

کاربرد روش انباشته سازی^۱ در همگرایی الگوریتم چند شبکه ای برای شبکه های بی سازمان

رضا خاکسار فرد

دانشجوی کارشناسی ارشد

کریم مظاهری

استاد مهندسی هوافضا

تهران ، دانشگاه صنعتی شریف ، دانشکده مهندسی هوافضا

چکیده - معادلات اویلر در حالت پایای دو بعدی بر روی شبکه بی سازمان به روش چند شبکه ای حل می شوند و الگوریتم حل بصورت حجم محدود سلولی^۲ می باشد. شبکه های درشت مورد استفاده در روش چند شبکه ای با ترکیب کردن سلولهای شبکه ریز تولید می-شوند. (به همین دلیل این روش را انباشته سازی می نامند). در این روش در شبکه های درشت مرزها حفظ می شوند و پیچیدگیهای هندسی به خوبی نشان داده می شوند. شبکه های درشت قبل از قسمت اصلی برنامه تولید می شوند و زمانی که برای تولید آنها نیاز است نسبت به زمان محاسباتی در قسمت اصلی برنامه ناچیز است. دو مثال از اعمال این روش در الگوریتم چند شبکه ای ذکر شده اند که توانایی این روش را در افزایش نرخ همگرایی نشان می دهند.

واژه های کلیدی- (۱) معادلات اویلر (۲) شبکه های بی سازمان (۳) روش چند شبکه ای (۴) روش انباشته سازی

۱- مقدمه

شبکه های بی سازمان مثلی به دلیل تولید آسان در هندسه های پیچیده دارای اهمیت بسیاری می باشند. اگر چه در شبکه-های با سازمان گره ها و همسایه های هر سلول مشخص می باشند، حافظه مورد نیاز آنها کمتر است و زمان همگرایی نسبت به تعداد نقاط در آنها کمتر است اما در هندسه های پیچیده تولید آنها به صورتی که پیچیدگی را بخوبی نشان دهد، مشکل است. بنابر این ایده استفاده از شبکه های بی سازمان مطرح می شود. شبکه های بی سازمان را می توان براحتی در محلهای با پیچیدگی زیاد ریز کرد.

به دلیل کاربرد فراوان شبکه های بی سازمان، افزایش نرخ همگرایی آنها حائز اهمیت می باشد. یکی از قویترین روشها برای افزایش نرخ همگرایی، روش چند شبکه ای می باشد که برای اعمال آن نیاز به تولید شبکه درشت به کمک شبکه ریز می باشد. تولید این شبکه در شبکه های با سازمان آسان است زیرا با ترکیب هر چهار سلول همسایه ریز یک سلول درشت ایجاد می شود اما در شبکه های بی سازمان کار سخت تر است و روشهای مختلفی برای آن وجود دارند که هر یک مزایا و معایبی دارند. اولین روش به این صورت است که در ابتدا شبکه درشت تعیین می شود و سپس شبکه های ریزتر با ریزکردن یکنواخت شبکه درشت تولید می شوند [۱]. مزیت این روش این است که انتقال اطلاعات بین شبکه ها ساده تر است اما معایب زیادی

1- Agglomeration

2- Cell-Based

دارد. بزرگترین عیب بستگی توزیع نقاط شبکه ریز به شبکه درشت می باشد. بطور ایده ال نقاط شبکه ریز باید طوری توزیع شوند که خصوصیات هندسی را بخوبی ایجاد کنند درحالیکه در این روش، درشت ترین شبکه این خصوصیات را تعیین می کند. به علاوه درشت ترین شبکه باید آنقدر ریز باشد تا بتواند خصوصیات هندسی جسم را تعیین کند.

دومین روش تولید مجدد شبکه درشت می باشد [۲، ۳، ۴]. شبکه درشت می تواند کاملاً مستقل از شبکه ریز تولید شود و یا اینکه از هر قسمت از شبکه ریز گره هایی انتخاب شوند و بین گره های هر قسمت مجدداً شبکه تولید شود. در این روش کیفیت شبکه درشت بسیار خوب می باشد (مخصوصاً در حالتی که بطور کاملاً مستقل تولید شود) ولی در مرزها تولید شبکه درشت که بخوبی بتواند پیچیدگیهای هندسی را نشان دهد مشکل است به بیان دیگر ویژگیهای بحرانی هندسی بسیار ریز می باشد تا در شبکه درشت خود را نشان دهند و ممکن است هندسه مسئله در شبکه درشت تغییر کند.

در روش سوم یک زیر مجموعه از نقاط گره اولیه که در آن هیچ دو گره ای همسایه نمی باشند را یک زیرمجموعه گره های مستقل می نامند. سپس زیرمجموعه ای با تعریف فوق که دارای حداکثر تعداد گره ممکن باشد را می یابند. این زیرمجموعه را زیرمجموعه گره های مستقل پیشینه^۱ می نامند. آنگاه برای هر گره از این زیرمجموعه تمامی سلولهای شامل این گره را در نظر می گیرند و با جابجایی گره فوق به سمت یکی از گره های این سلولها، بدون تغییر شکل مرز خارجی سلولهای شامل گره فوق و بدون افزودن گره ای جدید، آن گره را حذف می کنند و طبیعتاً شبکه درشت تر تشکیل می گردد [۵]. این روش مرزها را می تواند حفظ کند زیرا می توان گره ها را طوری انتخاب کرد که پیچیدگیهای هندسی حفظ شود اما کنترل نسبت منظری در شبکه های درشت مشکل می باشد و برای درشت کردن شبکه محدودیت وجود دارد.

چهارمین روش، روش انباشته سازی می باشد [۶، ۷، ۸]. در این روش سلولهای درشت تر با ترکیب کردن سلولهای ریز بوجود می آیند و سلولهای شبکه درشت دیگر مثلثی نخواهند بود. در این روش مرزها حفظ می شوند و هیچگونه نگرانی برای حفظ مرزهای پیچیده وجود ندارد. برخلاف روش سوم می توان بدون محدودیت تعداد لایه ها را افزایش داد و شبکه را درشت تر کرد. این روش را برای حالت سه بعدی نیز می توان تعمیم داد و اعمال آن ساده تر از روشهای دوم و سوم است. توابع میانمایی و انتقال اطلاعات آسانتر از روشهای دوم و سوم (در حالت سلولی) بدست می آیند زیرا در این روش براحتی می توان سلولهای ریز تشکیل دهنده هر سلول درشت را پیدا کرد اما در روشهای دوم و سوم سلولهای درشت و ریز با هم تلاقی دارند و باید مشخص شود که هر سلول درشت شامل چه سلولهایی از شبکه ریز و چند درصد از مساحت آنها می باشد. مهمترین موضوع در روش انباشته سازی این است که برای تولید سلولهای درشت باید سلولهای ریز بطور مناسب با یکدیگر ترکیب شوند. در غیر این صورت سلولهای درشت دارای شکل یکنواخت و مناسبی نخواهند بود و نتیجه مطلوبی در افزایش نرخ همگرایی بدست نخواهد آمد.

در این مقاله ابتدا معادلات حاکم مورد نظر و روش عددی گسسته سازی آنها مطرح می شوند، پس از آن روش چند شبکه-ای بیان می شود (جزئیات روش چند شبکه ای بسیار زیاد است و مطالعه [۹] توصیه می شود.) و سپس الگوریتمی برای تولید شبکه به روش انباشته سازی ارائه می شود. در انتها برای آشنایی با مشخصات و خواص الگوریتم فوق و ارزیابی سرعت و دقت محاسبات و همچنین جهت مقایسه عملکرد با روشهای دیگر، دو مثال معروف یعنی جریان روی گوه با نیم زاویه رأس ۱۰ درجه و ماخ ۰/۵ و ایرفویل NACA 0012 با ماخ ۰/۸ و زاویه حمله ۱/۲۵ درجه بررسی شده اند. کد حل جریان با این روش و کد تولید شبکه های درشت به طور کامل نوشته شده است و قابلیت تبدیل برای شبکه های سه بعدی را نیز دارد.

۲- معادلات حاکم

معادلات کلی حاکم بر جریان معادلات اویلر می باشند که در حالت دو بعدی به یک معادله بقای جرم، دو معادله بقای اندازه حرکت در راستاهای X و Y و یک معادله انرژی تبدیل می شوند. این معادلات را بصورت زیر می توان خلاصه کرد.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint U dx dy + \int (f dx - g dy) = 0 \quad (1)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix} \quad (2)$$

برای حل این معادلات به دو معادله دیگر نیز نیاز می باشد که می توان آنها را بصورت زیر نوشت.

$$H = E + \frac{p}{\rho}, \quad p = \rho(\gamma - 1) \left[E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (3)$$

۳- گسسته سازی معادلات و شرایط اولیه و مرزی

معادلات بالا را می توان با تقسیم کردن میدان جریان به تعداد زیادی حجم کنترل و اعمال کردن معادله (1) روی هر حجم کنترل گسسته کرد. فرم حجم کنترل معادلات اویلر به صورت زیر نوشته می شود. (m تعداد اضلاع هر سلول است).

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^n = -\frac{1}{A} \left[\sum_{l=1}^m (f \Delta y - g \Delta x)_l \right] \quad (4)$$

برای محاسبه شار از روش رو^۱ استفاده می شود و برای به روز کردن معادلات از روش چند مرحله ای^۲ با شش مرحله به صورت زیر استفاده می شود.

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U^{(n)} \\ U^{(k)} &= U^{(n)} - \alpha_k \frac{\Delta t}{A} \text{Res}(U^{(k-1)}) \\ U^{(n+1)} &= U^{(6)} \\ \alpha_1 &= 0.0535 \quad \alpha_2 = 0.1267 \quad \alpha_3 = 0.2324 \quad \alpha_4 = 0.3973 \quad \alpha_5 = 0.6076 \quad \alpha_6 = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

1- Roe

2- Multi-Stage

برای اعمال شرط مرزی بینهایت ، از روش سلول مجازی با قرار دادن مقادیر بینهایت در آن استفاده می شود که روش محاسبه شار بطور خودکار تعداد اطلاعات لازم را از سلول فوق دریافت می کند . شرایط اولیه همان شرایط مرزی بینهایت یعنی $E_{\infty}, (\rho v)_{\infty}, (\rho u)_{\infty}, \rho_{\infty}$ در نظر گرفته می شوند و برای شرط مرزی دیواره از شرط مرزی آینه ای استفاده می شود .

۴- روش چند شبکه ای

این روش یکی از قوی ترین و هوشمندانه ترین روشها در دینامیک سیالات محاسباتی است . ایده روش چند شبکه ای این است که با استفاده از شبکه های درشت تر، جواب شبکه ریز اصلاح می شود . استفاده از شبکه های درشت تر دو مزیت دارد . یکی اینکه گامهای زمانی را در شبکه درشت تر می توان بزرگ کرد و دوم اینکه شبکه درشت تر محاسبات کمتری احتیاج دارد . روش چند شبکه ای سرعت از بین بردن خطاهای فرکانس پایین را افزایش می دهد زیرا خطاهای فرکانس پایین وقتی به شبکه درشت منتقل می شوند بصورت فرکانس بالا به نظر می آیند . در این روش برای از بین بردن مودهای خطا ، سلسله ای از شبکه های با اندازه مختلف استفاده می شود . شبکه درشت برای از بین بردن خطا سرعت زیادتر و دقت کمتری دارد ، بنابر این هدف در روش چند شبکه ای این است که دقت شبکه ریز و سرعت شبکه درشت ترکیب شوند .

در این مقاله از روش تخمین کامل^۱ که توسط برنت ارائه شده است استفاده می شود [۵]. در این روش کل مسئله غیر خطی از شبکه ریز به درشت منتقل می شود یعنی در شبکه های درشت نیز مسئله حل می شود . در ریزترین شبکه متغیرها با توجه به رابطه (۵) به روز رسانی می شوند سپس جواب و باقیمانده به شبکه درشت تر منتقل می شوند . در شبکه درشت یک جمله چشمه باید اضافه شود که با رابطه زیر محاسبه می شود . (h علامت شبکه ریز ، $2h$ علامت شبکه درشت ، $I_{h \rightarrow 2h}^R$ و $I_{h \rightarrow 2h}^U$ به ترتیب توابع انتقال جواب و باقیمانده از شبکه ریز به درشت و R_h باقیمانده در شبکه ریز می باشند .)

$$P_{2h} = I_{h \rightarrow 2h}^R R_h(U_h) - \text{Res}_{2h}(I_{h \rightarrow 2h}^U U_h) \quad (6)$$

پس از محاسبه P_{2h} ، به روز رسانی در شبکه درشت با رابطه زیر انجام می شود . (α_k همان مقادیر رابطه (۵) را دارد .)

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U^{(n)} \\ U^{(k)} &= U^{(n)} - \alpha_k \frac{\Delta t}{A} \text{Res}(U^{(k-1)} + P_{2h}) \\ U^{(n+1)} &= U^{(6)} \end{aligned} \quad (7)$$

$I_{h \rightarrow 2h}^R$ بر اساس میانگین گیری مساحتی می باشد اما برای انتقال باقیمانده باید بقاء وجود داشته باشد بنابر این $I_{h \rightarrow 2h}^U$ بصورت حاصل جمع تمام باقیمانده های سلولهای ریز تشکیل دهنده سلول درشت تعریف می شود . باید توجه داشت که $R_h(U_h)$ در لایه اول همان $\text{Res}_h(U_h)$ می باشد اما در لایه های بعدی برابر با $\text{Res}_h(U_h) + P_h$ می باشد . پس از رسیدن به درشت ترین شبکه ، در بازگشت جواب شبکه های ریز بصورت زیر اصلاح می شود .

$$U_h = U_h + I_{2h \rightarrow h}(U_{2h} - I_{h \rightarrow 2h}^U U_h) \quad (9)$$

۵- روش انباشته سازی

در روش انباشته سازی سلولهای شبکه درشت با ترکیب کردن سلولهای شبکه ریز تولید می شوند. مراحل این روش بصورت زیر می باشند:

الف) در اولین مرحله باید زیرمجموعه ای از گره های شبکه را که هیچ دوتایی تشکیل یک لبه^۱ را نمی دهند و هیچکدام جزء گره های مرزی نیستند، انتخاب کرد (شکلهای ۱- الف و ۱- ب). سپس سلولهای شامل هر یک از این گره ها را باید با یکدیگر ترکیب کرد (شکل ۱- پ). الگوریتم این مرحله بصورت زیر است:

۱) کل گره هایی را که روی مرز نیستند در یک آرایه ذخیره کن.

۲) گره شماره یک از این آرایه را انتخاب کن.

۳) سلولهای شامل این گره را با یکدیگر ترکیب کن تا یک سلول درشت تولید شود.

۴) گره هایی را که جزء این سلولها هستند از آرایه حذف کن.

۵) گره بعدی را از آرایه انتخاب کن (گره حذف نشده).

۶) به گام ۳ برگرد تا زمانی که تمامی گره های آرایه انتخاب شوند.

ب) در این مرحله سلولهایی که هنوز انتخاب نشده اند و هر سه همسایه آنها در سلولهای درشت قرار دارند، به آن سلول درشتی که تعداد سلولهای ریز آن کمتر است می چسبند.

پ) در این مرحله با سلولهایی که هنوز انتخاب نشده اند و هیچکدام از همسایه های آنها جزء سلولهای درشت نیستند، سلولهای درشت جدیدی تولید می شوند (شکل ۱- ت). الگوریتم این مرحله بصورت زیر است:

۱) سلولهایی را که تاکنون انتخاب نشده اند در یک آرایه ذخیره کن.

۲) اولین سلول این آرایه را انتخاب کن.

۳) اگر همسایه های این سلول جزء هیچ سلول درشتی نبودند، این سلول را با سلولهای همسایه اش ترکیب کن تا سلول درشت جدیدی تولید شود و همسایه های این سلول را از آرایه حذف کن.

۴) سلول بعدی را انتخاب کن (سلول حذف نشده بعدی).

۵) به گام ۳ برگرد تا زمانی که تمامی سلولهای آرایه انتخاب شوند.

ت) در این مرحله با سلولهای مرزی که هنوز انتخاب نشده اند و هیچکدام از همسایه های آنها جزء سلولهای درشت نیستند، سلولهای درشت جدیدی تولید می شوند (شکل ۱- ث). الگوریتم این مرحله به مانند مرحله قبل است.

ث) در این مرحله سلولهایی که مرزی نیستند و هنوز انتخاب نشده اند و ۲ سلول همسایه آنها در سلولهای درشت قرار دارند، به آن سلول درشتی که کمترین تعداد سلول ریز را دارد چسبیده می شوند. سپس برای سلولهایی که ۳ سلول همسایه آنها در سلولهای درشت قرار دارند همین کار تکرار می شود و در انتها برای سلولهای مرزی که ۲ سلول همسایه آنها در سلولهای درشت قرار دارند این کار تکرار می شود (شکل ۱- ج).

با انجام پنج مرحله فوق هیچ سلول ریز انتخاب نشده ای باقی نمی ماند به عبارت دیگر هر سلول ریزی جزء یکی از سلولهای درشت می باشد. برای تولید شبکه های درشت در لایه های بعدی نیز مراحل به همین شکل است با این تفاوت که الگوریتم بجای مثلث برای چند ضلعی نوشته می شود.

۶- نتایج

مسائلی که به عنوان نمونه آورده شده اند حل جریان پایای تراکم پذیر غیرلزج بر روی گوه و ایرفویل NACA 0012

می باشند

گوه

این مثال بدین جهت انتخاب شده است که کارایی این روش را در هندسه های ساده نیز نشان دهد. عدد ماخ جریان 0.5 و زاویه حمله 10° درجه می باشند. ریزترین شبکه به روش دلانی^۱ تولید شده است و دارای 1078 سلول و 584 گره می باشد (شکل ۲). شبکه لایه دوم دارای 156 سلول می باشد (شکل ۳) و همانطور که ملاحظه می شود شکل مناسب و یکنواختی دارد. شکل ۴ منحنی باقیمانده - تکرار و شکل ۵ منحنی باقیمانده - زمان را نشان می دهند. برای باقیمانده از نرم L_∞ استفاده شده است. تعداد لبه ها در لایه اول (ریزترین شبکه) 1661 می باشد و در لایه دوم به 604 کاهش می یابد پس تعداد محاسبات در لایه دوم 36% درصد لایه اول است. برای انتقال باقیمانده از لایه اول به لایه دوم باید باقیمانده را در لایه اول یک بار اضافه تر محاسبه کرد که 17% درصد محاسبات را افزایش می دهد. بنابر این تعداد محاسبات برای یک تکرار، در حالت دو شبکه ای حدوداً 53% درصد افزایش می یابد. (محاسبات مربوط به توابع انتقال اطلاعات ناچیز است.) اما با توجه به شکل ۴ تعداد تکرار در حالت دو شبکه ای حدوداً 65% درصد کاهش می یابد پس مجموعاً زمان حدود 45% درصد کاهش یابد که شکل ۵ نیز این مطلب را نشان می دهد. افزایش بیشتر تعداد لایه ها مقرون به صرفه نمی باشد زیرا کاهش تعداد تکرار، افزایش تعداد محاسبات را نمی تواند جبران کند. در جدول ۱ زمان و تعداد تکرار بر حسب تعداد لایه ها تا رسیدن به دقت 10^{-8} آورده شده است.

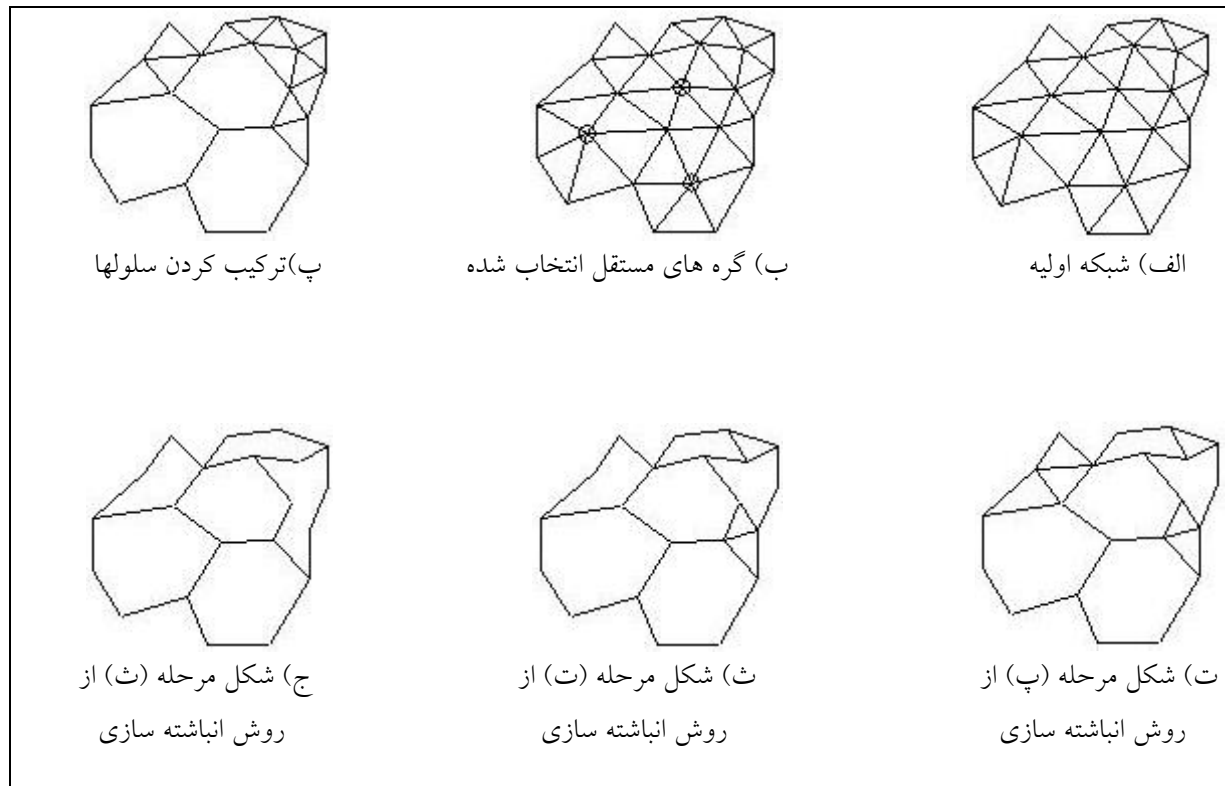
ایرفویل NACA 0012

برای این حالت عدد ماخ جریان 0.8 و زاویه حمله $1/25$ در نظر گرفته شده اند. شبکه ایجاد شده برای حل این جریان، مثلثی و به روش دلانی می باشد (شکل ۶) که دارای 1130 سلول و 606 گره می باشد. شبکه های لایه های دوم و سوم دارای 167 و 43 سلول می باشند (شکل های ۷ و ۸). در لایه دوم تعداد سلولهای ریز تشکیل دهنده سلولهای درشت بین 3 تا 9 سلول است اما این تغییر تعداد سلولها همه جا تدریجی است زیرا در هنگام تولید شبکه، تعداد سلولهای ریز تشکیل دهنده هر سلول درشت کنترل می شوند و به همین دلیل تغییر ناگهانی وجود ندارد و شکل شبکه یکنواخت و مناسب است. در لایه سوم نیز شبکه یکنواخت و مناسبی تولید شده است و کلاً در لایه های دوم و سوم روند تغییرات اندازه سلولها به مانند ریزترین شبکه می باشد یعنی از مرز بینهایت تا مرز جسم اندازه سلولها کوچک می شود.

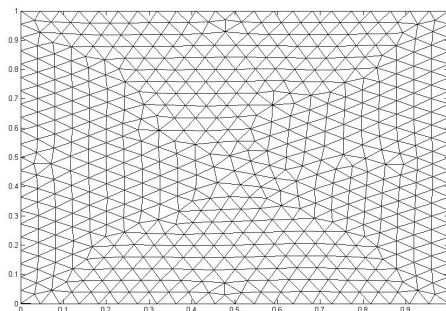
شکل ۹ منحنی باقیمانده - تکرار و شکل ۱۰ منحنی باقیمانده - زمان را نشان می دهند. تعداد لبه ها در لایه اول (ریزترین شبکه) 1736 می باشد و در لایه های دوم و سوم به 631 و 380 کاهش می یابد. مقدار افزایش نرخ همگرایی از حالت تک شبکه ای به دو لایه حدود 60% درصد و از حالت تک شبکه ای به سه لایه حدود 65% درصد می باشد و افزایش بیشتر تعداد لایه ها مقرون به صرفه نمی باشد. در حالت استفاده از سه لایه برای رسیدن به دقت مهندسی (10^{-3}) حدود 36 تکرار و $4/24$ ثانیه زمان لازم است. در جدول ۲ زمان و تعداد تکرار بر حسب تعداد لایه ها تا رسیدن به دقت 10^{-8} آورده شده است. زمان تولید شبکه های درشت کمتر از زمان دو تکرار در قسمت اصلی برنامه می باشد و قابل صرف نظر است.

1- Delaunay

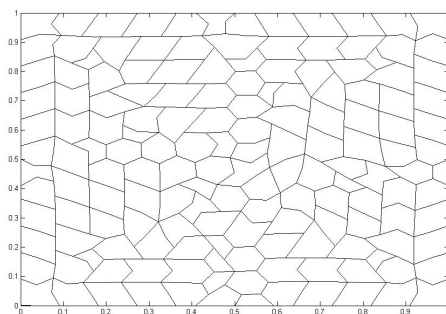
- [1] Connell, S. D., and Holmes, D. G., "A 3D Unstructured Adaptive Multigrid Scheme for the Euler Equations", AIAA Paper 93-3339-CP, July 1993.
- [2] Mavriplis, D. J., "Three Dimensional Unstructured Multigrid for the Euler Equations." ICASE Report No.91-41, 1991.
- [3] Mavriplis, D. J., "Accurate Multigrid Solution of the Euler Equations on Unstructured and Adaptive Meshes." AIAA Journal, Vol. 28, pp. 213-221, Feb. 1990.
- [4] Mavriplis, D. J., "Multigrid Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Triangular Meshes." AIAA Journal, Vol. 26, No. 7, pp. 824-831, July 1988.
- [5] Ollivier-Gooch, C. F., "Multigrid Acceleration of an Upwind Euler Solver on Unstructured Meshes," AIAA Journal, vol. 33, pp. 1822--1827, Oct. 1995.
- [6] Venkatakrisnan, V. and Mavriplis, D. J., "Agglomeration Multigrid for the 3D Euler Equations." AIAA paper 94-2332, June 1994.
- [7] Chan, T. F., Xu, J. and Zikatanov, L., "An agglomeration multigrid method for unstructured grids", Cont. Math, Vol. 218, pp. 67-81, 1998.
- [8] Mavriplis, D. J., "Multigrid Approaches to Non-linear Diffusion Problems on Unstructured Meshes", ICASE Report No. 2001-3, 2001
- [9] Briggs, W. L., "A Multigrid Tutorial", (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia), 1987.
- [10] Shankaran, S. and Jameson, A., "Aerodynamic and Aeroelastic Applications of a Parallel, Multigrid, Unstructured Flow Solver", 41th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV, January 2003.



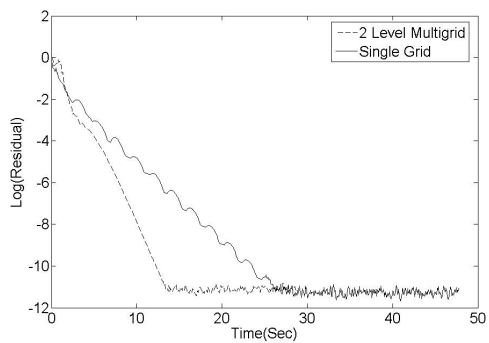
شکل ۱- مراحل روش انباشته سازی



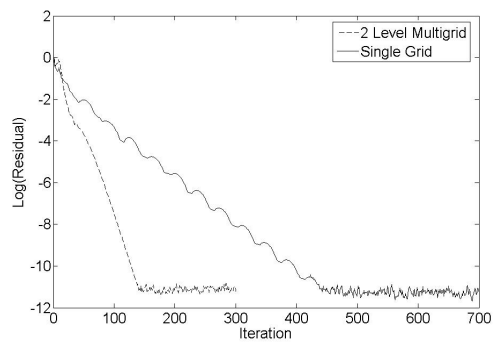
شکل ۲- شبکه مثلثی بی سازمان برای گوه



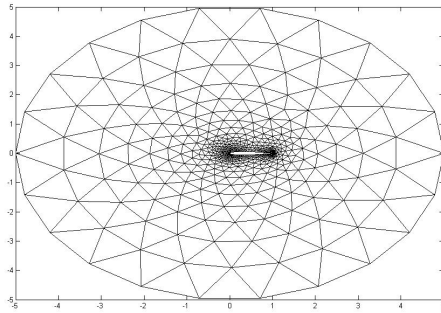
شکل ۳- شبکه تولید شده در لایه دوم برای گوه



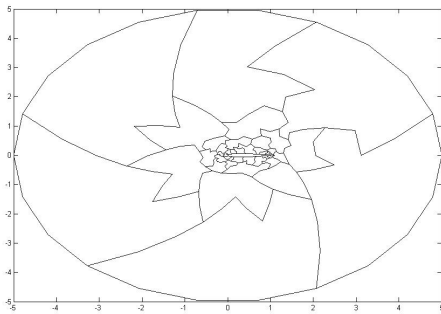
شکل ۵- منحنی باقیمانده- زمان برای گوه



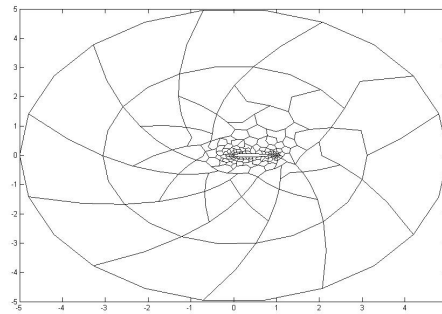
شکل ۴- منحنی باقیمانده- تکرار برای گوه



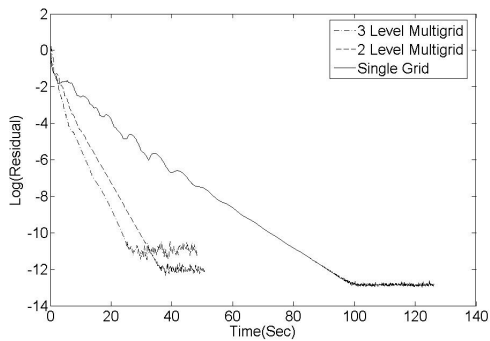
شکل ۶- شبکه مثلثی بی سازمان برای ایرفویل



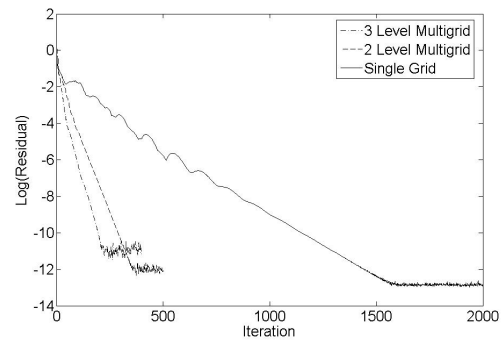
شکل ۸- شبکه تولید شده در لایه سوم
برای ایرفویل



شکل ۷- شبکه تولید شده در لایه دوم
برای ایرفویل



شکل ۱۰- منحنی باقیمانده- زمان برای ایرفویل



شکل ۹- منحنی باقیمانده- تکرار برای ایرفویل

جدول ۱-مقایسه زمان و تکرار بر حسب تعداد لایه ها برای گوه

تعداد لایه های روش چند شبکه ای	تعداد تکرار	زمان حل (ثانیه)	درصد کاهش زمان
۱	۲۹۳	۱۷/۳۳	-----
۲	۱۰۶	۱۰/۰۲	۴۲/۲

جدول ۲-مقایسه زمان و تکرار بر حسب تعداد لایه ها برای ایرفویل

تعداد لایه های روش چند شبکه ای	تعداد تکرار	زمان حل (ثانیه)	درصد کاهش زمان
۱	۸۵۷	۵۳/۸۰	-----
۲	۲۲۲	۲۲/۳۴	۵۸/۵۰
۳	۱۴۸	۱۷/۷۴	۶۷