

SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛
شبکه های توجه گرافی
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از
وب آوساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی

برنامه‌ریزی درجه دوم محدب تعمیم‌یافته برای حل دستگاه‌های خطی فازی

امید سلیمانی فرد^{۱*}، ناصر آخوندی^{**}، محدثه رمضان زاده^{**} و مرتضی گنج‌پزان^{*}

^{*}گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد

^{**}گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه دامغان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۵/۱۱

چکیده: دستگاه معادلات خطی، یکی از مهم‌ترین ابزارهای مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی است؛ اما از آنجایی که پدیده‌های دنیای واقعی همواره با عدم قطعیت همراه هستند، لذا حل دستگاه معادلات خطی فازی از اهمیت بسزایی برخوردار می‌شود. یکی از روش‌های متداول و پرکاربرد برای یافتن جواب‌های دقیق و تقریبی یک دستگاه معادلات خطی فازی، استفاده از روش کمترین مربعات است. در این روش، با انتخاب یک متر دلخواه و حل یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متناظر، جواب تقریبی (و گاه دقیق) برای دستگاه معادلات خطی فازی ارائه می‌شود. در این مقاله، ابتدا نشان می‌دهیم که مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متناظر با سه متر مختلف معروف و متداول، تحت شرایط مناسب مستقل از نوع تابع متر انتخاب شده، محدب است. سپس با در نظر گرفتن این سه متر متفاوت، با حل مثال‌های متعدد و مقایسه جواب‌های تقریبی به دست آمده از آن‌ها، به دنبال انتخاب بهترین متر خواهیم بود.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی، مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب، روش کمترین مربعات.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰C۲۰، ۱۵A۰۶.

۱- مقدمه

جمع‌آوری اطلاعات و داده‌های دقیق برای توصیف رفتار سیستم‌های دنیای واقعی برای علوم تجربی و مهندسی کاری بس مشکل و گاه ناممکن است. از این‌رو مدل‌سازی این نوع سیستم‌ها با

عدم قطعیت همراه می‌شود. شاید بتوان این‌گونه اذعان داشت که با افزایش پیچیدگی سیستم‌ها، دقت مدل‌های ریاضی کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکل، روش‌های گوناگون و بسیاری مانند روش‌های احتمالی، آنالیز بازه‌ای، مجموعه‌های فازی و ... تاکنون پیشنهاد شده‌اند. نظریه مجموعه‌های فازی قادر است به بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌های نادقیق و مبهم، صورت‌بندی ریاضی بخشد و زمینه خوبی برای استدلال و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت فراهم آورد؛ بنابراین در دهه‌های اخیر تلفیق منطق و نظریه مجموعه‌های فازی با بسیاری از ابزارهای فرمول‌بندی مسائل دنیای واقعی (مانند بهینه‌سازی، معادلات دیفرانسیل، دستگاه معادلات خطی و ...) مورد توجه پژوهشگران و محققان قرار گرفته است [۱]. از جمله، در سال‌های اخیر محققان بسیاری به مطالعه روش‌های حل دستگاه معادلات خطی فازی^۱ پرداخته‌اند و روش‌های مستقیم و تکراری بسیاری برای حل آن ارائه داده‌اند [۲-۶]. در این مقالات حالت‌های مختلف دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x} = \tilde{b}$ در نظر گرفته شده است. از جمله کارهای انجام شده در سال‌های اخیر در این زمینه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. الله ویرانو و قنبری [۷]، براساس نظریه بازه‌ها و مفهوم جدید دستگاه خطی بازه شمول^۲، روشی مؤثر برای حل دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x} = \tilde{b}$ ارائه کردند. در سال ۲۰۱۷، نجاریان و همکاران نیز با در نظر گرفتن اعداد فازی نوع ۲، روشی برای حل این دستگاه مورد بررسی قرار دادند. اخیراً در سال ۲۰۱۸ در [۳]، با استفاده از مفهوم معکوس تصمیم‌یافته، جواب دستگاه معادلات خطی فازی $n \times n$ با ماتریس ضرایب حقیقی مقدار منفرد یا نامنفرد محاسبه شده است. هم‌چنین قنبری در [۸] روشی را برای حل دستگاه خطی فازی $\tilde{A}x = \tilde{b}$ با پارامترهای فازی مثلثی ارائه کرد و شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری این نوع دستگاه را نیز بیان و ثابت کرد. باببر و همکاران در [۹] به منظور یافتن دستگاه معادلات خطی کاملاً فازی $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ ، با در نظر گرفتن اعداد فازی مثلثی، روش‌های عددی جدیدی بیان نموده‌اند. اینرات در پایان‌نامه خود روش‌های عددی حل معادلات خطی فازی و کاملاً فازی را بیان نموده است و به‌طور جداگانه در [۱۰] به همراه همکارانش به مطالعه و بررسی همگرایی روش‌های عددی ژاکوبی، گوس-سایدل و SOR^3 در راستای حل دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x} = \tilde{b}$ پرداخته است.

در بسیاری از موارد ممکن است دستگاه معادلات خطی فازی جواب دقیق نداشته باشد، در این صورت یافتن جواب تقریبی برای این دستگاه مورد نیاز است. یکی از روش‌های یافتن جواب تقریبی دستگاه خطی فازی، روش کمترین مربعات^۴ است [۱۱، ۱۲]. به عبارت دقیق‌تر، در [۱۱] با در

- 1- Fuzzy linear system
- 2- Interval inclusion linear system
- 3- Successive over-relaxation
- 4- Least squares

نظر گرفتن اعداد فازی مثلثی و استفاده از روش کمترین مربعات و تقریب متر مینگ، حل دستگاه معادلات خطی فازی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی درجه دوم تبدیل می‌شود. در این مقاله، با تعمیم این روش برای اعداد فازی دوزنقه‌ای و در نظر گرفتن دو متر دیگر به مقایسه نتایج می‌پردازیم. در واقع، محققان بسیاری در مقالات متنوع از جمله [۱۱، ۱۵ و ۱۶]، این موضوع را با انتخاب سه متر معروف مینگ، تقریب مینگ و پی مورد بررسی قرار داده‌اند، به طوری که در هر حالت، یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متمایز به دست می‌آید؛ اما متأسفانه، مبحث بررسی محدب بودن این مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم در این مقالات مغفول مانده است. از این رو، اولین و مهم‌ترین هدف این مقاله، فراهم نمودن شرایطی است که نشان‌دهنده محدب بودن مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم حاصل از اعمال روش کمترین مربعات برای حل دستگاه معادلات خطی فازی (فارغ از نوع متر انتخابی) باشد.

ساختار این مقاله به شرح ذیل سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲، مفاهیم اولیه مجموعه‌های فازی را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، با در نظر گرفتن دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x} = \tilde{b}$ ، به بیان جزئیات روش کمترین مربعات با در نظر گرفتن سه متر مینگ، تقریب مینگ و پی می‌پردازیم. علاوه بر این، نشان می‌دهیم که مسئله برنامه‌ریزی به دست آمده تحت چه شرایطی یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب است. در بخش ۴، ماتریس ضرایب $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را به صورت یک ماتریس تصادفی مربعی و یا غیر مربعی، کامل یا غیر کامل با ابعاد متوسط و بزرگ در نظر می‌گیریم و نتایج محاسباتی حاصل در بخش ۳ را با حل این دستگاه‌های تصادفی، با در نظر گرفتن سه متر مذکور، مورد مقایسه قرار می‌دهیم. در اینجا متذکر می‌شویم که مقایسه نتایج حاصل، توسط تابع رتبه^۱ بیان شده در [۱۳] و نرم بی‌نهایت صورت گرفته است.

۲- مفاهیم اولیه

برای اجتناب از آوردن مفاهیم تکراری فرض می‌کنیم که خواننده این مقاله با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی آشنایی اولیه دارد! لذا به طور خلاصه فقط برخی نمادها و مفاهیم لازم و ضروری را در این بخش مرور می‌کنیم.

تعریف ۱. مجموعه‌ی فازی \tilde{A} روی مجموعه‌ی مرجع X را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مانند

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

تعریف کنیم که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت x نامیده می‌شود. هرچه $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به یک نزدیک‌تر باشد، x بیشتر به \tilde{A} تعلق دارد.

تعریف ۲. مجموعه نقاطی از مجموعه‌ی مرجع X که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ باشد را تکیه‌گاه مجموعه فازی \tilde{A} می‌نامیم و با نماد $supp(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم، به عبارت دیگر

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

تعریف ۳. مقدار $M = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$ را ارتفاع مجموعه‌ی فازی \tilde{A} می‌نامیم. اگر ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی برابر یک باشد، آنگاه نرمال است در غیر این صورت زیر نرمال است.

تعریف ۴. زیرمجموعه‌ای از X که درجه‌ی عضویت اعضای آن در مجموعه فازی \tilde{A} حداقل به بزرگی r ، ($0 < r \leq 1$) باشد را r -برش \tilde{A} می‌نامیم و با نماد $[\tilde{A}]_r$ نشان می‌دهیم؛ به عبارت دیگر،

$$[\tilde{A}]_r = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\},$$

و برای $r = 0$ داریم

$$[\tilde{A}]_0 = \overline{\{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\}},$$

که در آن \bar{A} نشان‌دهنده‌ی بستار مجموعه A است.

تعریف ۵. مجموعه‌ی فازی را محدب می‌نامیم اگر هر r -برش \bar{A} به ازای $0 \leq r \leq 1$ محدب باشند.

تعریف ۶. زیرمجموعه فازی \tilde{u} روی خط حقیقی \mathbb{R} یعنی $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ را در نظر بگیرید. در این صورت \tilde{u} عدد فازی است اگر در شرایط زیر صدق کند

- \tilde{u} نرمال باشد،
- \tilde{u} مجموعه‌ی فازی محدب باشد،
- \tilde{u} از بالا نیم‌پیوسته باشد،
- $[\tilde{u}]_0$ در \mathbb{R} فشرده باشد.

تعریف ۷. [۱۴] عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-b}{\beta} & b \leq x \leq b + \beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

را عدد فازی دوزنقه‌ای می‌نامیم.

۳- روش کمترین مربعات برای حل دستگاه خطی فازی

تعریف ۸. دستگاه

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \quad (1)$$

را که در آن $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $\tilde{b} \in F(\mathbb{R}^m)$ ، $\tilde{x} \in F(\mathbb{R}^n)$ است، یک دستگاه خطی فازی می‌نامیم. در روش کمترین مربعات، می‌گوییم \tilde{x} یک جواب تقریبی برای دستگاه (۱) است اگر $A\tilde{x}$ کمترین فاصله را تا \tilde{b} داشته باشد که برای نشان دادن این فاصله می‌توان از مترهای مختلفی که بین دو عدد فازی تعریف شده است استفاده کنیم [۱۱، ۱۵ و ۱۶]. در اینجا به معرفی روش کمترین مربعات با استفاده از سه متر متفاوت می‌پردازیم و سپس نتایج عددی حاصل از مقایسه‌ی این سه متر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید $D : F(\mathbb{R}^n) \times F(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ یک متر دلخواه باشد، در این صورت با حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی

$$\begin{aligned} \text{Min } r(\tilde{x}) &= D^r(A\tilde{x}, \tilde{b}) \\ \text{s.t.} & \\ \tilde{x} &\in F(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (2)$$

می‌توان جوابی تقریبی برای دستگاه خطی فازی $A\tilde{x} = \tilde{b}$ به دست آورد. در مسئله‌ی (۲) می‌گوییم \tilde{x} یک جواب دقیق است اگر و تنها و اگر $r(\tilde{x}) = 0$ ، در غیر این صورت جواب به دست آمده را یک جواب تقریبی می‌نامیم. با در نظر گرفتن اعداد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m)$ که برای هر $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, m$ داریم $\tilde{x}_i = (x_i^l, x_i^r, x_i^\alpha, x_i^\beta)$ و $\tilde{b}_j = (b_j^l, b_j^r, b_j^\alpha, b_j^\beta)$ می‌توان نوشت

$$A\tilde{x} = (B^+x^l + B^-x^r, B^+x^r + B^-x^l, B^+x^\alpha - B^-x^\beta, B^+x^\beta - B^-x^\alpha), \quad (3)$$

که در آن دو ماتریس

$$(B^+)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & a_{ij} \geq 0 \\ 0 & a_{ij} < 0 \end{cases}, \quad (B^-)_{ij} = \begin{cases} 0 & a_{ij} \geq 0 \\ a_{ij} & a_{ij} < 0 \end{cases}. \quad (4)$$

متناظر با ماتریس A در دستگاه خطی (۱) تعریف می‌شوند. در ادامه نشان می‌دهیم که بنا به متر D انتخاب شده، مسئله (۲) به مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم زیر

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad r(x) &= \frac{1}{2} x^T Q x + f^T x + c \\ \text{s.t.} \quad & x = (x^l, x^r, x^\alpha, x^\beta)^T, \\ & x^l \leq x^r, \\ & x^\alpha \geq 0, \quad x^\beta \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

تبدیل می‌شود که در آن

$$\begin{aligned} x^l &= (x_1^l, \dots, x_n^l)^T, \quad x^r = (x_1^r, \dots, x_n^r)^T, \\ x^\alpha &= (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)^T, \quad x^\beta = (x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)^T, \end{aligned}$$

بردارهای حقیقی مقدار هستند. لازم به ذکر است که ماتریس‌های Q ، f و عدد اسکالر c در مسئله‌ی (۵) براساس متر انتخاب شده متفاوت خواهند بود که در ادامه این ماتریس‌ها را برای سه متر متفاوت به دست می‌آوریم و در نهایت به مقایسه نتایج حاصل از این سه متر می‌پردازیم.

(۱) متر مینگ [۱۵]: فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v} \in F(\mathbb{R})$ که $[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)]$ و

$[\tilde{v}]_r = [\underline{v}(r), \bar{v}(r)]$ ، در این صورت تابع $D_M : F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ با ضابطه‌ی

$$D_M^r(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_0^1 (\underline{u}(r) - \underline{v}(r))^r dr + \int_0^1 (\bar{u}(r) - \bar{v}(r))^r dr; \quad (6)$$

را متر مینگ^۱ بین دو عدد فازی \tilde{u}, \tilde{v} می‌نامند.

حال فرض کنید $\tilde{A} = (a^l, a^r, a^\alpha, a^\beta)$ و $\tilde{B} = (b^l, b^r, b^\alpha, b^\beta)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} D_M^v(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \int_0^1 (\underline{a}(r) - \underline{b}(r))^r dr + \int_0^1 (\bar{a}(r) - \bar{b}(r))^r dr \\ &= \int_0^1 ((a^l + (r-1)a^\alpha) - (b^l + (r-1)b^\alpha))^r dr \\ &\quad + \int_0^1 ((a^r + (1-r)a^\beta) - (b^r + (1-r)b^\beta))^r dr \quad (7) \\ &= (a^l - b^l)^r + (a^r - b^r)^r + \frac{1}{3}(a^\alpha - b^\alpha)^r + \frac{1}{3}(a^\beta - b^\beta)^r \\ &\quad - (a^l - b^l)(a^\alpha - b^\alpha) + (a^r - b^r)(a^\beta - b^\beta). \end{aligned}$$

بنابراین اگر در دستگاه خطی فازی (۱)، اعداد فازی دوزنقه‌ای

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n), \quad \tilde{x}_i = (x_i^l, x_i^r, x_i^\alpha, x_i^\beta), \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \tilde{b} &= (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m), \quad \tilde{b}_j = (b_j^l, b_j^r, b_j^\alpha, b_j^\beta), \quad \forall j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (8)$$

را در نظر بگیریم، با استفاده از رابطه‌ی (۷) و (۳) می‌توان تابع هدف مسئله‌ی (۲) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} r(\tilde{x}) &= \mathfrak{R}D_M^v(A\tilde{x}, \tilde{b}) \\ &= \mathfrak{R}(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^l + B^-x^r - b^l) \\ &\quad + \mathfrak{R}(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^r + B^-x^l - b^r) \\ &\quad + (B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \quad (9) \\ &\quad + (B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta) \\ &\quad - \mathfrak{R}(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \\ &\quad + \mathfrak{R}(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta), \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} x^l &= (x_1^l, \dots, x_n^l)^T, x^r = (x_1^r, \dots, x_n^r)^T, x^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)^T, x^\beta = (x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)^T, \\ b^l &= (b_1^l, \dots, b_m^l)^T, b^r = (b_1^r, \dots, b_m^r)^T, b^\alpha = (b_1^\alpha, \dots, b_m^\alpha)^T, b^\beta = (b_1^\beta, \dots, b_m^\beta)^T. \end{aligned} \quad (10)$$

حال اگر قرار دهیم

$$S = B^{+T}B^+ + B^{-T}B^-, \quad R = B^{+T}B^- + B^{-T}B^+. \quad (11)$$

ماتریس‌های Q_M ، f_M و عدد اسکالر c_M متناظر با متر مینگ در مسئله‌ی (۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$Q_M = \begin{bmatrix} \epsilon S & \epsilon R & -\nu S & \nu R \\ \epsilon R & \epsilon S & -\nu R & \nu S \\ -\nu S & -\nu R & \nu S & -\nu R \\ \nu R & \nu S & -\nu R & \nu S \end{bmatrix},$$

$$f_M = \begin{bmatrix} -\epsilon B^{+T} b^l - \epsilon B^{-T} b^r + \nu B^{+T} b^\alpha - \nu B^{-T} b^\beta \\ -\epsilon B^{-T} b^l - \epsilon B^{+T} b^r + \nu B^{-T} b^\alpha - \nu B^{+T} b^\beta \\ -\nu B^{+T} b^\alpha + \nu B^{-T} b^\beta + \nu B^{+T} b^l + \nu B^{-T} b^r \\ \nu B^{-T} b^\alpha - \nu B^{+T} b^\beta - \nu B^{-T} b^l - \nu B^{+T} b^r \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$c_M = \nu b^{lT} b^l + \nu b^{rT} b^r + b^{\alpha T} b^\alpha + b^{\beta T} b^\beta - \nu b^{lT} b^\alpha + \nu b^{rT} b^\beta$$

(۲) تقریب متر مینگ [۱۱]: قنبری و مهدوی امیری در [۱۱] نشان داده‌اند که اگر در ضابطه‌ی

(۶) برای محاسبه‌ی هر انتگرال از فرمول انتگرال ذوزنقه‌ای^۱

$$\int_a^b f(r) dr \simeq \frac{1}{4} (f(a) + f(b)),$$

استفاده کنیم، در این صورت فرمول تقریبی

$$D_{Am}^x(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{4} \left[(\underline{u}(a) - \underline{v}(a))^x + (\underline{u}(b) - \underline{v}(b))^x + (\bar{u}(a) - \bar{v}(a))^x + (\bar{u}(b) - \bar{v}(b))^x \right] \quad (13)$$

برای متر مینگ دو عدد فازی \tilde{u} و \tilde{v} حاصل می‌شود.

در نتیجه، برای دو عدد ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a^l, a^r, a^\alpha, a^\beta)$ و $\tilde{B} = (b^l, b^r, b^\alpha, b^\beta)$ خواهیم داشت

$$D_{Am}^x(\tilde{A}, \tilde{B}) = (a^l - b^l)^x + (a^r - b^r)^x + \frac{1}{4} (a^\alpha - b^\alpha)^x + \frac{1}{4} (a^\beta - b^\beta)^x - (a^l - b^l)(a^\alpha - b^\alpha) + (a^r - b^r)(a^\beta - b^\beta). \quad (14)$$

بنابراین با در نظر گرفتن اعداد فازی ذوزنقه‌ای (۸) و تقریب متر مینگ و روابط (۱۰) و (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 r(\tilde{x}) &= \imath D_{Am}^r (A\tilde{x}, \tilde{b}) \\
 &= \imath (B^+ x^l + B^- x^r - b^l)^T (B^+ x^l + B^- x^r - b^l) \\
 &\quad + \imath (B^+ x^r + B^- x^l - b^r)^T (B^+ x^r + B^- x^l - b^r) \\
 &\quad + (B^+ x^\alpha - B^- x^\beta - b^\alpha)^T (B^+ x^\alpha - B^- x^\beta - b^\alpha) \\
 &\quad + (B^+ x^\beta - B^- x^\alpha - b^\beta)^T (B^+ x^\beta - B^- x^\alpha - b^\beta) \\
 &\quad - \imath (B^+ x^l + B^- x^r - b^l)^T (B^+ x^\alpha - B^- x^\beta - b^\alpha) \\
 &\quad + \imath (B^+ x^r + B^- x^l - b^r)^T (B^+ x^\beta - B^- x^\alpha - b^\beta).
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

و در نتیجه ماتریس‌های Q_{Am} و f_{Am} و عدد اسکالر c_{Am} در مسئله‌ی (۵) به صورت

$$Q_{Am} = \begin{bmatrix} \imath S & \imath R & -\imath S & \imath R \\ \imath R & \imath S & -\imath R & \imath S \\ -\imath S & -\imath R & \imath S & -\imath R \\ \imath R & \imath S & -\imath R & \imath S \end{bmatrix}, f_{Am} = \begin{bmatrix} -\imath B^{+T} b^l - \imath B^{-T} b^r + \imath B^{+T} b^\alpha - \imath B^{-T} b^\beta \\ -\imath B^{-T} b^l - \imath B^{+T} b^r + \imath B^{-T} b^\alpha - \imath B^{+T} b^\beta \\ -\imath B^{+T} b^\alpha + \imath B^{-T} b^\beta + \imath B^{+T} b^l + \imath B^{-T} b^r \\ \imath B^{-T} b^\alpha - \imath B^{+T} b^\beta - \imath B^{-T} b^l - \imath B^{+T} b^r \end{bmatrix}, \tag{۱۶}$$

$$c_{Am} = \imath b^{lT} b^l + \imath b^{rT} b^r + b^{\alpha T} b^\alpha + b^{\beta T} b^\beta - \imath b^{lT} b^\alpha + \imath b^{rT} b^\beta$$

خواهد بود که در آن ماتریس‌های S و R مطابق با رابطه‌ی (۱۱) محاسبه می‌شود.

(۳) متر پی [۱۶]: براساس متر تعریف شده در [۱۷]، می‌توان متر زیر را برای دو عدد فازی در نظر گرفت.

تعریف ۹. فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v} \in F(\mathbb{R})$ که $[\underline{u}(r), \bar{u}(r)]$ و $[\underline{v}(r), \bar{v}(r)]$ باشند، در این صورت فاصله‌ی $D_{p,f}$ بین \tilde{u} و \tilde{v} به صورت

$$D_{p,f}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\int_0^1 f(\lambda) \left(\left| \underline{u}(\lambda) - \underline{v}(\lambda) \right|^p + \left| \bar{u}(\lambda) - \bar{v}(\lambda) \right|^p \right) d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود که در آن تابع f تابعی صعودی روی بازه $[0, 1]$ با خاصیت

$$f(0) = 0, \quad \int_0^1 f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{p},$$

است. با فرض $p = 2$ و $f(\lambda) = \lambda$ ، $D_{p,f}$ با نماد D_p نشان داده می‌شود [۱۶] و خواهیم داشت

$$D_p(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left[\int_0^1 \lambda \left(\left| \underline{u}(\lambda) - \underline{v}(\lambda) \right|^r + \left| \bar{u}(\lambda) - \bar{v}(\lambda) \right|^r \right) \right]^{\frac{1}{r}}. \quad (17)$$

با در نظر گرفتن دو عدد دوزنقه‌های $\tilde{A} = (a^l, a^r, a^\alpha, a^\beta)$ و $\tilde{B} = (b^l, b^r, b^\alpha, b^\beta)$ و محاسبه‌ی انتگرال معین رابطه‌ی (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} D_p^r(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \int_0^1 r \left((a^l + (r-1)a^\alpha) - (b^l + (r-1)b^\alpha) \right)^r dr \\ &\quad + \int_0^1 r \left((a^r + (1-r)a^\beta) - (b^r + (1-r)b^\beta) \right)^r dr \\ &= \frac{1}{r} (a^l - b^l)^r + \frac{1}{r} (a^r - b^r)^r + \frac{1}{1-r} (a^\alpha - b^\alpha)^r + \frac{1}{1-r} (a^\beta - b^\beta)^r \\ &\quad - \frac{1}{r} (a^l - b^l) (a^\alpha - b^\alpha) + \frac{1}{r} (a^r - b^r) (a^\beta - b^\beta). \end{aligned} \quad (18)$$

بنابراین مشابه دو حالت قبل، برای اعداد فازی دوزنقه‌های \tilde{x} و \tilde{b} در دستگاه خطی فازی (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} r(\tilde{x}) &= 12D_p^r(A\tilde{x}, \tilde{b}) \\ &= \epsilon(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^l + B^-x^r - b^l) \\ &\quad + \epsilon(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^r + B^-x^l - b^r) \\ &\quad + (B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \\ &\quad + (B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta) \\ &\quad - \epsilon(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \\ &\quad + \epsilon(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta). \end{aligned} \quad (19)$$

متناظر با متر پی، ماتریس‌های موجود در مسئله‌ی (۵) به‌صورت زیر خواهد بود

$$Q_p = \begin{bmatrix} 12S & 12R & -4S & 4R \\ 12R & 12S & -4R & 4S \\ -4S & -4R & 2S & -2R \\ 4R & 4S & -2R & 2S \end{bmatrix}, f_p = \begin{bmatrix} -12B^{+T}b^l - 12B^{-T}b^r + 4B^{+T}b^\alpha - 4B^{-T}b^\beta \\ -12B^{-T}b^l - 12B^{+T}b^r + 4B^{-T}b^\alpha - 4B^{+T}b^\beta \\ -2B^{+T}b^\alpha + 2B^{-T}b^\beta + 4B^{+T}b^l + 4B^{-T}b^r \\ 2B^{-T}b^\alpha - 2B^{+T}b^\beta - 4B^{-T}b^l - 4B^{+T}b^r \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$c_p = \epsilon b^l b^l + \epsilon b^r b^r + b^{\alpha T} b^\alpha + b^{\beta T} b^\beta - \epsilon b^l b^\alpha + \epsilon b^r b^\beta.$$

در قضیه ۱. نشان می‌دهیم که با انتخاب هر یک از مترهای معرفی شده، ماتریس Q در مسئله (۵) در صورت وارون‌پذیری، معین مثبت است و در نتیجه مسئله (۲) به یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب تبدیل می‌شود.

ماتریس‌های $Q \in \{Q_M, Q_{Am}, Q_P\}$ شکل کلی زیر را دارند

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha Q_{11} & \beta Q_{21}^T \\ \beta Q_{21} & \gamma Q_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در آن ماتریس‌های Q_{11} ، Q_{21} و Q_{22} به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} S & R \\ R & S \end{bmatrix}, Q_{21} = \begin{bmatrix} -S & -R \\ R & S \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} S & -R \\ -R & S \end{bmatrix}. \quad (22)$$

لم ۱. ماتریس‌های Q_{22} و Q_{11} نیمه معین مثبت هستند.

اثبات: با توجه به تعریف ماتریس‌های $S = B^{+T}B^+ + B^{-T}B^-$ و $R = B^{+T}B^- + B^{-T}B^+$ ماتریس‌های Q_{22} و Q_{11} می‌توانند به صورت زیر بازنویسی می‌شوند

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & B^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^- & B^+ \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ -B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & -B^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ -B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^- & -B^+ \end{bmatrix}.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، هر دو ماتریس Q_{11} و Q_{22} مجموع دو ماتریس نیمه معین مثبت هستند، بنابراین نیمه معین مثبت خواهند بود.

لم ۲. اگر ماتریس Σ را به صورت $\Sigma = Q_{22} Q_{11}^{-1} Q_{21}^T$ تعریف کنیم، آنگاه $\Sigma = Q_{22}$.

اثبات: از تعریف ماتریس Σ داریم

$$\Sigma = Q_{22} Q_{11}^{-1} Q_{21}^T = \left(Q_{11} + \begin{bmatrix} -2S & -2R \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \right) Q_{11}^{-1} \left(Q_{11} + \begin{bmatrix} -2S & \circ \\ -2R & \circ \end{bmatrix} \right)$$

$$= Q_{11} + \begin{bmatrix} -2S & \circ \\ -2R & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2S & -2R \\ \circ & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4S & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = Q_{22}. \quad (24)$$

قضیه ۱. ماتریس Q تعریف شده در (۲۱) نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر $\gamma \geq \frac{\beta^x}{\alpha}$ و $\alpha \geq 0$.

اثبات: با توجه به تجزیه بلوکی LDL^T ماتریس Q داریم

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} Q_{r_1} Q_{r_1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha Q_{r_1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \frac{\beta}{\alpha} Q_{r_1}^{-1} Q_{r_1}^T \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (25)$$

که در آن ماتریس T مکمل شور است و به صورت زیر تعریف می شود

$$T = \gamma Q_{r_2} - \frac{\beta^x}{\alpha} Q_{r_1} Q_{r_1}^{-1} Q_{r_1}^T \quad (26)$$

ماتریس Q نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر عناصر بلوکی αQ_{r_1} و T در تجزیه LDL^T نیمه معین مثبت باشند. با توجه به لم ۲. داریم $T = (\gamma - \frac{\beta^x}{\alpha}) Q_{r_2}$ ؛ بنابراین از لم ۱. ماتریس αQ_{r_1} نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر $\alpha \geq 0$ و همچنین T نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر $\gamma - \frac{\beta^x}{\alpha} \geq 0$.

نتیجه ۱. اگر ماتریس های Q_{r_1} و Q_{r_2} معکوس پذیر باشند و همچنین $\gamma > \frac{\beta^x}{\alpha}$ و $\alpha > 0$ آنگاه ماتریس Q معین مثبت است.

نتیجه ۲. ماتریس های Q_M ، Q_{Am} و Q_P در شرایط قضیه ۱،۳. صدق می کنند بنابراین نیمه معین مثبت هستند.

بنابراین در هر حالت با حل یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم (محدب)، جواب تقریبی یا دقیق دستگاه خطی فازی به دست می آوریم. در نتیجه به طور خلاصه می توان الگوریتم روش کمترین مربعات را به صورت زیر بیان کرد.

الگوریتم ۱: کمترین مربعات برای محاسبه جواب تقریبی یا دقیق.

(۱) ماتریس A و بردار \vec{b} را بگیر

(۲) متناظر با متر انتخاب شده ماتریس های Q و f را محاسبه کن

(۳) مسئله برنامه‌ریزی (۵) را حل کن (به کمک دستور quadprog در محیط متلب و پیشنهادی نقطه درونی محدب^۱ و ناحیه اعتماد^۲)

(۴) با استفاده از جواب بهینه $x^* = (x^{I*}, x^{r*}, x^{\alpha*}, x^{\beta*})$ جواب بهینه فازی \tilde{x}^* را محاسبه کن.

(۵) اگر $r(\tilde{x}^*) = 0$ ، در این صورت \tilde{x}^* یک جواب دقیق برای دستگاه خطی فازی (۱) است در غیر این صورت \tilde{x}^* یک جواب تقریبی است

به‌منظور مقایسه نتایج حاصل از سه متر معرفی شده، نیازمند استفاده از یک تابع رتبه هستیم. روش‌های بسیاری برای رتبه‌بندی اعداد فازی بیان شده است. ونگ و کری در [۱۸، ۱۹] روش‌های مرتب‌سازی اعداد فازی را به سه دسته تقسیم‌بندی نموده‌اند و آن‌ها را براساس ۷ خاصیت ارزش‌گذاری کرده‌اند. به‌منظور رتبه‌بندی کردن اعداد فازی، عزتی و همکاران در [۱۳] برای عدد فازی دلخواه \tilde{A} با $-r$ برش $[\tilde{A}]_r = [\underline{a}_r, \bar{a}_r]$ ، تابع رتبه $R : F(\mathbb{R}) \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کرده‌اند

$$R(\tilde{A}, \gamma) = \text{Mag}(\tilde{A}) + \gamma \text{Momag}(\tilde{A}), \quad (27)$$

که در آن

$$\text{Mag}(\tilde{A}) = \frac{1}{\gamma} \int_{\gamma}^1 (\underline{a}_r + \bar{a}_r + \underline{a}_1 + \bar{a}_1) r \, dr, \quad (28)$$

$$\text{Momag}(\tilde{A}) = \frac{1}{\gamma} \int_{\gamma}^1 (\underline{a}_r - \bar{a}_r + \underline{a}_1 - \bar{a}_1) r \, dr.$$

در این صورت برای مقایسه دو عدد فازی \tilde{A} و \tilde{B} داریم

• $\tilde{A} \succ \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $R(\tilde{A}, \gamma) > R(\tilde{B}, \gamma)$

• $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $R(\tilde{A}, \gamma) < R(\tilde{B}, \gamma)$

• $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $R(\tilde{A}, \gamma) = R(\tilde{B}, \gamma)$

به‌طوری‌که

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{Mag}(\tilde{A}) \neq \text{Mag}(\tilde{B}), \\ 1, & \text{Mag}(\tilde{A}) = \text{Mag}(\tilde{B}), z_{\cdot} \geq 0, \\ -1, & \text{Mag}(\tilde{A}) = \text{Mag}(\tilde{B}), z_{\cdot} < 0, \end{cases} \quad (39)$$

که در آن $z_{\cdot} = \frac{b_{\cdot} + \bar{b}_{\cdot}}{2}$ یا $z_{\cdot} = \frac{a_{\cdot} + \bar{a}_{\cdot}}{2}$ است. به منظور مقایسه این سه متر از معیار سنجش زیر برای مقایسه نتایج حاصل از مترهای ۱-۳ استفاده می‌کنیم

$$r = \|R(A\tilde{x}) - R(\tilde{b})\|_{\infty}, \quad (30)$$

که در آن $\|\cdot\|_{\infty}$ نرم بینهایت و R یک تابع رتبه دلخواه است که در این مقاله، ما از تابع رتبه بیان شده در رابطه (۲۷) استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} -2\tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 - 10\tilde{x}_3 + 8\tilde{x}_4 + 7\tilde{x}_5 = (-6, -5, 10, 4) \\ -1\tilde{x}_1 + 7\tilde{x}_2 - 1\tilde{x}_3 - 5\tilde{x}_4 + 2\tilde{x}_5 = (4, 5, 2, 0) \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 9\tilde{x}_3 - 8\tilde{x}_4 + 8\tilde{x}_5 = (-4, -2, 10, 3) \\ -\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 + 8\tilde{x}_3 + 3\tilde{x}_4 + 4\tilde{x}_5 = (4, 5, 4, 4) \\ 3\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3 - 7\tilde{x}_4 + 3\tilde{x}_5 = (-6, -6, 1, 5) \end{cases} \quad (31)$$

برای این دستگاه داریم

$$B^{-} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -10 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

و

$$\begin{aligned} b^l &= (-6, 4, -4, 4, -6)^T, & b^r &= (-5, 5, -2, 5, -6)^T, \\ b^{\alpha} &= (10, 2, 10, 4, 1)^T, & b^{\beta} &= (4, 0, 3, 4, 5)^T. \end{aligned} \quad (33)$$

جدول (۱): جواب‌های تقریبی دستگاه (۳۱) با استفاده از مترهای متفاوت

R	$r(\tilde{x})$	\tilde{x}	
۴۶۹۹۴	۴/۸۷۳	$\tilde{x}_1 = (-1/33, -1/33, 4/93 \times 10^{-15}, 0/531)$ $\tilde{x}_2 = (2/11, 2/11, 2/89 \times 10^{-15}, 3/15 \times 10^{-15})$ $\tilde{x}_3 = (1/41, 1/41, 0/22, 0/285)$ $\tilde{x}_4 = (1/97, 1/97, 4/75 \times 10^{-15}, 1/4 \times 10^{-14})$ $\tilde{x}_5 = (-2/87, -0/0826, 0/829, 0/188)$	متر مینگ
۴۶۱۵۹	۸/۸۹۲	$\tilde{x}_1 = (-1/38, -1/38, 4/05 \times 10^{-12}, 0/752)$ $\tilde{x}_2 = (2/11, 2/11, 2/04 \times 10^{-12}, 1/9 \times 10^{-12})$ $\tilde{x}_3 = (1/42, 1/42, 0/262, 0/315)$ $\tilde{x}_4 = (1/97, 1/97, 2/6 \times 10^{-12}, 0/0255)$ $\tilde{x}_5 = (-0/29, -0/0858, 0/733, 0/105)$	تقریب مینگ
۱۳۵۵۵	۷/۱۸۶	$\tilde{x}_1 = (-1/33, -1/33, 4/93 \times 10^{-15}, 0/531)$ $\tilde{x}_2 = (2/11, 2/11, 2/89 \times 10^{-15}, 3/15 \times 10^{-15})$ $\tilde{x}_3 = (1/41, 1/41, 0/22, 0/285)$ $\tilde{x}_4 = (1/97, 1/97, 4/75 \times 10^{-15}, 1/4 \times 10^{-14})$ $\tilde{x}_5 = (-2/87, -0/0826, 0/829, 0/188)$	متری

با تعریف ماتریس‌های R و S به صورت زیر

$$S = \begin{bmatrix} 16 & 30 & 36 & 5 & 17 \\ 30 & 127 & 59 & 0 & 37 \\ 36 & 59 & 25 & 29 & 110 \\ 5 & 0 & 29 & 211 & 68 \\ 17 & 37 & 110 & 68 & 142 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -8 & -48 & -20 \\ -7 & 0 & -55 & -128 & -52 \\ -9 & -55 & 0 & -166 & -72 \\ -48 & -128 & -166 & 0 & -95 \\ -20 & -52 & -72 & -95 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

به دست می‌آید و در نتیجه ماتریس‌های متناظر با مترهای مینگ، تقریب مینگ و پی به ترتیب از روابط (۱۲)، (۱۶) و (۲۰) محاسبه می‌شود. با حل مسئله‌ی (۵) توسط نرم‌افزار متلب، دستور quadprog و الگوریتم نقطه درونی محدب، جواب‌های تقریبی دستگاه (۳۱) به دست می‌آید. نتایج حاصل از مقایسه سه متر در جدول ۱ بیان شده است.

توجه شود که ماتریس ضرایب دستگاه فوق ماتریسی مربعی با رتبه کامل است و همان طور که از جدول ۱ ملاحظه می شود متر پی مقدار کمتری برای معیار ارزش Γ به دست می دهد.

مثال ۲. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} -6\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 - 10\tilde{x}_3 - 6\tilde{x}_4 = (9, 10, 5, 7) \\ 8\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 - 5\tilde{x}_3 - 6\tilde{x}_4 = (9, 11, 5, 4) \\ -2\tilde{x}_1 - 5\tilde{x}_2 - 10\tilde{x}_3 + 8\tilde{x}_4 = (8, 10, 6, 5) \\ -5\tilde{x}_1 - 5\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 - 5\tilde{x}_4 = (0, 0, 3, 7) \\ -4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 14\tilde{x}_3 = (2, 3, 9, 8) \end{cases} \quad (35)$$

ماتریس ضرایب آن یک ماتریس 5×5 با رتبه ۴ است که متناظر با آن داریم

$$B^- = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -10 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -6 & 0 \\ -2 & -5 & -10 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -14 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

و

$$\begin{aligned} b^l &= (9, 9, 8, 0, 2)^T, \quad b^r = (10, 11, 10, 0, 3)^T, \\ b^\alpha &= (5, 5, 6, 3, 9)^T, \quad b^\beta = (7, 4, 5, 7, 8)^T. \end{aligned} \quad (37)$$

در نتیجه ماتریس های S و R متناظر با دستگاه (۳۵) به صورت زیر به دست می آید

$$S = \begin{bmatrix} 145 & 53 & 80 & 117 & 0 \\ 53 & 99 & 110 & 79 & 0 \\ 80 & 110 & 234 & 90 & 0 \\ 117 & 79 & 90 & 357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -56 & -55 & -64 & 0 \\ -56 & 0 & -15 & -68 & 0 \\ -55 & -15 & 0 & -95 & 0 \\ -64 & -68 & -95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

جدول (۲): جواب‌های تقریبی دستگاه (۳۵) با استفاده از مترهای متفاوت

R	$r(\tilde{x})$	\tilde{x}	
۰/۶۱۲۶	۴/۱۱	$\tilde{x}_1 = (0 / 176, 0 / 204, 0 / 27, 6 / 41 \times 10^{-3})$	متر مینگ
		$\tilde{x}_2 = (-0 / 489, -0 / 489, 0 / 24, 2 / 52 \times 10^{-13})$	
		$\tilde{x}_3 = (-0 / 882, -0 / 781, 9 / 05 \times 10^{-4}, 0 / 156)$	
		$\tilde{x}_4 = (-0 / 283, -0 / 215, 0 / 546, 0 / 539)$	
		$\tilde{x}_5 = (-2 / 79 \times 10^{14}, 2 / 79 \times 10^{14}, 0, 0)$	
۰/۶۰۲۰	۵/۴۲	$\tilde{x}_1 = (0 / 175, 0 / 204, 0 / 263, 1 / 27 \times 10^{-4})$	تقریب مینگ
		$\tilde{x}_2 = (-0 / 482, -0 / 482, 0 / 266, 1 / 01 \times 10^{-13})$	
		$\tilde{x}_3 = (-0 / 881, -0 / 784, 8 / 541 \times 10^{-13})$	
		$\tilde{x}_4 = (-0 / 284, -0 / 214, 0 / 543, 0 / 537)$	
		$\tilde{x}_5 = (-3 / 14 \times 10^{14}, 3 / 14 \times 10^{14}, 0, 0)$	
۰/۵۷۷۴	۱۰/۲	$\tilde{x}_1 = (0 / 177, 0 / 205, 0 / 262, 4 / 51 \times 10^{-10})$	متر بی
		$\tilde{x}_2 = (-0 / 471, -0 / 471, 0 / 272, 5 / 99 \times 10^{-15})$	
		$\tilde{x}_3 = (-0 / 886, -0 / 789, 8 / 89 \times 10^{-14}, 0 / 162)$	
		$\tilde{x}_4 = (-0 / 285, -0 / 215, 0 / 542, 0 / 536)$	
		$\tilde{x}_5 = (-8 / 59 \times 10^{14}, 8 / 59 \times 10^{14}, 0, 0)$	

مشابه مثال قبل به کمک روابط (۱۲)، (۱۶) و (۲۰) می‌توان ماتریس‌های متناظر با سه متر معرفی شده را به دست آورد. پس از حل مسئله (۵) به کمک نرم‌افزار متلب جواب تقریبی دستگاه (۳۵) به دست می‌آید که نتایج آن در جدول ۲ بیان شده است.

با توجه به نتایج جدول ۲ در این حالت نیز مقدار معیار ارزش I در متر بی از دو متر مینگ و تقریب مینگ کمتر است

۴- نتایج محاسباتی

از آنجایی که در مسائل کاربردی، کار با ماتریس‌های با اندازه بزرگ حائز اهمیت است لذا در این بخش برای مقایسه نتایج عددی حاصل از حل دستگاه خطی فازی (۱)، ابتدا به صورت تصادفی ماتریس ضرایب حقیقی مقدار $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ یک ماتریس مربعی و یا غیر مربعی، کامل و یا غیر کامل تولید می‌شود که در آن m و n از میان دو مجموعه‌ی زیر انتخاب می‌شود

$$M = \{10, 20, \dots, 90\}, \quad L = \{100, 200, \dots, 900\}.$$

جدول (۳): مقادیر بهینه حاصل از مترهای مینگ، تقریب مینگ و پی

$I(X)$ -پی	$I(X)$ -مینگ	$I(X)$ -تقریب مینگ	رتبه	n	m
۳۵/۸۷۹۸۳۵۲۳	۲۶/۷۹۴۷۷۲۲	۴۵/۸۸۱۸۴۵۲۵	کامل	۱۰	۱۰
۳۴۱/۵۹۲۷۶۳۷	۲۹۶/۱۷۰۳۷۱	۳۲۸/۶۳۶۹۲۸۷	کامل	۴۰	۴۰
۵۲۸/۲۱۶۱۸۶۷	۴۷۰/۸۶۵۱۸۷	۵۴۵/۰۱۳۲۵۶۱	کامل	۷۰	۷۰
۸۶۵۳۳۳۷۸	۶۹۲۰۶۱۷۱	۶۳۴۳۰۷۵۰	۸	۱۰	۱۰
۹۵۵۴۳۸۵۲۱۷۶	۷/۲۴۶۳۰+۱۰	۶۴۷۷۰۴۹۱۲۳۰	۱۹	۴۰	۴۰
۲۲۴۲۸۶۸۹۹۱	۱۸۲۸۷۵۴۱۰	۱۶۹۰۵۳۴۹۲۳	۶۸	۷۰	۷۰
۶۸۳۳۱۰	۴۷۱۶۴۲	۴۰۲۸۹۸	کامل	۱۲	۱۰
۳۹۲۲۱۲۰۸۲	۳۱۴۴۳۲۱۳۵	۲۸۸۵۴۳۲۷۲	کامل	۵۵	۴۰
۹۹۱۵۹۸۰۶۰	۸۳۶۱۳۹۵۸۰	۷۸۴۳۹۶۴۲۲	کامل	۸۰	۷۰
۳۴۳۷۹۶۳۸۸	۳۱۲۹۲۸۹۲۱	۳۰۳۹۹۴۰۹۶	۴	۱۴	۱۰
۲۳۳۱۷۷۵۷۱۵۷	۲/۲۱۳۲۰+۱۰	۲۱۷۳۶۷۱۳۵۳۷	۳۸	۵۸	۴۰
۱/۳۱۴۱۱۰+۱۲	۱/۱۶۹۵۰+۱۲	۱/۱۲۱۳۲۰+۱۲	۵۵	۱۰۲	۷۰
۴۳۵/۲۶۳۰۲۰۱	۲۶۱/۲۷۹۶۰۳	۲۱۰/۶۷۶۳۹۸۸	کامل	۱۰	۱۱
۷۴۶۸/۰۲۵۹۹۸	۵۱۶۰/۴۵۲۹۴	۴۴۰/۴۷۱۱۸۷	کامل	۴۰	۴۸
۱۹۷۴۰/۷۲۶۰۸	۱۳۲۰/۹۵۰۷۲	۹۶۵۹/۰۸۴۹۶۷	کامل	۷۰	۱۰۲
۱۱۳۹۶۰۷۶۷	۹۱۵۶۲۶۳	۸۴۱۱۶۴۶۷	۵	۱۰	۱۳
۱/۰۹۹۹۱۰+۱۱	۹/۱۲۲۹۰+۱۰	۸۴۹۷۵۶۸۸۷۶۶	۱۵	۴۰	۵۲
۱/۷۳۲۲۲۰+۱۲	۱/۵۲۶۷۰+۱۲	۱/۴۵۷۸۵۰+۱۲	۳۳	۷۰	۱۰۰
۹۰۹/۸۹۹۲۵۲۸	۷۹۹/۹۸۵۰۳	۹۵۲/۹۰۳۸۵	کامل	۱۰۰	۱۰۰
۴۱۸۷/۶۹۳۶۹۵	۳۷۴۴/۲۲۳۸۷	۴۳۱۳/۵۲۰۸۵۳	کامل	۴۰۰	۴۰۰
۷۴۸۹/۹۷۰۷۳۸	۶۵۵۹/۵۳۴۸۳	۷۷۲/۶۹۲۵۳۳	کامل	۷۰۰	۷۰۰
۵/۵۰۷۲۹۰+۱۲	۵/۱۴۲۱۰+۱۲	۵/۰۲۰۴۴۰+۱۲	۴۱	۱۰۰	۱۰۰
۳/۳۱۰۷۹۰+۱۵	۳/۲۲۲۵۰+۱۵	۳/۱۹۴۳۴۰+۱۵	۲۲۷	۴۰۰	۴۰۰
۱/۲۸۹۶۵۰+۱۴	۱/۱۵۹۲۰+۱۴	۱/۱۱۵۷۳۰+۱۴	۶۷۴	۷۰۰	۷۰۰
۱۴۴۶۲۶۸۲۵۸۲	۱/۳۰۸۳۰+۱۰	۱۲۶۲۲۹۵۳۴۳۲	کامل	۱۴۰	۱۰۰
۲/۴۰۰۵۴۰+۱۲	۲/۳۱۸۰+۱۲	۲/۲۹۰۴۸۰+۱۲	کامل	۵۳۹	۴۰۰
۱/۱۶۲۱۹۰+۱۳	۱/۱۳۲۸۰+۱۳	۱/۱۲۲۹۸۰+۱۳	کامل	۸۸۱	۷۰۰
۸۹۵۱۷۷۳۱۴۳۵	۸/۲۰۴۱۰+۱۰	۷۹۵۵۰۲۹۸۸۸۱	۱	۱۱۵	۱۰۰
۳/۹۸۸۴۳۰+۱۵	۳/۸۹۷۶۰+۱۵	۳/۸۶۷۳۱۰+۱۵	۳۳۴	۵۵۸	۴۰۰
۳/۹۶۵۸۲۰+۱۶	۳/۹۰۱۲۰+۱۶	۳/۸۷۹۶۷۰+۱۶	۶۲۱	۹۵۷	۷۰۰
۱۶۲۸۰/۰۷۳۹۹	۱۱۶۱۲/۱۱۶۳	۹۸۴۳/۷۸۳۷۰۴	کامل	۱۰۰	۱۲۰
۷۶۷۲۲/۸۱۸۹۹	۵۲۷۵۰/۲۷۴۳	۴۴۰۴۴/۹۳۶۳	کامل	۴۰۰	۴۸۸
۱۶۶۲۷۵/۷۹۸۷	۱۱۱۳۵۲/۵۸۷	۹۲۲۹۰/۶۱۸۹۴	کامل	۷۰۰	۸۹۶
۵/۴۷۲۹۹۰+۱۲	۵/۰۱۱۴۰+۱۲	۴/۸۵۷۵۲۰+۱۲	۵۴	۱۰۰	۱۰۴
۱/۳۵۴۸۳۰+۱۵	۱/۲۶۵۹۰+۱۵	۱/۲۳۶۲۴۰+۱۵	۳۴۷	۴۰۰	۵۹۴
۱/۰۴۷۶۸۰+۱۷	۱/۰۳۴۴۰+۱۷	۱/۰۳۰۰۲۰+۱۷	۳۲۵	۹۴۷	۹۴۷

به عبارت دیگر، در کد نوشته شده برای ماتریس ضرایب $A_{m \times n}$ ، ۶ نوع ماتریس حقیقی مقدار

تصادفی به شرح زیر تولید می شود

ماتریس M بعد متوسط (یعنی $m, n \in M$) مربعی و کامل، www.SID.ir

۲. ماتریس با بعد متوسط، غیرمربعی و $Rank(A) = \min\{m, n\}$
۳. ماتریس با بعد متوسط، غیرمربعی و $Rank(A) < \min\{m, n\}$
۴. ماتریس با بعد بزرگ (یعنی $m, n \in L$) مربعی و کامل،
۵. ماتریس با بعد بزرگ، غیرمربعی و $Rank(A) = \min\{m, n\}$
۶. ماتریس با بعد بزرگ، غیرمربعی و $Rank(A) < \min\{m, n\}$.

به‌طور مشابه بردار فازی دوزنقه‌ای $\vec{b}_{m \times 1}$ به‌صورت تصادفی تولید می‌شود. سپس، با استفاده از دستور quadprog و نوشتن کد موردنظر در نرم‌افزار متلب، مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم محدب (۵) در هر یک از سه حالت معرفی شده در بخش ۳ (متر مینگ، تقریب مینگ و متر پی) حل می‌شود. در نهایت، مقادیر بهینه تابع هدف مسئله (۵)، در جدول ۳ و نتایج مقایسه روش‌ها به کمک معیار سنجش (۳۰)، در جدول ۴ قرار گرفته است. لازم به ذکر است که محاسبات توسط رایانه با مشخصات

GB: ۴.۰۰، CPU: Intel(R) Core(TM) i۳-۲۳۳۰، RAM: ۲۰.۲M

در محیط MATLAB R۲۰۱۶b انجام شده است.

به‌منظور مقایسه بین روش‌ها، نتایج حاصل از معیار سنجش (۳۰) در جدول ۴ آورده شده است.

واضح است با توجه به معیار سنجش (۳۰)، متر پی عملکرد بهتری نسبت به مترهای مینگ و تقریب مینگ داشته است در حالی که مقدار بهینه تابع هدف آن در مسئله (۵)، لزوماً نسبت به روش‌های دیگر بهتر نیست. البته لازم به ذکر است که زمانی که ماتریس ضرایب غیر کامل و یا غیر مربعی ($m < n$) باشد برتری بین سه روش وجود ندارد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به ارائه روش کمترین مربعات برای دستگاه معادلات خطی فازی (ماتریس ضرایب حقیقی مقدار و بردار سمت راست فازی دوزنقه‌ای) با در نظر گرفتن سه متر مختلف (مینگ، تقریب مینگ و پی) پرداخته‌ایم. همچنین ثابت کردیم که مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متناظر با این روش مستقل از نوع متر، مسئله‌ای محدب است. در نهایت، با بیان یک معیار سنجش بر اساس یک تابع رتبه، به مقایسه روش کمترین مربعات با مترهای مختلف مذکور پرداخته‌ایم. نتایج حاصل از این محاسبات نشان داد که روش کمترین مربعات با متر پی بازخورد بهتری نسبت به دو متر دیگر دارد. لازم به ذکر است که محاسبات با در نظر گرفتن ماتریس ضرایب و بردار سمت راست به‌صورت تصادفی و با ابعاد و خواص گوناگون انجام شده است.

جدول (۴): مقایسه مقدار ارزش I حاصل از مترهای مینگ، تقریب مینگ و پی

$I(X)$ - پی	$I(X)$ - مینگ	$I(X)$ - تقریب مینگ	رتبه	n	m
۰/۶۷۵۱۴۲۸۸۲	۱/۳۵۷۷۵۳۲۵۲	۱/۲۹۹۳۲۳۷۸۶	کامل	۱۰	۱۰
۰/۴۸۲۷۷۵۱۵۹	۰/۹۸۲۷۱۲۵۷۵	۰/۹۴۰۸۳۰۲۴۳	کامل	۴۰	۴۰
۰/۶۷۰۹۳۲۸۱۲	۱/۴۱۸۳۸۷۱۳۳	۱/۲۶۴۴۹۰۶۶۵	کامل	۷۰	۷۰
۱۳۷۹/۷۵	۱۳۷۹/۷۵	۱۳۷۹/۷۵	۸	۱۰	۱۰
۲۹۴۷۰	۲۹۴۷۰	۲۹۴۷۰	۱۹	۴۰	۴۰
۶۱۲۳/۵۸۳۳۳۳	۶۱۲۳/۵۸۳۳۳۳	۶۱۲۳/۵۸۳۳۳۳	۶۸	۷۰	۷۰
۱۰۲/۵۸۳۳۳۳۳	۱۰۲/۵۸۳۳۳۳۳	۱۰۲/۵۸۳۳۳۳۳	کامل	۱۲	۱۰
۱۲۳۱/۹۱۶۶۶۷	۱۲۳۱/۹۱۶۶۶۷	۱۲۳۱/۹۱۶۶۶۷	کامل	۵۵	۴۰
۱۴۴۸/۵۸۳۳۳۳	۱۴۴۸/۵۸۳۳۳۳	۱۴۴۸/۵۸۳۳۳۳	کامل	۸۰	۷۰
۱۵۵۱/۹۱۶۶۶۷	۱۵۵۱/۹۱۶۶۶۷	۱۵۵۱/۹۱۶۶۶۷	۴	۱۴	۱۰
۱۳۶۴۴/۵۸۳۳۳	۱۳۶۴۴/۵۸۳۳۳	۱۳۶۴۴/۵۸۳۳۳	۲۸	۵۸	۴۰
۱۱۲۲۰۵/۴۱۶۷	۱۱۲۲۰۵/۴۱۶۷	۱۱۲۲۰۵/۴۱۶۷	۵۵	۱۰۲	۷۰
۳/۷۲۱۴۷۹۷۵۴	۳/۶۶۸۴۵۳۷۸	۳/۶۶۹۲۴۷۰۳	کامل	۱۰	۱۱
۷/۴۴۲۴۷۶۳۱۳	۷/۷۵۸۶۷۶۵۰۱	۷/۷۶۰۲۶۲۹۴۵	کامل	۴۰	۴۸
۱۰/۸۵۹۰۷۶۲۵	۱۱/۰۱۲۶۲۸۳۳	۱۱/۰۱۵۹۰۱۳۵	کامل	۷۰	۱۰۲
۱۶۵۰/۶۶۶۶۶۷	۱۶۵۰/۶۶۶۶۶۷	۱۶۵۰/۶۶۶۶۶۷	۵	۱۰	۱۳
۲۶۷۵۲/۵	۲۶۷۵۲/۵	۲۶۷۵۲/۵	۱۵	۴۰	۵۲
۵۲۹۳۶	۵۲۹۳۶	۵۲۹۳۶	۳۳	۷۰	۱۰۰
۰/۸۸۴۷۸۹۱۵	۱/۸۱۴۴۵۳۱۹۷	۱/۶۷۳۳۸۰۰۳۵	کامل	۱۰۰	۱۰۰
۰/۷۶۸۸۲۸۰۹۹	۱/۵۴۹۱۹۴۴۸۷	۱/۵۳۱۳۳۵۴۵۳	کامل	۴۰۰	۴۰۰
۰/۸۳۰۱۲۲۴۰۹	۱/۷۲۰۰۲۳۰۹۸	۱/۶۰۸۷۷۶۷۶۶	کامل	۷۰۰	۷۰۰
۷۹۲۳۸	۷۹۲۳۸	۷۹۲۳۸	۴۱	۱۰۰	۱۰۰
۸۸۶۵۵۱/۵	۸۸۶۵۵۱/۵	۸۸۶۵۵۱/۵	۲۲۷	۴۰۰	۴۰۰
۷۸۱۶۶۷/۹۱۶۷	۷۸۱۶۶۷/۹۱۶۷	۷۸۱۶۶۷/۹۱۶۷	۶۷۴	۷۰۰	۷۰۰
۴۳۵۵/۱۶۶۶۶۷	۴۳۵۵/۱۶۶۶۶۷	۴۳۵۵/۱۶۶۶۶۷	کامل	۱۴۰	۱۰۰
۲۰۹۸۷/۵	۲۰۹۸۷/۵	۲۰۹۸۷/۵	کامل	۵۳۹	۴۰۰
۲۸۲۲۹/۶۶۶۶۷	۲۸۲۲۹/۶۶۶۶۷	۲۸۲۲۹/۶۶۶۶۷	کامل	۸۸۱	۷۰۰
۸۴۵۰/۳۳۳۳۳۳	۸۴۵۰/۳۳۳۳۳۳	۸۴۵۰/۳۳۳۳۳۳	۱	۱۱۵	۱۰۰
۱۳۴۲۲۶۰/۷۵	۱۳۴۲۲۶۰/۷۵	۱۳۴۲۲۶۰/۷۵	۳۳۴	۵۵۸	۴۰۰
۳۳۳۴۲۱۴/۳۳۳	۳۳۳۴۲۱۴/۳۳۳	۳۳۳۴۲۱۴/۳۳۳	۶۲۱	۹۵۷	۷۰۰
۶/۶۹۳۴۳۸۱۶۷	۶/۸۴۴۸۹۰۰۹۸	۶/۸۴۰۱۸۷۴۲۷	کامل	۱۰۰	۱۲۰
۸/۰۷۸۸۱۴۱۲۴	۸/۲۱۳۰۵۸۷۳۸	۸/۲۱۴۵۱۲۹۷۱	کامل	۴۰۰	۴۸۸
۹/۲۶۰۸۴۱۴۱۱	۹/۴۱۲۸۱۹۹۳۱	۹/۴۱۲۷۹۸۲۴۲	کامل	۷۰۰	۸۹۶
۱۰۵۸۱۱/۰۸۳۳	۱۰۵۸۱۱/۰۸۳۳	۱۰۵۸۱۱/۰۸۳۳	۵۴	۱۰۰	۱۰۴
۸۱۶۴۳۵/۰۸۳۳	۸۱۶۴۳۵/۰۸۳۳	۸۱۶۴۳۵/۰۸۳۳	۳۴۷	۴۰۰	۵۹۴
۲۶۳۹۵۵۶	۲۶۳۹۵۵۶	۲۶۳۹۵۵۶	۳۲۵	۹۴۷	۹۴۷

ضمیمه

در صفحه ۹ لم ۱،۳ بیان شده است که ماتریس‌های Q_{11} و Q_{rr} نیمه معین مثبت هستند. در فرایند اثبات داریم

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & B^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^- & B^+ \end{bmatrix},$$

$$Q_{rr} = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ -B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & -B^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ -B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^- & -B^+ \end{bmatrix}.$$

برای اثبات نیمه معین مثبت بودن Q_{11} و Q_{rr} کافی است نشان دهیم برای هر بردار x ، $x^T Q_{11} x \geq 0$ (و به‌طور مشابه $x^T Q_{rr} x \geq 0$). ابتدا نشان می‌دهیم ماتریس‌های

$\begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^- & B^+ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & B^- \end{bmatrix}$ نیمه معین مثبت هستند. بر اساس ماتریس‌های

B^- و B^+ بردار x را به‌صورت $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ افراز می‌کنیم؛ بنابراین

$$\begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & B^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1^T B^{+T} + x_2^T B^{-T})(B^+ x_1 + B^- x_2).$$

با تعریف $y_1 = B^+ x_1$ و $y_2 = B^- x_2$ رابطه فوق به‌صورت زیر بازتعریف می‌شود

$$\begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & B^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (y_1^T + y_2^T)(y_1 + y_2) = z^T z \geq 0,$$

که در رابطه فوق $z = y_1 + y_2$. به‌طور مشابه می‌توان اثبات کرد که ماتریس

نیز نیمه معین مثبت است پس $\begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & B^- \end{bmatrix}$

$$x^T Q_{11} x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^+ & B^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^- & B^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

بنابراین ماتریس Q_{11} نیمه معین مثبت است. به طور مشابه می توان نشان داد که ماتریس Q_{22} نیز نیمه معین مثبت است. در حالت خاص که ماتریس های B^+ و B^- تک عضوی هستند. مثلاً $B^+ = a$ و $B^- = b$ در این حالت با محاسبات مستقیم داریم

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix},$$

و همچنین

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix},$$

که هر دو ماتریس متقارن هستند و همچنین مقادیر ویژه هر دو ماتریس یکسان و برابر با مقادیر زیر هستند.

$$\lambda_1 = (|a| - |b|)^2, \quad \lambda_2 = (|a| + |b|)^2$$

که هر دو نامنفی هستند.

نکته: برای اثبات نیمه معین مثبت بودن عوامل تشکیل دهنده Q_{11} و Q_{22} اثبات نسبتاً ساده تری نیز هست. در واقع هر ماتریس به شکل $H = UU^T$ که U یک ماتریس دلخواه با عناصر حقیقی باشد، نیمه معین مثبت است؛ زیرا

$$x^T H x = x^T U U^T x = (U^T x)^T (U^T x) = y^T y = \|y\|_2^2 \geq 0,$$

که در رابطه فوق $y = U^T x$ تعریف شده است؛ بنابراین اگر ماتریس های زیر را تعریف کنیم

$$U_1 = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ -B^{-T} \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} B^{-T} \\ -B^{+T} \end{bmatrix},$$

در این صورت $Q_{11} = U_1 U_1^T + V_1 V_1^T$ و $Q_{22} = U_2 U_2^T + V_2 V_2^T$ به صورت مجموعی از دو ماتریس نیمه معین مثبت هستند.

- [1] John, R. I. and Innocent, P. R. (2005). Modeling uncertainty in clinical diagnosis using fuzzy logic. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, **35**(6), 1340-1350.
- [2] Allahviranloo, T. and Babakordi, F. (2017). Algebraic solution of fuzzy linear system as: $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}\tilde{X} = \tilde{Y}$, *Soft Computing*, **21**(24), 7463-7472.
- [3] Jerković, V.M., Mihailović, B. and Malešević, B. (2017). A New Method for Solving Square Fuzzy Linear Systems, in *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017*, Springer, 278-289.
- [4] Najariyan, M., Mazandarani, M. and John, R. (2017). Type-2 fuzzy linear systems. *Granular Computing*, **2**(3), 175-186.
- [5] Senthilkumar, P. and Rajendran, G. (2011). An algorithmic approach to solve fuzzy linear systems. *Journal of Information and Computational Science*, **8**(3), 503-510.
- [6] Ezzati, R. (2011). Solving fuzzy linear systems. *Soft computing*, **15**(1), 193-197.
- [7] Allahviranloo, T. and Ghanbari, M. (2012). On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory. *Applied mathematical modelling*, **36**(11), 5360-5379.
- [8] Ghanbari, R. (2015). Solutions of fuzzy LR algebraic linear systems using linear programs. *Applied Mathematical Modelling*, **3**(17), 5164-5173.
- [9] Babbar, N., Kumar, A. and Bansal, A. (2013). Solving fully fuzzy linear system with arbitrary triangular fuzzy numbers (m, α, β) , *Soft Computing*, **17**(4), 691-702.
- [10] Inearat, L. and Qatanani, N. (2018). Numerical Methods for Solving Fuzzy Linear Systems. *Mathematics*, **6**(19), 1-9.
- [11] Ghanbari, R. and Mahdavi-Amiri, N. (2015). Fuzzy LR linear systems: quadratic and least squares models to characterize exact solutions and an algorithm to compute approximate solutions. *Soft Computing*, **19**(1), 205-216.
- [12] Ghanbari, R., Mahdavi-Amiri, N. and Yousefpour, R. (2010). Exact and approximate solutions of fuzzy LR linear systems: new algorithms using

- a least squares model and the abs approach. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **7**(2), 1-8.
- [13] Ezzati, R., Khezerloo, S. and Ziari, S. (2015). Application of parametric form for ranking of fuzzy numbers. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **12**(1), 59-74.
- [14] Zimmermann, H. J. (2011). Fuzzy set theory and its applications. Springer Science & Business Media, NewYork.
- [15] Ming, M., Friedman, M. and Kandel, A. (1997). General fuzzy least squares. *Fuzzy sets and systems*, **88**(1), 107-118.
- [16] Rabiei, M. R., Arghami, N. R., Taheri, S. M. and Sadeghpour, B. (2013). Fuzzy regression model with interval-valued fuzzy input-output data. in Fuzzy System (FUZZ), IEEE International Conference on 2013, 1-7.
- [17] Xu, R. and Li, C. (2001). Multidimensional least-squares fitting with a fuzzy model. *Fuzzy sets and systems*, **119**(2), 215-223.
- [18] Wang, X. and Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy sets and systems*, **118**(3), 375-385.
- [19] Wang, X. and Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). *Fuzzy sets and systems*, **118**(3), 387-405.

A Generalized Convex Quadratic Programming to Solve Fuzzy Linear System

Omid Solaymani Fard*, Naser Akhouni**, Mohadeseh RamezanZadeh**,
Morteza Gachpazan*

*Department of Applied Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad,
Mashhad, Iran

**Department of Applied Mathematics, Damghan University, Damghan, Iran

Abstract

The linear systems are one of the most important tools for modeling real-world phenomena. Because the real-world phenomena are always associated with uncertainty, solving the fuzzy linear system have a great importance. One of the proposed methods to find the exact and approximate solutions of a fuzzy linear system is using the least squares method. In this method, by choosing an arbitrary meter and solving a quadratic programming, they provide an approximate (or exact) solution for the fuzzy linear system. In this paper, at first, we prove that under some conditions and not depending on the selected meter the quadratic programming is convex. Therefore, by considering three different meters and solving several examples, we compare the obtained approximate solutions.

Keywords: Fuzzy numbers, Convex quadratic programming, Least squares.

Mathematics Subject Classification (2010): 90C20, 15A06..

Archive of SID

SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛
شبکه های توجه گرافی
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از
وب آوساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی