمای دیواره می باشد.

#### ۴-۱ - معادلات شرایط مرزی

۴-۱-۱- در مرز ورودی روی محور  $r$  از شعاع درونی ( $r_i$ ) تا شعاع بیرونی ( $r_o$ ) برای  $x=0$  چون سرعت ورودی یکنواخت بوده لذا  $u=1$  و  $\frac{\partial u}{\partial r}=0$  و همچنین  $v=0$  است.

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{الف - محاسبه } \omega$$

$$\omega_{1,j} = -\frac{1}{r_j} \cdot \frac{\psi_{1,j} - 2\psi_{2,j} + \psi_{3,j}}{(\Delta x)^2}, \quad j = 2, 3, \dots, N \quad \text{با فرض تقریب درجه دوم و انجام عملیات ریاضی؛}$$

$$r_o^* = \frac{r_o}{r_h} = \frac{2r_o}{r_o - r_i} = \frac{2}{1 - r_i/r_o} = \frac{2}{1 - r^*}, \quad r_i^* = \frac{r_i}{r_h} = \frac{2r_i}{r_o - r_i} = \frac{2r^*}{1 - r^*}$$

$$\Delta r = \frac{r_o^* - r_i^*}{N} = \frac{2}{N}, \quad r = N \cdot \Delta r = 2, \quad r_j = \frac{2(j-1)}{N}, \quad j = 2, 3, \dots, N$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = 1, \quad \psi_{1,j} = \frac{r_j^2}{2} = \frac{2(j-1)^2}{N^2}, \quad j = 2, 3, \dots, N \quad \text{ب - محاسبه } \psi$$

$$T_{1,j} = \frac{T - T_w}{T_o - T_w} = 1, \quad j = 2, 3, \dots, N \quad \text{ج - محاسبه } T \text{؛ چون } T = T_o \text{ است پس:}$$

۴-۱-۲- در مرز بالائی متعلق به شعاع  $r_o$  در امتداد محور  $x$  چون  $u=0$  و  $v=0$  بوده و حسب عدم وجود لغزش  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$  است لذا با توجه به معادلات (۶) و (۷) بقرار زیر عمل می کنیم:

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad \text{الف - محاسبه } \omega$$

با انجام عملیات ریاضی روی معادله فوق :

$$\omega_{i,N+1} = \frac{15\psi_{i,N+1} - 16\psi_{i,N} + \psi_{i,N-1}}{6(\Delta r)^2 - 4(\Delta r)^3} \quad \Delta r = \frac{2}{N}$$

ب - محاسبه  $\psi$  :

$$\psi_{i,N+1} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M+1$$

ج - محاسبه دما؛ چون  $T = T_w$  است پس :

$$T_{i,N+1} = \frac{T - T_w}{T_o - T_w} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M+1$$

۳-۱-۴- در مرز پائینی متعلق به شعاع  $r_i$  در امتداد محور  $x$  چون  $u = 0$  و  $v = 0$  بوده و حسب عدم وجود لغزش است لذا مشابه بند قبلی :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

الف - محاسبه  $\omega$  :

$$\Delta r = \frac{2}{N}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M+1, \quad \omega_{i,1} = \frac{15\psi_{i,2} - 16\psi_{i,1} + \psi_{i,0}}{6(\Delta r)^2 - 4(\Delta r)^3}$$

ب - محاسبه  $\psi$  :

$$\psi_{i,1} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M+1$$

ج - محاسبه دما؛ چون  $T = T_w$  است پس :

$$T_{i,1} = \frac{T - T_w}{T_o - T_w} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M+1$$

۴-۱-۴- در مرز خروجی روی محور  $r$  از شعاع درونی تا شعاع بیرونی برای  $x = L_H / r_h$  یعنی انتهای طول ورودی

هیدرودینامیک با توجه به معادله پروفیل سرعت جریان توسعه یافته [7] :

$$\frac{u}{V} = \frac{2}{M} [1 - (r/r_o)^2 + B \ln(r/r_o)]$$

و پارامترهای مربوطه :

$$B = (r^{*2} - 1) / \ln r^*, \quad M = 1 + r^{*2} - B, \quad r^* = r_i / r_o$$

ابتدا معادله مربوطه را بی بعد می کنیم :

$$u = \frac{2}{M} [1 - (Ar)^2 + B \ln(Ar)]$$

(که  $A = \frac{1 - r^{*2}}{2}$  و  $B$  و  $M$  مقادیر قبلی هستند) و سپس با توجه به شرایط مرزی  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  و  $v = 0$  داریم :

الف - محاسبه  $\omega$  :

$$\omega_{M+1,j} = -\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4}{M} A^2 r_j - \frac{2B}{M} \cdot \frac{1}{r_j} \quad r_j = \frac{2}{N} (j-1), \quad j = 2, 3, \dots, N$$

ب - محاسبه  $\psi$  :

$$\psi_{M+1,j} = \frac{r_j^2}{2M} [2 - (Ar_j)^2 + 2B \ln(Ar_j) - B], \quad r_j = \frac{2}{N} (j-1), \quad d\psi = ur dr$$

N تعداد تقسیمات شعاعی و M تعداد تقسیمات طولی

ج - محاسبه دما؛ بر حسب شرط شار گرمای ثابت از جدار با تعیین مقادیر فرضی مناسب و با معلوم بودن دمای ورودی سیال با استفاده از موازنه انرژی حرارتی بقرار زیر دمای متوسط در مقطع خروجی مجرا بدست می آید.

$$T_e = T_o + \frac{1}{\dot{m} C_p} \sum q_w'' \cdot dA, \quad T_{M+1,j} = \frac{T_e - T_w}{T_o - T_w}, \quad j = 2, 3, \dots, N$$

به عنوان فرض اولیه در دستگاه معادلات قرار داده می شود و برای تکرارهای بعدی مقادیر شبکه ای تکرار مرحله قبل جاگذاری شده و بترتیب تا حصول مقادیر نهائی اصلاح می گردد.

حل دستگاه معادلات بقرار تکرار نقطه ای پنج گرهی بروش فوق واهلش (P.SOR)

Point-Iteration Successive Overrelaxation انجام می گیرد و جهت کنترل همگرایی از پارامتر تخفیف سازی ( $\alpha$ )

Relaxation Parameter و همچنین از مقدار تخفیف سازی  $u_{i,j}^r$  بعوض مقادیر محاسبه ای صریح، بعنوان مقادیر جدید

نقاط استفاده می گردد [9,8].

$$u_{i,j}^r = \bar{u}_{i,j} + \alpha_{opt} (u_{i,j} - \bar{u}_{i,j})$$

که  $\bar{u}_{i,j}$  مقدار قبلی و معلوم شده از تکرار ماقبل می باشد. محدوده پارامتر تخفیف سازی در روش فوق واهلش عبارت است از:  $1 \leq \alpha \leq 2$  که مقدار بهینه آن بقرار زیر محاسبه می شود:

$$\alpha_{opt} = \frac{2(1 - \sqrt{1 - \alpha^2})}{\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{\cos(\pi/N) + b \sin(\pi/M)}{1+b}, \quad b = \left( \frac{\Delta r}{\Delta x} \right)^2$$

برای اجتناب از اطاله متن از توضیح فلوچارت برنامه پرهیز می شود.

## ۲-۴ - شرایط اولیه

مطابق آنچه که در مرجع [2] آمده شرایط اولیه مشابهی منظور شده است که عبارتند از:

$$r^* = 0.5$$

نسبت شعاع درونی به بیرونی مجرای حلقوی

$$q_o'' / q_i'' = 1$$

نسبت شارهای حرارت خروجی به ورودی از سطوح خارجی و داخلی

انتخاب سیال:

الف - آب ( $Pr = 10$ )

$$T_o = 280.85^K$$

دمای یکنواخت ورودی

$$V = 5 \times 10^{-3} m/s$$

سرعت یکنواخت ورودی

$$Re = 57.1043$$

عدد رینولدس در دمای ورودی

$$\mu = -7.41E - 9T^3 + 7.0332E - 6T^2 - 2.2375E - 3T + 0.239179$$

تابعیت لزجت به دما [1,10]

لزجت به واحد  $kg/m.s$  و دما به واحد K با سایر خواص استخراجی از جدول استاندارد

ب - هوا ( $Pr = 0.7$ ) در فشار اتمسفر استاندارد

$$T_o = 350^K$$

دمای یکنواخت ورودی

$$V = 0.5 m/s$$

سرعت یکنواخت ورودی

$$Re = 379.4216$$

عدد رینولدس در دمای ورودی

$$\mu = 1.183E - 14T^3 - 3.808E - 11T^2 + 6.738E - 8T + 1.3554E - 6$$

تابعیت لزجت به دما [1,10]

لزجت به واحد  $kg/m.s$  و دما به واحد K با سایر خواص استخراجی از جدول استاندارد

ج - جیوه ( $Pr = 0.01$ )

$$T_o = 534^K$$

دمای یکنواخت ورودی

$$V = 5 \times 10^{-3} m/s$$

سرعت یکنواخت ورودی

$$Re = 1052.72$$

عدد رینولدس در دمای ورودی

$$\mu = (14278.567 - 2.396T) \times 10^{-(6.796 + 6.337E - 4T)}$$

تابعیت لزجت به دما [1,10,1]

لزجت به واحد  $kg/m.s$  و دما به واحد K با سایر خواص استخراجی از جدول استاندارد

انتخاب طول بی بعد و مقاطع استخراج اعداد ناسلت موضعی بصورت تابعی از طول بی بعد (عکس عدد

$$x^+ = x / D_h \cdot Re \cdot Pr = Gz^{-1}$$

گریتز)

$$x^+ = 0.001, 0.002, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.25$$

مقاطع انتخابی

لازم بذکر است که همان مقادیر انتخابی اعم از سطح و سیال و خواص و مشخصات جریان به نرم افزار Fluent [12] انتقال

داده شده و برای مقاطع ۸ گانه فوق الذکر توزیع دما بدست آمده است، نرم افزار با دریافت دمای ورودی سیال و شارهای

گرمایی از سطوح همچنین سرعت ورودی و خواص سیالات پس از حل دستگاه معادلات PDE ممتوم و انرژی، توزیع



سرعت و دما و همچنین پروفیل های مربوطه در مقاطع انتخابی را ارائه می دهد. تنها دمای دیواره ها را مشخص نمی کند که با ضمیمه کردن برنامه کوچکی روی آن برحسب وجود شارگرم و دمای گرهای مجاور جدار و فاصله شعاعی گرهای مقادیر دمای دیوار، دمای متوسط حجمی در مقاطع، ضریب جابجائی و اعداد ناسلت موضعی را محاسبه می نماید. قابل ذکر است که معادلات متشکله در Fluent با روش پیشنهادی یکسان بوده و شامل معادله بقاء انرژی و معادلات ممتوم بفرم تابع جریان و ترابرد چرخش Stream Function & Vorticity Formulation می باشد، فقط حل عددی پیشنهادی با استفاده از روش P.SOR بوده و حل عددی Fluent با استفاده از روش Upwind می باشد.

## ۵ - نتایج حاصل از محاسبات

جهت اجتناب از حجیم شدن متن از آوردن جداول نتایج پرهیز شده و اکتفا به نمودارهای مقایسه ای گردیده است که در ذیل اشکال مربوطه توضیحات لازم داده شده است.

قابل ذکر است که در دیاگرامهای استخراجی و مقایسه ای سه دسته اطلاعات موجود است که برای روش پیشنهادی جدید از عنوان داده های P.Work (کار حاضر) و برای مقادیر استخراجی از نرم افزار Fluent از همان عنوان و برای روش قبلی از عنوان داده های Kays استفاده شده است. یادآوری می نماید که چون در روش Kays با فرض یکی از سطوح عایق و سطح دیگر در تبادل گرما، مقادیر  $Nus_{ii}$  و  $Nus_{oo}$  حاصل شده و در ضمن حسب اعداد پرانتل و طولهای بی بعد برای وجوه داخلی و خارجی بترتیب فاکتورهای مشخصه  $Z_i$  و  $Z_o$  معرفی شده لذا یکسری محاسبات دستی روی آن مقادیر انجام گرفت تا  $Nus_o$  برای سطح خارجی و  $Nus_i$  برای سطح داخلی در تبادل حرارت همزمان بدست آید.

$$Nus_o = \frac{Nus_{oo}}{1 - (q''_i / q''_o)Z_o}, \quad Nus_i = \frac{Nus_{ii}}{1 - (q''_o / q''_i)Z_i}$$

ضمناً جهت شکل شدن منحنی ها، تبدیل مختصاتی به قرار زیر روی محورهای مختصات اعمال شده است.

$$NUS = 100 \log(NUS_x)$$

$$X = 50 \log(1000x^+)$$

نمودارهای مورد بحث در دو صفحه آخر و بطور یکجا جهت ملاحظه و مقایسه ارائه می شود.

## ۶ - بحث در نتایج

با توجه به شکل ۱ از داده های Kays منحنی های  $Nus_o$  برای اعداد پرانتل 10 و 0.7 در طول بی بعد 0.2 به مقادیر ثابت و یکسانی متقارب شده ولی برای عدد پرانتل 0.1 با اختلاف قابل ملاحظه به مقداری بزرگتر میل می کند. چون فلزات مذاب ضریب هدایت بسیار بالائی دارند و در طول ورودی حرارتی که گرادیان دما در جهت محوری جریان بزرگ می باشد، اثر هدایت طولی گرما با لایحه در جریان آرام و برای اعداد پکلت  $Pe < 50$  مهم و مؤثر می باشد [14,13]. در اینجا برحسب دمای ورودی  $Pe \cong 10.5$  است و اثر آن روی اعداد ناسلت موضعی در طول ورودی گرمائی کاهنده خواهد بود.

در روش Kays بلحاظ خطی کردن معادلات بقاء این اثر منظور نشده و حاصل در شکل ۱ و مقایسه آن با دو روش دیگر در شکل ۹ بصورت اعداد ناسلت بزرگتر ظاهر شده است.

در شکل ۴ برای  $Nus_i$  از داده های Kays باز هم نتایج  $Pr = 0.01$  بزرگتر از دو سیال دیگر است چون برای آب و هوا که  $Pe > 50$  می باشد اثر هدایت محوری حرارت در آنها بسیار ناچیز بوده و روی مقادیر ناسلت مؤثر نمی باشد.

در اشکال ۲، ۳، ۵ و ۶ که تغییرات  $Nus_i$  و  $Nus_o$  به ازاء هر سه عدد پرانتل از روشهای P.Work و Fluent بدست آمده اند تقارب منحنی ها به یک مقدار ثابت در انتهای طول ورودی حرارتی بدلیل حل دیفرانسیلی معادلات بقاء و با منظور نمودن اثر هدایت طولی سیال در امتداد محور جریان می باشد.

در اشکال ۱۰، ۱۱ و ۱۲ بلحاظ وجود نزول و صعود برای  $Nus_i$  از روش Kays تفاوت کاملاً آشکار با دو روش هم نتیجه دیگر ملاحظه می شود، در صورتیکه در دو روش اخیر این منحنی ها کلاً نزولی می باشند.

ضعف روش Kays مخصوصاً در  $Pr = 0.01$  که تا طول بی بعد  $x^+ = 0.02$  فاقد مقدار است در اشکال ۴ و ۱۲ مشاهده می شود. این تفاوت ناشی از قطع سری نامتناهی متشکل از مقادیر ویژه و توابع ویژه در حل معادله انرژی بوده و استفاده از تقریب لانگهار برای معادله ممنتوم و تقریب مشابه برای معادله انرژی در جهت خطی سازی آن می باشد. بطوریکه عدم لحاظ اثر هدایت طولی در سیال با  $Pr = 0.01$  نیز به موارد مذکور اضافه شده و شدت گرادیان دما در ابتدای طول ورودی به ایجاد نتایج نابجائی دامن زده که تا طول بی بعد  $0.02$  منحنی تغییرات  $Nus_i$  از الگوی خاصی تبعیت نکرده است.

البته قابل ذکر است که این دسته منحنی ها بر اساس نسبت شارهای گرمائی واحد بدست آمده و در سایر نسبت شارها منحنی های Kays از نظر نزولی بودن با دو روش اخیر همخوانی دارد. مقادیر ناسلت موضعی در روش اخیر در مبدا طولی تقریباً یکسان و نسبتاً بزرگ می باشد که ناشی از شرط عدم لغزش و حداکثر ترابرد چرخش در مقطع ورودی می باشد. سایر تفاوت های مقادیری بین دو روش اخیر ناشی از شبکه بندی و ابعاد عناصر طولی و شعاعی می باشد، هرچند که ضمن انجام محاسبات مقیاس مش بندی بگونه ای انتخاب شده که ابعاد شبکه روی نتایج اثرگذار نباشد ولی چون در دو روش، دومش بندی متفاوت بکار رفته لذا تفاوت نتایج عددی در قسمت طول ورودی حرارتی محسوس می باشد. یکسان بودن نتایج در مبدا طولی برای دو روش ناشی از همانند بودن راهکار و معادلات حاکم بوده و همچنین برابر بودن نتایج در انتهای طول ورودی ناشی از متغیر بودن لزجت سیالات انتخابی می باشد در صورتیکه نتایج روش Kays حتی در اشکال ۷ و ۸ که اثر هدایت طولی گرما در سیالات آندو شکل حائز اهمیت نبوده باز هم در انتهای طول ورودی که نیمرخ دماها در آنجا تکمیل شده اندکی تفاوت نشان می دهد که ناشی از فرض ثابت بودن لزجت و عدم وابستگی آن به دما بوده است.

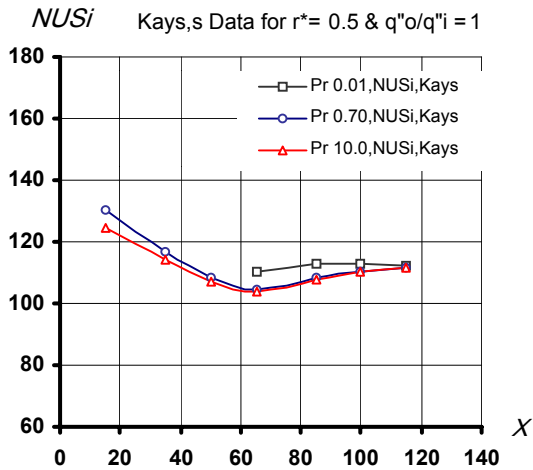
ایراد اساسی روش Kays آنست که برای حل مسئله بایستی شار گرمائی عبوری از سطوح مشخص باشد در صورتیکه اگر بین دو سیال ضمن تبادل حرارت مرز مشترک با شرایط جابجائی باشد تشخیص مقدار شار و یا محاسبه آن تقریباً ناممکن است چون نیاز به توزیع دما دارد در صورتیکه دو روش اخیر هر نوع شرط مرزی را می پذیرد. البته کار حاضر شرط تغییر دمای سطح یا شار گرمای متغیر در جدار نسبت به طول را با یکنواخت بودن شرایط محیطی مقاطع می پذیرد. توانائی روش Fluent نیز در مدارک خود نرم افزار تعریف شده است.

## ۷ - نتیجه گیری

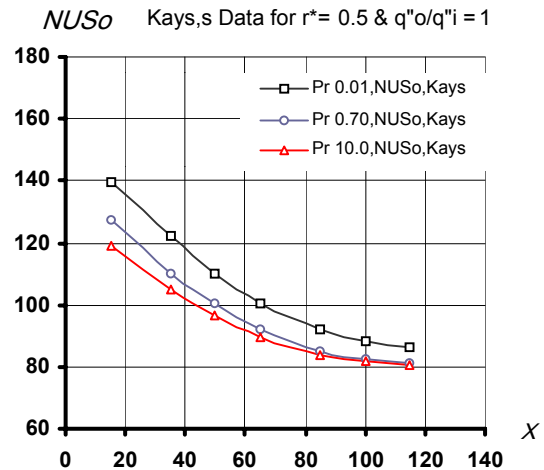
نتایج کار حاضر نسبت به روش های قبلی از دقت بالائی برخوردار است چرا که معادلات بقاء در فرم دیفرانسیلی و بیضی گون با لزجت متغیر با لحاظ اثر طولی هدایت گرما در سیال حل گردیده بطوریکه نتایج آن با نرم افزار Fluent نیز تایید شده است.

جامعیت کار حاضر بدلیل قابلیت پذیرش هرگونه شرط مرزی متداول و حتی تغییرات محوری شار گرما در مقایسه با روش های موجود که فقط شامل شرط شار گرمائی ثابت از جدار می باشند، محرز و مسلم است.

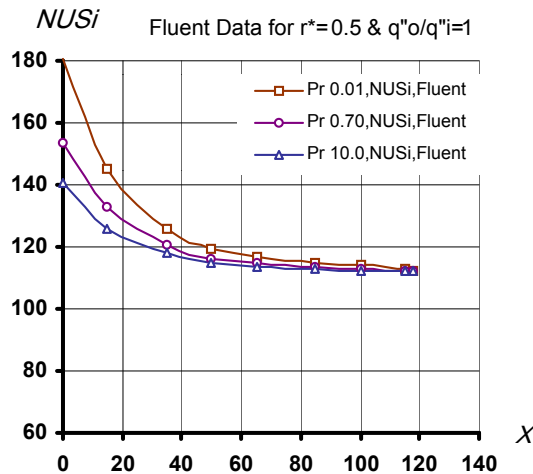
- [1] Ozisik, M.N., "Heat Transfer (A Basic Approach)", 3<sup>rd</sup> Print, Mc Graw-Hill International Edition, pp.307-322 & pp.736-744, 1988.
- [2] Heaton, H.S., Reynolds, W.C., and Kays, W.M., "Heat Transfer in Annular Passages. Simultaneous Development of Velocity and Temperature Fields in Laminar Flow", Int.J.Heat & Mass Transfer, vol. 7, no.7, pp.763-781, 1964.
- [3] Kays, W.M. and London, A.L., "Compact Heat Exchangers", 3<sup>rd</sup> ed., Mc Graw-Hill, New York, pp.115-140 & p.269, 1984.
- [4] Sellars, J.R., Tribus, M., and Klein, J.S., "Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit-The Graetz Problem Extended", Trans.ASME, vol.78, pp.441-448, 1956.
- [5] Lundberg, R.E., Reynolds, W.C., and Kays, W. M., "NASA TN D", Washington, D.C., 1972.
- [6] Kays, W.M., "Convective Heat and Mass Transfer", TMH ed. Tata Mc Graw-Hill, pp.53-63 & pp.102-150, 1975.
- [7] White, F.M., "Fluid Mechanics", Mc Graw-Hill, New York, 1986.
- [8] Arpaci, V.S. and Larsen, P.S., "Convection Heat Transfer", Prentice-Hall Inc. USA, pp.262-326, 1984.
- [9] Roache, P.J., "Computational Fluid Dynamics", Hermosa, Albuquerque, N.Mex., 1976.
- [10] Schmidt, F.W., Henderson, R.E., and Wolgemuth, C.H., "Introduction to Thermal Sciences", Pennsylvania State University, John Wiley & Sons, pp.421-427, 1984.
- [11] Reid, R.C., Prausnitz, J.M., and Poling, B.E., "The Properties of Gases and Liquids", 4<sup>th</sup> ed. , Mc Graw-Hill International Edition, Singapore, pp.433-474, 1988.
- [12] FLUENT Software Release 5.2.3 & CFD Modeling Design Software GAMBIT 1.1, Fluent Inc., Copyright 1999.
- [13] Hennecke, d.k., "Heat Transfer by Hagen-Poiseuille Flow in the Thermal Development Region with Axial Conduction", Warme-Stoffubtragung Bd., vol.1, pp.177-184, 1968.
- [14] Vick, B. and Ozisik, M.N., "Effects of Axial Conduction and Convective Boundary Conditions in Slug Flow inside a Circular Tube", J.Heat Transfer, no.103, pp.436-440, 1981.



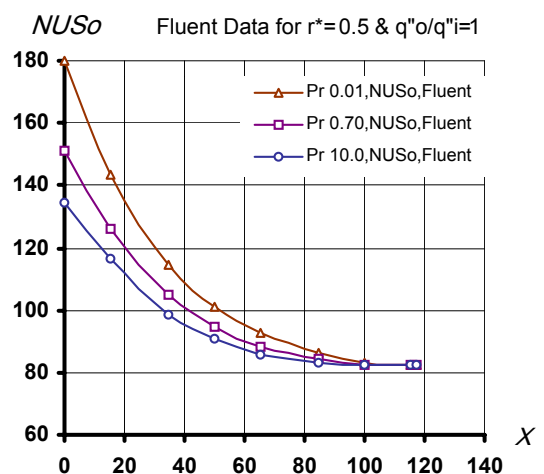
شکل ۴ - نحوه تغییرات  $Nus_i$  موضعی نسبت به  $x^+$  به ازاء Pr های مختلف از داده های Kays



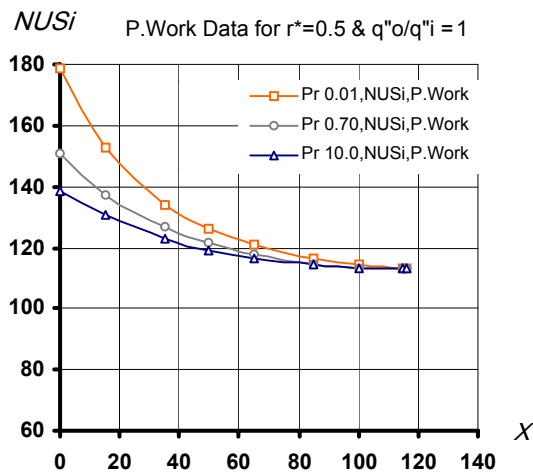
شکل ۱ - نحوه تغییرات  $Nus_o$  موضعی نسبت به  $x^+$  به ازاء Pr های مختلف از داده های Kays



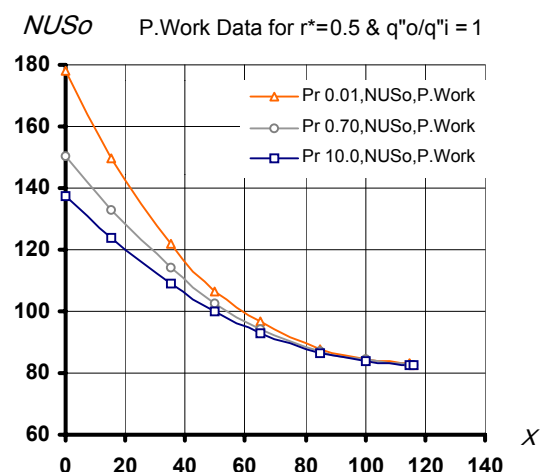
شکل ۵ - نحوه تغییرات  $Nus_i$  موضعی نسبت به  $x^+$  به ازاء Pr های مختلف از داده های Fluent



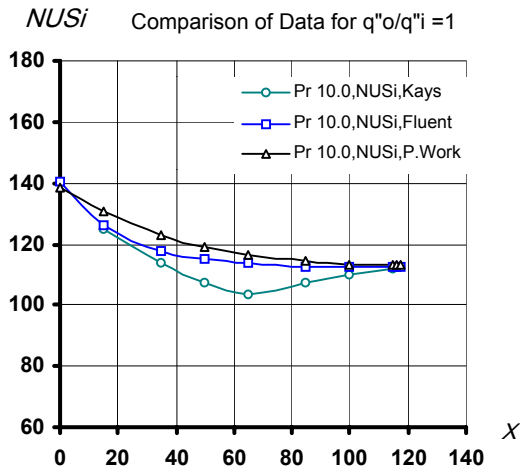
شکل ۲ - نحوه تغییرات  $Nus_o$  موضعی نسبت به  $x^+$  به ازاء Pr های مختلف از داده های Fluent



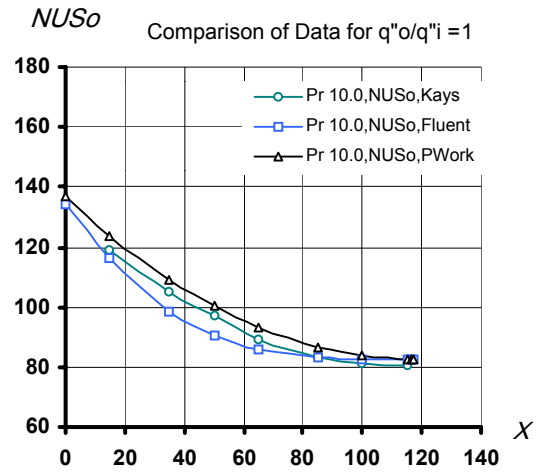
شکل ۶ - نحوه تغییرات  $Nus_i$  موضعی نسبت به  $x^+$  به ازاء Pr های مختلف از داده های P.Work



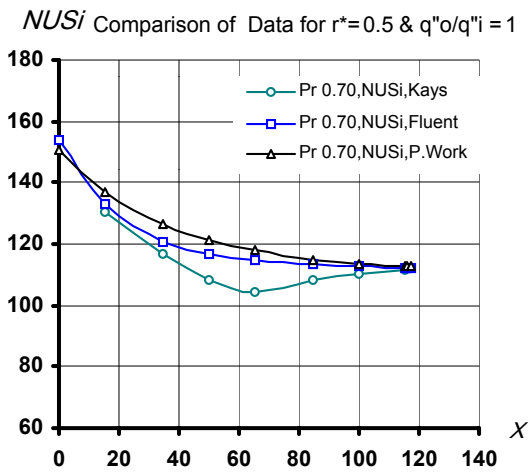
شکل ۳ - نحوه تغییرات  $Nus_o$  موضعی نسبت به  $x^+$  به ازاء Pr های مختلف از داده های P.Work



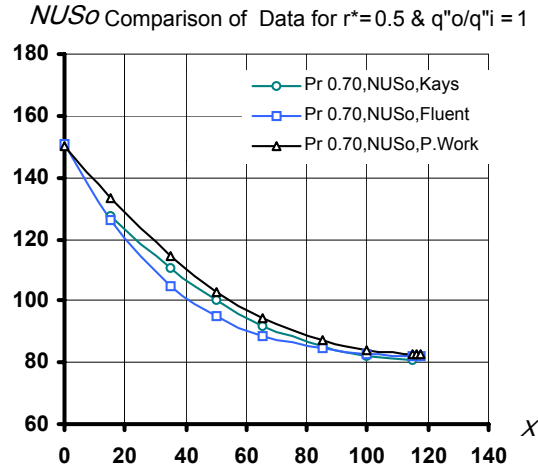
شکل ۱۰ - مقایسه مقادیر  $Nus_i$  نسبت به  $x^+$  به ازاء  $Pr = 10$  بین سه روش



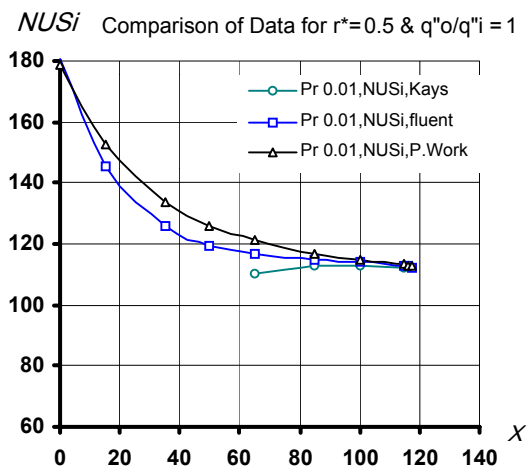
شکل ۷ - مقایسه مقادیر  $Nus_o$  نسبت به  $x^+$  به ازاء  $Pr = 10$  بین سه روش



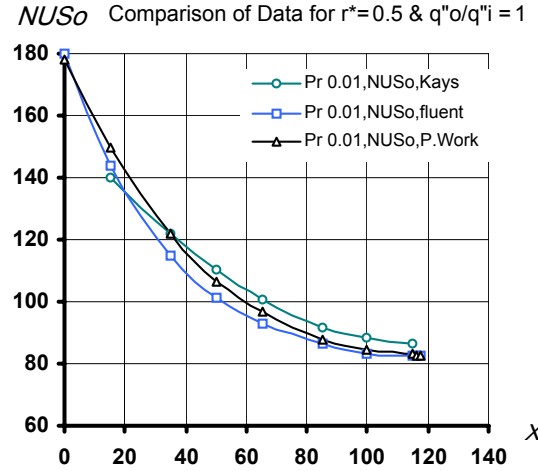
شکل ۱۱ - مقایسه مقادیر  $Nus_i$  نسبت به  $x^+$  به ازاء  $Pr = 0.7$  بین سه روش



شکل ۸ - مقایسه مقادیر  $Nus_o$  نسبت به  $x^+$  به ازاء  $Pr = 0.7$  بین سه روش



شکل ۱۲ - مقایسه مقادیر  $Nus_i$  نسبت به  $x^+$  به ازاء  $Pr = 0.01$  بین سه روش



شکل ۹ - مقایسه مقادیر  $Nus_o$  نسبت به  $x^+$  به ازاء  $Pr = 0.01$  بین سه روش



# SID



سرویس های  
ویژه



سرویس ترجمه  
تخصصی



کارگاه های  
آموزشی



بلاگ  
مرکز اطلاعات علمی



عضویت در  
خبرنامه



فیلم های  
آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛  
شبکه های توجه گرافی  
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از  
وب آوساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی