

# SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛  
شبکه های توجه گرافی  
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از  
وب آو ساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی

## استنباط برای توزیع نیمه‌لوژستیک بر اساس نمونه‌های سانسور هیبرید فزاینده نوع دو

اکبر اصغرزاده<sup>۱</sup>، مینا عزیزپور<sup>۱</sup>، رضا ولی‌اللهی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشگاه مازندران

<sup>۲</sup> گروه آمار، دانشگاه سمنان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۱/۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۸/۲۶

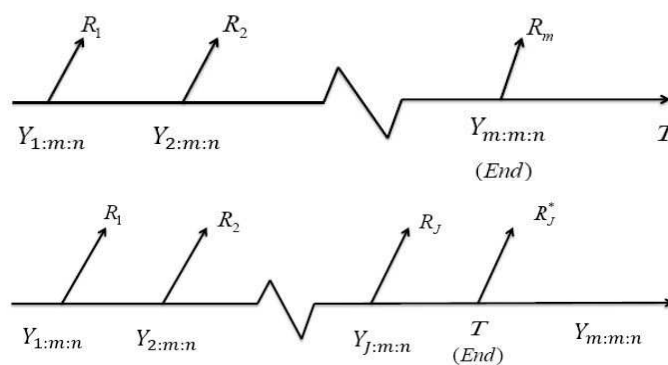
**چکیده:** یکی از نقایص سانسور فزاینده نوع دو، نامحدود بودن زمان انجام آزمایش است. به همین دلیل طرح جدید سانسور هیبرید فزاینده نوع دو در سال‌های اخیر مورد توجه آماردانان قرار گرفته است. در این مقاله تحلیل داده‌های سانسور هیبرید فزاینده نوع دو، زمانی که داده‌ها از توزیع نیمه‌لوژستیک پیروی کنند ارائه می‌شود. برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و ماکسیمم درست‌نمایی تقریبی پارامتر و برآورد بیزی پارامتر با دو روش تقریب لیندلی و زنجیر مارکوفی مونت کارلو محاسبه می‌شود. بازه‌های اطمینان مجانبی، بوت استرپ و بیزی ارائه می‌شوند. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، برآوردهای مختلف نقطه‌ای و بازه‌ای پارامتر مقایسه می‌شوند. به علاوه نحوه کاربست روش‌های برآورد معرفی شده در یک مثال عددی نشان داده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد بیزی، بازه اطمینان مجانبی، سانسور هیبرید فزاینده نوع دو.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: اکبر اصغرزاده، a.asgharzadeh@umz.ac.ir  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲N۰۱

در بسیاری از مطالعات طول عمر با مواردی مواجه می‌شویم که واحدهای آزمایشی قبل از مشاهده زمان شکست آنها از آزمون طول عمر کنار گذاشته می‌شوند. در بسیاری از موارد حذف واحدهای آزمایشی، عمدی و از قبل طراحی شده است که به منظور صرفه‌جویی در زمان و هزینه آزمایش انجام می‌شود. داده‌های حاصل از چنین آزمایش‌هایی را داده‌های سانسور شده می‌نامند. سانسورهای معمولی نوع یک و دو، رایج‌ترین نوع سانسورها هستند. ترکیبی از سانسورهای معمولی نوع یک و دو، سانسور هیبرید نامیده می‌شود. از ایرادات وارد بر سانسورهای هیبرید و معمولی نوع یک و دو، این است که اجازه حذف واحدهای آزمایشی در زمان‌هایی غیر از زمان خاتمه آزمایش داده نمی‌شود. هر چند سانسور فزاینده نوع دو دارای این ایراد نیست، اما ایراد نامحدود بودن زمان انجام آزمایش را دارد. برای رفع آن، کوندو و جواردر (۲۰۰۶) سانسور هیبرید فزاینده نوع دو را معرفی کردند که ترکیبی از سانسور فزاینده نوع دو و سانسور هیبرید است و این اطمینان را می‌دهد که زمان انجام آزمایش از زمان از پیش تعیین شده  $T$  تجاوز نمی‌کند. در این آزمایش طول عمر  $n$  مولفه را در نظر بگیرید. مقادیر صحیح  $m$  ( $m \leq n$ ) و  $R_1, \dots, R_m$  قبل از شروع آزمایش ثابت در نظر گرفته می‌شوند، به طوری که  $m + \sum_{i=1}^m R_i = n$ . زمان  $T$  نیز قبل از شروع آزمون توسط آزمونگر ثابت در نظر گرفته می‌شود. به محض مشاهده اولین شکست،  $Y_{1:m:n}, R_1$  مولفه از  $n - 1$  مولفه سالم به‌طور تصادفی از آزمون کنار گذاشته می‌شوند. به‌طور مشابه در زمان مشاهده دومین شکست،  $Y_{2:m:n}, R_2$  مولفه از  $n - 2 - R_1$  مولفه سالم باقیمانده به‌طور تصادفی از آزمون کنار گذاشته می‌شوند و به همین‌طور الی آخر. اگر  $m$  امین شکست، قبل از زمان  $T$  رخ دهد در زمان  $Y_{m:m:n}$  تعداد  $m - R_{m-1} - R_{m-2} - \dots - R_1 = n - R_m$  مولفه سالم باقیمانده سانسور و آزمون در زمان  $Y_{m:m:n}$  خاتمه می‌یابد. از طرفی دیگر اگر  $m$  امین شکست قبل از زمان  $T$  اتفاق نیفتد و تنها  $J$  شکست قبل از زمان  $T$  رخ دهد ( $0 \leq J < m$ )، در زمان  $T$  همه  $R_J^* = n - \sum_{i=1}^J R_i - J$  مولفه سالم باقیمانده حذف و آزمایش در زمان  $T$  خاتمه می‌یابد. این دو حالت به ترتیب، حالت اول و

حالت دوم و این سانسور، سانسور هیبرید فزاینده نوع دو نامیده می شود. به صورت شماتیک دو حالت سانسور هیبرید فزاینده نوع دو در شکل ۱ نمایش داده شده اند. با



شکل ۱: طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دو، بالا: حالت اول و پایین: حالت دوم  
توجه به شکل ۱ بردار زمان های شکست مشاهده شده برای حالت های اول و دوم به ترتیب به صورت

$$\{Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}\}$$

$$\{Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{J:m:n}\}$$

خواهند بود. لازم به ذکر است که در حالت دوم

$$Y_{J:m:n} < T < Y_{J+1:m:n} < \dots < Y_{m:m:n}$$

و  $Y_{J+1:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}$  مشاهده نمی شوند. همچنین در بازه  $(Y_{J:m:n}, T)$  هیچ شکستی رخ نمی دهد. توجه شود که مقدار  $J$  با استفاده از نامساوی  $Y_{J:m:n} < T < Y_{J+1:m:n}$  به دست می آید. انتخاب  $T$  در طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دو به حداکثر زمانی که آزمونگر برای ادامه آزمون در اختیار دارد وابسته است. علاوه بر آن، زمان انجام آزمون نیز متناهی است. سانسور هیبرید، سانسور فزاینده نوع دو و سانسورهای معمولی نوع یک و دو، حالت های خاص از سانسور هیبرید فزاینده نوع دو هستند. از جمله کسانی که در چند سال اخیر به مطالعه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو پرداخته اند می توان به جواردی و همکاران (۲۰۰۹) و

بیات مختاری و همکاران (۲۰۱۱) اشاره کرد. برای مطالعه بیشتر روی سانسور هیبرید و سانسور هیبرید فزاینده نوع دو می توان به بالا کریشنان و کوندو (۲۰۱۳) مراجعه کرد.

توزیع نیمه لوژستیک<sup>۱</sup> یکی از توزیع های رایج در مدل بندی توزیع های طول عمر است. متغیر تصادفی نیمه لوژستیک هم توزیع با قدر مطلق متغیری تصادفی با توزیع لوژستیک است. فرض کنید متغیر تصادفی  $Y$  دارای توزیع نیمه لوژستیک با تابع

چگالی

$$g(y; \lambda) = \frac{2\lambda e^{-\lambda y}}{(1 + e^{-\lambda y})^2}, \quad y \geq 0, \lambda > 0 \quad (1)$$

و تابع توزیع تجمعی

$$G(y; \lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda y}}{1 + e^{-\lambda y}}, \quad y \geq 0, \lambda > 0 \quad (2)$$

باشد. تابع نرخ خطر<sup>۲</sup> توزیع نیمه لوژستیک به صورت

$$h(y; \lambda) = \frac{\lambda}{1 + e^{-\lambda y}}, \quad y \geq 0, \lambda > 0$$

است که بر حسب  $y$  تابعی صعودی است. این ویژگی بیانگر آن است که احتمال خرابی قطعات در فواصل زمانی آینده بیشتر از احتمال خرابی آنها در زمان گذشته است. به همین دلیل توزیع نیمه لوژستیک مدلی مناسب در آزمایشات مربوط به طول عمر قطعات مکانیکی است که با گذشت زمان فرسوده می شوند. برای اطلاع بیشتر از تحقیقات انجام شده در زمینه توزیع نیمه لوژستیک می توان به بالا کریشنان و پوتنپورا (۱۹۸۶)، بالا کریشنان و وانگ (۱۹۹۱)، بالا کریشنان و چان (۱۹۹۲)، بالا کریشنان و اصغرزاده (۲۰۰۵)، بالا کریشنان و صالح (۲۰۱۱) و کیم و هان (۲۰۱۰) مراجعه کرد.

فرض کنید  $X = \lambda Y$ ، بنابراین  $X$  دارای توزیع نیمه لوژستیک استاندارد با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{2e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \geq 0 \quad (3)$$

<sup>۱</sup> Half-Logistic

<sup>۲</sup> Hazared rate function

و تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad x \geq 0 \quad (۴)$$

خواهد بود. لازم به ذکر است که

$$g(y; \lambda) = \lambda f(\lambda y), \quad G(y; \lambda) = F(\lambda y) \quad (۵)$$

همچنین با استفاده از روابط (۳) و (۴) داریم

$$f(x) = \frac{1}{4} \{1 - F(x)\} \{1 + F(x)\} \quad (۶)$$

در این مقاله، مسئله برآورد پارامتر توزیع نیمه لوژستیک با داده‌های سانسور هیبرید فزاینده نوع دو مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۲ برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی<sup>۳</sup> (MLE)، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تقریبی<sup>۴</sup> (AMLE) و بیزی ارائه می‌شوند. برآوردگر بیزی از دو روش تقریب لیندلی<sup>۵</sup> و روش MCMC محاسبه می‌شوند. بازه‌های اطمینان مختلفی در بخش ۳ ارائه شده‌اند. در بخش ۴ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، کارایی روش‌های مختلف برآورد با هم مقایسه می‌شوند و سرانجام در بخش ۵ یک مثال عددی برای تشریح روش‌های برآورد ارائه می‌شود.

## ۲ برآوردگرهای نقطه‌ای

فرض کنید متغیرهای تصادفی  $Y_1, \dots, Y_n$  طول‌های عمر  $n$  مولفه باشند که از توزیع نیمه لوژستیک پیروی می‌کنند. در این بخش برآوردگرهای نقطه‌ای پارامتر  $\lambda$  بر اساس نمونه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو به دست آورده می‌شوند.

<sup>۳</sup> Maximum Likelihood Estimator

<sup>۴</sup> Approximate Maximum Likelihood Estimator

<sup>۵</sup> Lindley approximation

۲۰ ..... استنباط برای توزیع نیمه لوزستیک

## ۱.۲ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی

تابع درستنمایی زمان های شکست مشاهده شده در سانسور هیبرید فزاینده نوع دو برای دو حالت اول و دوم به ترتیب عبارتند از:

$$L_{\lambda}(\lambda) = C_{\lambda} \prod_{i=1}^m g(y_{i:m:n}; \lambda) [1 - G(y_{i:m:n}; \lambda)]^{R_i},$$

$$L_{\lambda}(\lambda) = C_{\lambda} \prod_{i=1}^J g(y_{i:m:n}; \lambda) [1 - G(y_{i:m:n}; \lambda)]^{R_i} [1 - G(T; \lambda)]^{R_J^*}$$

که در آنها

$$C_{\lambda} = \prod_{i=1}^m [n - \sum_{l=1}^{i-1} (\lambda + R_l)]$$

$$C_{\lambda} = \prod_{i=1}^J [n - \sum_{l=1}^{i-1} (\lambda + R_l)]$$

با ترکیب تابع درستنمایی در دو حالت سانسور هیبرید فزاینده نوع دو، تابع درستنمایی زمان های شکست مشاهده شده را می توان به صورت

$$L(\lambda) = C \prod_{i=1}^D g(y_{i:m:n}; \lambda) [1 - G(y_{i:m:n}; \lambda)]^{R_i} [1 - G(T; \lambda)]^{R_{(J)}^*} \quad (V)$$

نوشت، که در آن

$$D = \begin{cases} m & X_{m:m:n} < T \\ J & X_{J:m:n} < T < X_{J+1:m:n} \end{cases}$$

$$C = \prod_{i=1}^D [n - \sum_{l=1}^{i-1} (\lambda + R_l)],$$

$$R_{(J)}^* = \begin{cases} 0 & X_{m:m:n} < T \\ R_J^* & X_{J:m:n} < T < X_{J+1:m:n} \end{cases}$$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) تابع درستنمایی (۷) را می توان به صورت

$$L(\lambda) = C \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^D \prod_{i=1}^D [1 - F(x_{i:m:n})]^{1+R_i} [1 + F(x_{i:m:n})] [\lambda - F(S)]^{R_{(J)}^*}$$

بازنویسی کرد، که در آن  $S = \lambda T$  و  $x_{i:m:n} = \lambda y_{i:m:n}$  به منظور سهولت در نمادگذاری از  $x_i$  و  $y_i$  به جای  $x_{i:m:n}$  و  $y_{i:m:n}$  استفاده می‌شود. بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\ln L(\lambda) \propto D \ln \lambda + \sum_{i=1}^D (\lambda + R_i) \ln[\lambda - F(x_i)] + \sum_{i=1}^D \ln[\lambda + F(x_i)] + R_{(J)}^* \ln[\lambda - F(S)]$$

به دست می‌آید، که با مشتق‌گیری از آن نسبت به  $\lambda$  داریم

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{D}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^D (\lambda + R_i) x_i \frac{f(x_i)}{\lambda - F(x_i)} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^D x_i \frac{f(x_i)}{\lambda + F(x_i)} - \frac{1}{\lambda} R_{(J)}^* S \frac{f(S)}{\lambda - F(S)} = 0$$

با استفاده مجدد از رابطه (۶)، معادله درستنمایی به صورت

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{D}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D (R_i + 2) x_i F(x_i) + R_{(J)}^* S F(S) \right] - \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D R_i x_i + R_{(J)}^* S \right] = 0 \quad (8)$$

حاصل می‌شود، که باحل آن به روش‌های عددی مانند روش نیوتن-رافسون<sup>۶</sup> می‌توان MLE پارامتر  $\lambda$  را محاسبه کرد. همچنین MLE پارامتر  $\lambda$  را می‌توان از حل معادله

$$h(\lambda) = \lambda \quad (9)$$

به روش تکراری نقطه ثابت<sup>۷</sup> نیز محاسبه نمود، که در آن

$$h(\lambda) = \frac{D}{\frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D (R_i + 2) x_i F(x_i) + R_{(J)}^* S F(S) \right] - \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D R_i x_i + R_{(J)}^* S \right]}$$

<sup>۶</sup> Newton-Raphson method

<sup>۷</sup> Fixed point



است. از آنجا که

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{D}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^D (R_i + 2) \frac{y_i^\lambda e^{-\lambda y_i}}{(1 + e^{-\lambda y_i})^2} - R_{(J)}^* \frac{T^\lambda e^{-\lambda T}}{(1 + e^{-\lambda T})^2} < 0$$

تابع درست‌نمایی مقعر لگاریتمی است. به علاوه

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln L(\lambda) = -\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln L(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln L(\lambda)}{\lambda} \lambda = -\infty$$

بنابراین تابع درست‌نمایی تک مدی است و MLE پارامتر  $\lambda$  یکتا است.

## ۲.۲ برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تقریبی

در این بخش با استفاده از تقریب معادله درست‌نمایی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی تقریبی (AMLE) پارامتر  $\lambda$  به فرم بسته‌ای به دست آورده خواهد شد. در روش درست‌نمایی تقریبی ابتدا تابع درست‌نمایی نمونه به وسیله تابع دیگری (به نام تابع درست‌نمایی تقریبی) تقریب زده می‌شود و سپس این تابع ماکسیمم می‌شود. به همین علت برآوردگرهایی که از این روش به دست می‌آیند، کلیه خواص مطلوب MLEها همچون سازگاری، مجانبا نرمال بودن و مجانبا کارا بودن را دارا می‌باشند. برای مطالعه بیشتر می‌توان به تیکو و آکایا (۲۰۰۴) مراجعه کرد. روش‌های تقریبی ماکسیمم درست‌نمایی توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مثال می‌توان به بالاکریشنان (۲۰۰۷)، بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰) و بالاکریشنان و وانگ (۱۹۹۱) اشاره کرد.

معادله درست‌نمایی ( $\lambda$ ) غیر خطی است و به دلیل وجود عبارات  $F(S)$  و  $F(x_i)$  جواب صریحی برای  $\lambda$  به دست نمی‌دهد. عبارت  $F(x_i)$  با بسط سری تیلور آن حول نقطه

$$v_{i:m:n} = E(X_{i:m:n}) \approx F^{-1}(\alpha_{i:m:n}), \quad i = 1, \dots, m$$

که در آن

$$\alpha_{i:m:n} = 1 - \prod_{j=m-i+1}^m \frac{j + R_{m-j+1} + \dots + R_m}{j + 1 + R_{m-j+1} + \dots + R_m}, \quad i = 1, \dots, m$$

تقریب زده می شود. همچنین  $F(S)$  با بسط سری تیلور آن حول نقطه

$$\xi_{J:m:n} \approx F^{-1} \left( \frac{\alpha_{J:m:n} + \alpha_{J+1:m:n}}{2} \right)$$

تقریب زده می شود (بالاکریشنان و کوندو ۲۰۱۳؛ جواردر و همکاران، ۲۰۰۹).

وارون تابع توزیع تجمعی توزیع نیمه لوژستیک برابر است با

$$F^{-1}(u) = \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right)$$

حال با تقریب توابع  $F(x_i)$  و  $F(S)$  به ترتیب حول نقاط  $\nu_{i:m:n}$  و  $\xi_{J:m:n}$  و نگه داشتن تنها دو جمله اول داریم:

$$\begin{aligned} F(x_i) &\approx F(\nu_{i:m:n}) + (x_i - \nu_{i:m:n})f(\nu_{i:m:n}), \\ &= \gamma_i - \delta_i x_i \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} F(S) &\approx F(\xi_{J:m:n}) + (S - \xi_{J:m:n})f(\xi_{J:m:n}), \\ &= \gamma_d^* + \delta_d^* S \end{aligned} \quad (11)$$

که در آنها

$$\gamma_i = F(\nu_{i:m:n}) - \nu_{i:m:n}f(\nu_{i:m:n}), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\delta_i = f(\nu_{i:m:n}) \geq 0$$

$$\gamma_d^* = F(\xi_{J:m:n}) - \xi_{J:m:n}f(\xi_{J:m:n})$$

$$\delta_d^* = f(\xi_{J:m:n}) \geq 0$$

با جایگذاری (۱۰) و (۱۱) در رابطه (۸) معادله درستی تقریبی به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &\approx \frac{D}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^D [R_i + (R_i + 2)\gamma_i] x_i + [R_{(J)}^* + R_{(J)}^* \gamma_d^*] S \right\} \\ &- \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)\delta_i x_i^2 + R_{(J)}^* S^2 \delta_d^* \right\} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

۲۴ ..... استنباط برای توزیع نیمه لوزستیک

به دست می آید. با توجه به اینکه  $S = \lambda T$  و  $x_i = \lambda y_i$ ، معادله (۱۲) را می توان به صورت

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} \approx \frac{D}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^D [R_i + (R_i + 2)\gamma_i] y_i + [R_{(J)}^* + R_{(J)}^* \gamma_d^*] T \right\} - \frac{\lambda}{\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)\delta_i y_i^2 + R_{(J)}^* T^2 \delta_d^* \right\} = 0 \quad (13)$$

بازنویسی کرده اکنون با ضرب کردن  $2\lambda$  در معادله (۱۳)، معادله درجه دوم

$$A\lambda^2 - B\lambda - 2D = 0 \quad (14)$$

حاصل می شود، که در آن

$$A = \sum_{i=1}^D (R_i + 2)\delta_i y_i^2 + R_{(J)}^* \delta_d^* T^2$$

$$B = \sum_{i=1}^D [R_i + (R_i + 2)\gamma_i] y_i + [R_{(J)}^* + R_{(J)}^* \gamma_d^*] T$$

از حل معادله درجه دوم (۱۴)، AMLE پارامتر  $\lambda$  می شود

$$\lambda = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4DA}}{2A} \quad (15)$$

با توجه به مثبت بودن  $\delta_i$  و  $\delta_d^*$  و در نتیجه مثبت بودن عبارت  $A$  تنها یکی از دو جواب معادله (۱۴) قابل قبول است. برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تقریبی (۱۵) می تواند مقدار اولیه مناسبی را برای حل معادله (۱۴) به روش های عددی فراهم کند.

### ۳.۲ برآوردگر بیزی

در این بخش برآورد بیزی پارامتر  $\lambda$  تحت تابع زیان درجه دو به دست آورده می شود. فرض کنید  $\lambda$  دارای توزیع پیشین گاما  $GAMMA(a, b)$  با تابع چگالی

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{a-1} e^{-\lambda b}, \quad \lambda > 0 \quad (16)$$

باشد که در آن  $a$  و  $b$  مقادیری مثبت و معلوم‌اند. با جایگذاری (۱) و (۲) در (۷)، تابع درستنمایی براساس نمونه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو به صورت

$$L(\lambda|y) \propto \frac{\lambda^D e^{-\lambda\{\sum_{i=1}^D (R_i+1)y_i + TR_{(J)}^*\}}}{e^{\sum_{i=1}^D (R_i+2) \ln(1+e^{-\lambda y_i}) + R_{(J)}^* \ln(1+e^{-\lambda T})}} \quad (17)$$

حاصل می‌شود. در این صورت تابع چگالی پسین  $\lambda$  به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\lambda|y) &\propto L(\lambda|y) \cdot \pi(\lambda) \\ &\propto \frac{\lambda^{D+a-1} e^{-\lambda\{\sum_{i=1}^D (R_i+1)y_i + TR_{(J)}^* + b\}}}{e^{\sum_{i=1}^D (R_i+2) \ln(1+e^{-\lambda y_i}) + R_{(J)}^* \ln(1+e^{-\lambda T})}} \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. برآورد بیزی هر تابعی از پارامتر مانند  $U(\lambda)$  تحت تابع زیان درجه دو از روی توزیع پسین به صورت

$$\hat{U}(\lambda)_{BS} = E(U(\lambda)|y) = \frac{\int U(\lambda) \pi(\lambda|y) d\lambda}{\int \pi(\lambda|y) d\lambda} \quad (18)$$

است. از آنجایی که حل رابطه (۱۸) به صورت تحلیلی غیر ممکن است، در اینجا برای محاسبه آن دو تقریب لیندلی و MCMC<sup>۸</sup> ارائه می‌شوند. تقریب لیندلی: لیندلی (۱۹۸۰) روشی برای تقریب انتگرال‌های دوگانه ارائه داد. باین روش تقریب لیندلی برای (۱۸) به صورت

$$E(U(\lambda)|y) = U(\lambda) + \frac{1}{\lambda} [U_2 + 2U_1 \rho_1] \sigma^2 + \frac{1}{\lambda} \ell_2 U_1 (\sigma^2)^2 \quad (19)$$

است که در آن  $\ell_i = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \ell(\lambda)$  برای  $i = 1, 2, 3$ ،  $\rho_j = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \rho(\lambda)$ ،  $U_j = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} U(\lambda)$  برای  $j = 1, 2$ ، برای به دست آوردن تقریب لیندلی ابتدا مشتق سوم لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به  $\lambda$  به صورت

$$\ell_3 = \frac{2D}{\lambda^3} + \lambda^2 \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2) \frac{e^{-\lambda y_i} (e^{-\lambda y_i} - 1)}{(1 + e^{-\lambda y_i})^3} + R_{(J)}^* \frac{e^{-\lambda T} (e^{-\lambda T} - 1)}{(1 + e^{-\lambda T})^3} \right\} \quad (20)$$

به دست آورده می‌شود. از چگالی پیشین (۱۶) داریم:

$$\rho_1 = \frac{a-1}{\lambda} - b \quad (21)$$

<sup>۸</sup> Monte Carlo Markove Chain

با قرار دادن (۲۰) و (۲۱) در (۱۹) و قرار دادن  $U(\lambda) = \lambda$  برآورد بییزی پارامتر  $\lambda$  با روش تقریبی لیندلی به صورت

$$\hat{\lambda}_B = \hat{\lambda} + \left(\frac{a-1}{\hat{\lambda}} - b\right) \text{Var}(\lambda)|_{\lambda=\hat{\lambda}} + \frac{1}{3} \ell_3|_{\lambda=\hat{\lambda}} (\text{Var}(\lambda))^2|_{\lambda=\hat{\lambda}}$$

حاصل می شود، که در آن  $\text{Var}(\lambda)$  واریانس مجانبی و  $\hat{\lambda}$  برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر  $\lambda$  است.

روش MCMC: در اینجا از الگوریتم گیبز برای تولید نمونه از چگالی  $\pi(\lambda|y)$  و محاسبه برآورد بییزی و بازه اطمینان بییزی پارامتر استفاده می شود. برای این منظور ابتدا نشان داده می شود که  $\pi(\lambda|y)$  مقعر لگاریتمی است. داریم

$$\begin{aligned} \ln \pi(\lambda|y) &\propto (D+a-1) \ln(\lambda) - \lambda \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i+1)y_i + R_{(J)}^* T + b \right\} \\ &- \sum_{i=1}^D (R_i+2) \ln(1+e^{-\lambda y_i}) + R_{(J)}^* \ln(1+e^{-\lambda T}) \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln \pi(\lambda|y)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{D+a-1}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^D (R_i+2) \frac{y_i^2 e^{-\lambda y_i}}{(1+e^{-\lambda y_i})^2} \\ &- \frac{T^2 e^{-\lambda T}}{R_{(J)}^* (1+e^{-\lambda T})^2} < 0 \end{aligned}$$

لذا  $\pi(\lambda|y)$  مقعر لگاریتمی است. گام های الگوریتم گیبز عبارتند از:  
 گام ۱:  $\lambda_1$  از چگالی مقعر لگاریتمی  $\pi(\lambda|y)$  تولید می شود.  
 گام ۲: گام ۱،  $M$  بار تکرار می شود و  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, M$  به دست آورده می شود.  
 گام ۳: برآورد بییزی پارامتر  $\lambda$  تحت تابع زبان درجه دو محاسبه شود:

$$\hat{\lambda}_{Bayes} = \hat{E}(\lambda|y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \lambda_i$$

برای تولید  $\lambda$  از چگالی پسین مقعر لگاریتمی  $\pi(\lambda|y)$  می توان از الگوریتم دوروی<sup>۹</sup> (دوروی، ۱۹۹۴) استفاده کرد:

<sup>۹</sup> Devroy method

- گام ۱: قرار دهید  $c = \pi(m|y)$  (m نمای ۱° چگالی  $\pi(\lambda|y)$  است).
- گام ۲: U را از توزیع  $U(0, 2)$  و V را از توزیع  $U(0, 1)$  تولید کنید،
- گام ۳: اگر  $U \leq 1$ ، آنگاه قرار دهید  $\lambda = U$  و  $T = V$ . در غیر این صورت قرار دهید  $\lambda = 1 - \ln(U - 1)$  و  $T = V(U - 1)$ .
- گام ۴: قرار دهید:  $\lambda = m + \frac{\lambda}{c}$
- گام ۵: اگر  $T \leq \frac{\pi(\lambda|y)}{c}$ ، آنگاه  $\lambda$  مشاهده‌ای از  $\pi(\lambda|y)$  است، در غیر این صورت به گام دوم برگردید.

### ۳ بازه‌های اطمینان مختلف

در این بخش بازه‌های اطمینان مختلف برای پارامتر  $\lambda$  به دست آورده می‌شود.

#### ۱.۳ بازه اطمینان مجانبی

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی  $\lambda$  یعنی  $\hat{\lambda}$  که از حل معادله درست‌نمایی به دست می‌آید، تحت شرایط مطلوب (تیکو و آکایا، ۲۰۰۴)، به‌طور مجانبی دارای توزیع نرمال است، یعنی

$$\hat{\lambda} \rightarrow N(\lambda, I^{-1})$$

که در آن  $I^{-1}$  وارون اطلاع فیشر مشاهده شده است و به‌صورت

$$I^{-1} = -\left(\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)^{-1}$$

تعریف می‌شود. چون محاسبه اطلاع فیشر مورد انتظار از نظر تئوری مشکل است برای به دست آوردن بازه اطمینان مجانبی از اطلاع فیشر مشاهده شده استفاده می‌شود. با استفاده از معادله درست‌نمایی (۸) داریم:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{D}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^2 f(x_i) + R_{(J)}^* S^2 f(S) \right\} \quad (22)$$

۱° Mode

همچنین با استفاده از معادله درست‌نمایی تقریبی (۱۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{D}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^\lambda \delta_i + R_{(J)}^* S^\lambda \delta_d^* \right\} \quad (23)$$

اکنون روابط (۲۲) و (۲۳) را می‌توان به صورت

$$-\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{V}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} \approx \frac{V^*}{\lambda^2}$$

نوشت، که در آن

$$V = D + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^\lambda f(x_i) + R_{(J)}^* S^\lambda f(S) \right\}$$

$$V^* = D + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^\lambda \delta_i + R_{(J)}^* S^\lambda \delta_d^* \right\}$$

حال با استفاده از کمیت‌های محوری

$$Q_1 = \frac{\hat{\lambda}_{ML} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{V}}} \sim N(0, 1) \quad Q_2 = \frac{\hat{\lambda}_{AML} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{V^*}}} \sim N(0, 1)$$

بازه‌های اطمینان تقریبی  $(1 - \alpha) \times 100\%$  براساس توزیع‌های مجانبی MLE و AMLE برای  $\lambda$  به ترتیب عبارتند از:

$$\left( \hat{\lambda}_{ML} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{ML}^2}{V}}, \hat{\lambda}_{ML} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{ML}^2}{V}} \right)$$

$$\left( \hat{\lambda}_{AML} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{AML}^2}{V^*}}, \hat{\lambda}_{AML} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{AML}^2}{V^*}} \right)$$

### ۲.۳ بازه اطمینان بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی

بازه اطمینان براساس آزمون نسبت درست‌نمایی اولین بار توسط لاولس (۲۰۰۳) برای محاسبه بازه اطمینان پارامترهای توزیع گاما به کار گرفته شد. می‌توان نشان داد که این بازه اطمینان اندکی بهتر از بازه اطمینان براساس توزیع مجانبی برآوردگر درست‌نمایی است (میکر و اسکوبار، ۱۹۹۸). آزمون فرضیه

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \lambda \neq \lambda_0.$$

را در سطح معناداری  $\alpha$  در نظر بگیرید. آماره آزمون نسبت درستنمایی برابر است با:

$$\Lambda = \frac{\sup_{\lambda \in \Lambda_0} L(\lambda)}{\sup_{\lambda \in \Lambda} L(\lambda)} = \frac{L(\lambda_0)}{L(\hat{\lambda})},$$

که در آن  $\Lambda_0$  فضای پارامتر تحت فرض صفر و  $\Lambda$  فضای پارامتر کل است. تحت فرض صفر برای اندازه نمونه‌های بزرگ، کمیت  $-2 \ln \Lambda = -2 [\ln L(\lambda_0) - \ln L(\hat{\lambda})]$  به طور تقریبی دارای توزیع کای-اسکور با یک درجه آزادی است. با توجه به اینکه بر اساس آزمون نسبت درستنمایی داریم

$$\begin{aligned} RH_0 &\iff -2 \ln \Lambda > \chi^2_{1, 1-\alpha} \\ &\iff -2 [\ln L(\lambda_0) - \ln L(\hat{\lambda})] > \chi^2_{1, 1-\alpha} \end{aligned}$$

بنابراین بازه اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  بر اساس آزمون نسبت درستنمایی می‌شود

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \{\lambda : -2 [\ln L(\lambda_0) - \ln L(\hat{\lambda})] \leq \chi^2_{1, 1-\alpha}\} \\ &= \{\lambda : \ln L(\lambda) \geq \ln L(\hat{\lambda}) - \frac{1}{2} \chi^2_{1, 1-\alpha}\}, \end{aligned}$$

که در آن  $\chi^2_{1, 1-\alpha}$  صدک  $100(1-\alpha)\%$ م توزیع  $\chi^2$  با یک درجه آزادی است و  $L(\lambda)$  در رابطه (۱۷) تعریف شده است. از آنجایی که  $L(\lambda)$  تابعی تک‌مدی است بنابراین به‌ازای هر  $\alpha$  مشخص،  $S(\lambda)$  یک بازه اطمینان یکتا خواهد بود.

### ۳.۳ بازه اطمینان بوت استرپ

با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر می‌توان واریانس  $\hat{\lambda}$  را برآورد کرد و یک بازه اطمینان مجانبی برای  $\lambda$  پیدا کرد، اما بازه‌های اطمینان به‌دست آمده با استفاده از خواص مجانبی برآوردگر ماکسیمم درستنمایی برای نمونه‌های با حجم کوچک چندان خوب عمل نمی‌کنند و نسبتاً دارای احتمال پوشش پایینی هستند. هنگامی که توزیع آماره‌ای نامشخص یا پیچیده یا حجم نمونه کوچک باشد، روش بوت استرپ روشی ساده برای به‌دست آوردن بازه اطمینان است. روش بازنمونه‌گیری بوت استرپ نخستین بار توسط افرون (۱۹۷۹) پیشنهاد شد. این روش مبتنی بر تولید یک



۳۰ ..... استنباط برای توزیع نیمه لوزستیک

نمونه از جامعه است. با استفاده از اطلاعات این نمونه، تعدادی نمونه هم اندازه از جامعه شبیه سازی شده و از این نمونه ها برای برآورد مشخصه های مختلف همچون میانگین و واریانس استفاده می شود. در این مقاله به روش بوت استرپ پارامتری می پردازیم. در این بخش دو بازه اطمینان پارامتری بوت استرپ برای پارامتر  $\lambda$  ارائه می شوند. دو روش بوت استرپ که در عمل به طور گسترده ای مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از:

**بوت استرپ درصدی<sup>۱۱</sup>** (افرون، ۱۹۸۲): بازه اطمینان بوت استرپ درصدی با استفاده از الگوریتم زیر به دست می آید:

- گام ۱:**  $\lambda$  از رابطه (۸) یا (۹) برآورد و با  $\hat{\lambda}$  نشان داده می شود،  
**گام ۲:** با استفاده از  $\hat{\lambda}$  و  $R_1, \dots, R_m$  و  $T$ ، نمونه بوت استرپ  $\{X_{1:m:n}^*, \dots, X_{D:m:n}^*\}$  تولید و با استفاده از این نمونه، برآورد بوت استرپ  $\lambda$  را به دست آورده با  $\hat{\lambda}^*$  نشان داده می شود،  
**گام ۳:** گام ۲ را  $B$  مرتبه تکرار کنید تا  $\hat{\lambda}_1^*, \dots, \hat{\lambda}_B^*$  به دست آید.  
**گام ۴:**  $\hat{\lambda}_1^*, \dots, \hat{\lambda}_B^*$  را به صورت  $\hat{\lambda}_{(1)}^*, \dots, \hat{\lambda}_{(B)}^*$  مرتب کنید.  
 بازه اطمینان  $\% (1 - \alpha) 100$  برای  $\lambda$  عبارتست از:

$$(\hat{\lambda}_{Boot-p(\frac{\alpha}{2})}^*, \hat{\lambda}_{Boot-p(1-\frac{\alpha}{2})}^*), \quad (24)$$

که در آن  $\hat{\lambda}_{Boot-p(\frac{\alpha}{2})}^*$  صدک  $\frac{\alpha}{2}$  در نمونه بوت استرپ درصدی است.

**بوت استرپ روش تی<sup>۱۲</sup>** (هال، ۱۹۸۸): بازه اطمینان بوت

- استرپ روش تی با استفاده از الگوریتم زیر به دست می آید:  
**گام ۱:**  $\lambda$  از رابطه (۸) یا (۹) برآورد و با  $\hat{\lambda}$  نشان داده شود،  
**گام ۲:** با استفاده از  $\hat{\lambda}$  و  $R_1, \dots, R_m$  و  $T$ ، نمونه بوت استرپ  $\{X_{1:m:n}^*, \dots, X_{D:m:n}^*\}$  تولید و با استفاده آن برآورد بوت استرپ  $\lambda$  محاسبه و با  $\hat{\lambda}^*$  نشان داده شود. همچنین  $\hat{V}(\hat{\lambda}^*) = \frac{\hat{\lambda}^{*2}}{V}$  را برای  $D > 0$  به دست آورده می شود.

<sup>۱۱</sup> Boot-p

<sup>۱۲</sup> Boot-t

گام ۳: مقدار آماره  $T^* = \frac{(\hat{\lambda}^* - \hat{\lambda})}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\lambda}^*)}}$  محاسبه شود.

گام ۴: گام های ۲ و ۳ را B مرتبه تکرار کنید و  $T_1^*, \dots, T_B^*$  را به دست آورید،

گام ۵:  $T_1^*, \dots, T_B^*$  را به صورت صعودی  $T_{(1)}^*, \dots, T_{(B)}^*$  مرتب کنید،

بازه اطمینان  $\% (1 - \alpha) 100$  دو طرفه برای  $\lambda$  عبارتست از:

$$\left( \hat{\lambda} + T_{[Boot-t(\frac{\alpha}{2})]}^* \sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{V}}, \hat{\lambda} + T_{[Boot-t(\frac{1-\alpha}{2})]}^* \sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{V}} \right).$$

### ۴.۳ بازه اطمینان بیزی

در این بخش، از الگوریتم گیبز برای به دست آوردن بازه اطمینان بیزی به صورت زیر استفاده می شود.

گام ۱:  $\lambda_1$  را با استفاده از روش دوروی از چگالی مقعر لگاریتمی  $\pi(\lambda|y)$  تولید کنید.

گام ۲: گام ۱ را M بار تکرار کنید و  $\lambda_i, i = 1, \dots, M$  را به دست آورید.

گام ۳: میانگین پسین تقریبی یا برآورد بیزی پارامتر  $\lambda$  تحت تابع زیان درجه دو عبارتست از:

$$\hat{\lambda}_{Bayes} = \hat{E}(\lambda|x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \lambda_i$$

گام ۴: واریانس پسین تقریبی  $\lambda$  عبارتست از:

$$\hat{V}(\lambda|y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \{\lambda_i - \hat{E}(\lambda|y)\}^2$$

گام ۵: به منظور به دست آوردن بازه اطمینان بیزی مقادیر  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  را به صورت صعودی  $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(M)}$  مرتب کنید. با توجه به M و  $\lambda$  های تولید شده، از روش چن و شائو (۱۹۹۹) یک بازه اطمینان بیزی  $\% (1 - \alpha) 100$  برای  $\lambda$  عبارتست از:

$$(\lambda_{M(\frac{\alpha}{2})}, \lambda_{M(1-\frac{\alpha}{2})})$$

با تکرار این روش می توان بازه های اطمینان زیادی برای  $\lambda$  به دست آورد. آن بازه ای که دارای کوتاهترین طول باشد یک بازه اطمینان با بالاترین چگالی پسین<sup>۱۳</sup>

<sup>۱۳</sup> Highest Posterior Density

(HPD)، خواهد بود.

#### ۴ مطالعه شبیه سازی

در این بخش به کمک شبیه سازی مونت کارلو برآوردگرهای مختلف ارائه شده مقایسه می شوند. با استفاده از الگوریتم معرفی شده در بالا کریشنان و ساندهو (۱۹۹۵) و با استفاده از مقادیر از قبل تعیین شده  $m, n$  و  $T, R_1, \dots, R_m$  نمونه های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع نیمه لوژستیک استاندارد تولید می شود.

اگر  $Y_{m:m:n} < T$ ، بنابراین با حالت اول روبرو هستیم و نمونه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو عبارتست از:  $\{(Y_{1:m:n}, R_1), \dots, (Y_{m:m:n}, R_m)\}$ . اگر  $Y_{m:m:n} > T$  آنگاه با حالت دوم مواجه هستیم و مقدار  $J$  از رابطه  $Y_{J:m:n} < T < Y_{J+1:m:n}$  محاسبه می شود. بنابراین نمونه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو مربوطه در این حالت عبارتست از:  $\{(Y_{1:m:n}, R_1), \dots, (Y_{J:m:n}, R_J)\}$  که  $R_J^*$  قبلاً تعریف شده است.

با توجه به نمونه حاصل، AMLE پارامتر  $\lambda$  از رابطه (۱۵) محاسبه می شود. با استفاده از مقدار AMLE به عنوان جواب اولیه با حل معادله (۸) یا (۹) به صورت عددی، MLE پارامتر  $\lambda$  به دست آورده می شود. در این مطالعه شبیه سازی، مقادیر مختلف  $n$  و  $m$  را در نظر می گیریم. از دو طرح

$$\text{طرح یک: } R_1 = \dots = R_{m-1} = 0, R_m = n - m$$

$$\text{طرح دو: } R_1 = n - m, R_2 = \dots = R_m = 0$$

استفاده می شود. هر مورد ۱۰۰۰ بار تکرار می شود و میانگین اریبی ها و میانگین توان های دوم خطا (MSE)، همچنین میانگین طول بازه های اطمینان و احتمال های پوشش محاسبه می شود. در هر تکرار اگر تعداد شکست ها صفر باشد آن نمونه در نظر گرفته نخواهد شد. میانگین اریبی های AMLE، MLE و برآوردگرهای بیزی با تقریب های لیندلی و MCMC پارامتر  $\lambda$  در جدول ۳ گزارش شده اند. برای به دست آوردن برآورد بیزی، فرض می شود پارامتر  $\lambda$  دارای توزیع پیشین گاما  $GAMMA(a, b)$  باشد. برای محاسبه برآورد بیزی، دو توزیع پیشین

$$\pi_1 : a = b = 0 \quad \pi_2 : a = b = 1$$

را در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود  $\pi_1$  یک توزیع پیشین ناآگاهی بخش و  $\pi_2$  یک توزیع پیشین آگاهی بخش است. برآوردگر بیزی به دست آمده با تقریب لیندلی با استفاده از توزیع پیشین ناآگاهی بخش و آگاهی بخش به ترتیب با NBEL و IBEL نشان داده می‌شوند. به‌طور مشابه برآوردگر بیزی به دست آمده با تقریب MCMC با استفاده از توزیع‌های پیشین ناآگاهی بخش و آگاهی بخش به ترتیب با NBEM و IBEM نشان داده می‌شوند. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی، بازه‌های اطمینان مختلف براساس توزیع مجانبی MLE، توزیع مجانبی AMLE، بازه اطمینان بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی LRT، بازه‌های اطمینان بیزی بر اساس توزیع‌های پیشین معرفی شده (IBIM و NBIM) محاسبه شده‌اند. دو بازه اطمینان بوت استرپ (Boot-t و Boot-p) نیز برای پارامتر  $\lambda$  محاسبه شده است. طول‌های بازه‌های اطمینان مختلف و احتمال‌های پوشش آنها در جدول ۲ گزارش شده‌اند.

## ۵ مثال عددی

داده‌های جدول ۳ میزان پیش روی آب رودخانه می‌سی‌سی‌پی را در واحد اینچ<sup>۱۴</sup> در ماه مارس<sup>۱۵</sup> در شهر مینیاپولیس<sup>۱۶</sup> ایالت متحده امریکا نشان می‌دهد. این داده‌ها اولین بار توسط هینکلی<sup>۱۷</sup> (۱۹۷۷) به کار گرفته شدند. با انجام آزمون کلموگروف-اسمیرنوف<sup>۱۷</sup> (K-S)، برای توزیع نیمه‌لوژستیک با پارامتر  $\lambda = 0/8117$ ، مقدار آماره K-S و  $p$ -مقدار<sup>۱۸</sup> متناظر عبارتند از  $K-S = 0/1694$  و  $p\text{-value} = 0/3254$ . بنابراین توزیع نیمه‌لوژستیک برازش خوبی برای داده‌ها ارائه می‌دهد.

با در نظر گرفتن دو طرح زیر

$$\text{طرح ۱: } m = 20, \quad T = 1/90, \quad (R_1, \dots, R_m) = (0, \dots, 0, 10),$$

$$\text{طرح ۲: } m = 20, \quad T = 1/50, \quad (R_1, \dots, R_m) = (0, \dots, 0, 10),$$

<sup>۱۴</sup> Inch

<sup>۱۵</sup> March

<sup>۱۶</sup> Minneapolis/St Paul

<sup>۱۷</sup> Kolmogrov-Smirnov

<sup>۱۸</sup> p-value

جدول ۱: آریبی و توان دوم خطای تجربی برآوردگرهای مختلف

$T = 0.75$		$T = 0.25$		روش	طرح	$m$	$n$
<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>				
0.147	-0.227	0.198	-0.368	MLE		5	15
0.147	-0.227	0.198	-0.368	AMLE			
0.121	-0.227	0.065	-0.224	IBEL	(0, 0, 0, 0, 10)		
0.167	-0.269	0.226	-0.409	NBEL			
0.164	-0.227	0.032	-0.160	IBEM			
0.226	-0.381	0.226	-0.458	NBEM			
0.131	-0.216	0.279	-0.351	MLE			
0.131	-0.216	0.278	-0.352	AMLE			
0.031	-0.161	0.179	-0.322	IBEL	(10, 0, 0, 0, 0)		
0.146	-0.272	0.316	-0.411	NBEL			
0.027	-0.021	0.188	-0.278	IBEM			
0.119	-0.281	0.362	-0.521	NBEM			
0.131	-0.216	0.359	-0.559	MLE		10	25
0.131	-0.216	0.359	-0.559	AMLE			
0.120	-0.161	0.188	-0.409	IBEL	(0, ..., 0, 15)		
0.144	-0.272	0.381	-0.580	NBEL			
0.101	-0.021	0.466	-0.662	IBEM			
0.128	-0.281	0.435	-0.648	NBEM			
0.234	-0.366	0.295	-0.487	MLE			
0.234	-0.367	0.295	-0.487	AMLE			
0.187	-0.345	0.125	-0.222	IBEL	(15, 0, ..., 0)		
0.260	-0.402	0.316	-0.512	NBEL			
0.274	-0.446	0.438	-0.644	IBEM			
0.357	-0.518	0.316	-0.550	NBEM			
0.141	-0.359	0.530	-0.715	MLE		10	50
0.141	-0.359	0.530	-0.715	AMLE			
0.135	-0.352	0.390	-0.614	IBEL	(0, ..., 0, 40)		
0.150	-0.371	0.544	-0.725	NBEL			
0.146	-0.372	0.301	-0.527	IBEM			
0.151	-0.380	0.471	-0.661	NBEM			
0.301	-0.479	0.476	-0.668	MLE			
0.301	-0.480	0.476	-0.668	AMLE			
0.249	-0.442	0.289	-0.512	IBEL	(40, 0, ..., 0)		
0.324	-0.505	0.491	-0.680	NBEL			
0.168	-0.354	0.219	-0.422	IBEM			
0.231	-0.405	0.459	-0.629	NBEM			
0.096	-0.259	0.509	-0.695	MLE		20	50
0.096	-0.259	0.509	-0.695	AMLE			
0.094	-0.259	0.375	-0.598	IBEL	(0, ..., 0, 30)		
0.102	-0.270	0.523	-0.706	NBEL			
0.101	-0.280	0.286	-0.511	IBEM			
0.106	-0.287	0.448	-0.629	NBEM			
0.175	-0.348	0.520	-0.697	MLE			
0.175	-0.348	0.520	-0.697	AMLE			
0.158	-0.327	0.328	-0.560	IBEL	(30, 0, ..., 0)		
0.188	-0.368	0.525	-0.709	NBEL			
0.114	-0.301	0.267	-0.482	IBEM			
0.127	-0.312	0.491	-0.662	NBEM			

جدول ۲: طول و درصد پوشش بازه‌های اطمینان مختلف ۹۵ درصد

$T = 0/75$		$T = 0/25$		روش	طرح	m	n
CP	Length	CP	Length				
0/948	1/9343	0/997	2/8705	MLE		5	15
0/947	1/9199	0/997	2/8435	AMLE			
0/849	2/7392	0/965	2/7463	Boot - t			
0/949	2/7825	0/998	2/7592	Boot - p	(0, 0, 0, 0, 10)		
0/951	1/1830	0/934	1/3300	LRT			
0/940	1/0530	0/908	1/1230	IBIM			
0/885	1/5070	0/840	1/4510	IBIM			
0/942	2/5288	0/997	4/7602	MLE			
0/923	2/3564	0/998	4/5293	AMLE			
0/961	2/7764	0/972	4/3479	Boot - t			
0/957	2/6372	0/968	4/1941	Boot - p	(10, 0, 0, 0, 0)		
0/899	1/8380	0/940	1/8130	LRT			
0/910	1/5230	0/913	1/4910	IBIM			
0/825	2/0180	0/870	1/9670	IBIM			
0/916	1/2391	0/829	2/0133	MLE		10	25
0/927	1/2308	0/848	2/0583	AMLE			
0/897	1/4700	0/907	1/7987	Boot - t			
0/897	1/4873	0/878	1/7429	Boot - p	(0, ..., 0, 15)		
0/967	0/7582	0/937	0/7303	LRT			
0/953	0/6207	0/928	0/6227	IBIM			
0/940	1/1600	0/920	1/1610	IBIM			
0/927	1/7727	0/983	2/0866	MLE			
0/922	1/7377	0/984	2/1000	AMLE			
0/934	1/7481	0/983	2/7645	Boot - t			
0/934	1/7775	0/979	2/7638	Boot - p	(15, 0, ..., 0)		
0/920	1/2270	0/958	1/2240	LRT			
0/908	1/1090	0/938	1/0810	IBIM			
0/885	1/6200	0/925	1/6310	IBIM			
0/952	1/2486	0/938	1/4671	MLE		10	50
0/952	1/2811	0/944	1/5235	AMLE			
0/915	1/4069	0/900	1/5842	Boot - t			
0/909	1/4984	0/906	1/5844	Boot - p	(0, ..., 0, 40)		
0/976	0/6871	0/941	0/7143	LRT			
0/959	0/6398	0/928	0/6661	IBIM			
0/955	1/2100	0/925	1/2170	IBIM			
0/927	1/7934	0/947	2/9217	MLE			
0/930	1/7722	0/946	2/9247	AMLE			
0/929	1/7767	0/982	2/6627	Boot - t			
0/944	1/7460	0/978	2/6516	Boot - p	(40, 0, ..., 0)		
0/951	1/1790	0/916	1/2150	LRT			
0/940	1/0630	0/897	1/0890	IBIM			
0/930	1/5890	0/880	1/5650	IBIM			
0/941	0/8418	0/954	1/4621	MLE		20	50
0/942	0/8389	0/958	1/4570	AMLE			
0/911	0/9477	0/899	1/3772	Boot - t			
0/918	0/9287	0/897	1/3511	Boot - p	(0, ..., 0, 30)		
0/967	0/2747	0/967	0/2516	LRT			
0/960	0/2579	0/954	0/2348	IBIM			
0/950	0/8330	0/945	0/8259	IBIM			
0/936	1/2681	0/903	2/1947	MLE			
0/930	1/2458	0/920	2/1806	AMLE			
0/926	1/2456	0/948	1/9029	Boot - t			
0/941	1/2727	0/935	1/8987	Boot - p	(30, 0, ..., 0)		
0/966	0/7169	0/984	0/7251	LRT			
0/945	0/6697	0/975	0/6497	IBIM			
0/940	1/2680	0/965	1/2380	IBIM			

جدول ۳: داده‌های پیش روی آب رودخانه می سی سی پی در واحد اینچ

۰/۳۲	۰/۴۷	۰/۵۲	۰/۵۹	۰/۷۷	۰/۸۱	۰/۸۱	۰/۹۰
۰/۹۶	۱/۱۸	۱/۲۰	۱/۲۰	۱/۳۱	۱/۳۵	۱/۴۳	۱/۵۱
۱/۶۲	۱/۷۴	۱/۸۷	۱/۸۹	۱/۹۵	۲/۰۵	۲/۱۰	۲/۲۰
۲/۴۸	۲/۸۱	۳/۰۰	۳/۰۹	۳/۳۷	۴/۷۵		

برای طرح اول،  $m$  امین شکست قبل از زمان  $T$  رخ می‌دهد. بنابراین با حالت اول سانسور هیبرید فزاینده نوع دو مواجه هستیم و داده‌ها عبارتند از

۰/۳۲	۰/۴۷	۰/۵۲	۰/۵۹	۰/۷۷	۰/۸۱	۰/۸۱	۰/۹۰
۰/۹۶	۱/۱۸	۱/۲۰	۱/۲۰	۱/۳۱	۱/۳۵	۱/۴۳	۱/۵۱
۱/۶۲	۱/۷۴	۱/۸۷	۱/۸۹				

با استفاده از داده‌های فوق، مقادیر  $A$  و  $B$  به ترتیب برابرند با

$$A = \sum_{i=1}^{20} (R_i + 2)\delta_i y_i^2 = 34/0822$$

$$B = \sum_{i=1}^{20} [R_i + (R_i + 2)\gamma_i] y_i = 24/0829$$

بنابراین AMLE پارامتر  $\lambda$  برابر است با

$$\tilde{\lambda} = \frac{-24/0829 + \sqrt{24/0829^2 + 8 \times 20 \times 34/0822}}{2 \times 34/0822} = 0/7626$$

با استفاده از  $0/7626$  به عنوان جواب اولیه برای حل معادله عددی (۸)، مقدار MLE برابر است با  $\hat{\lambda} = 0/7857$ . از آنجایی که هیچ اطلاعی از پارامتر  $\lambda$  در اختیار نیست از توزیع پیشین ناآگاهی بخش برای به دست آوردن برآورد بیز  $\lambda$  استفاده می‌شود. BEL و BEM پارامتر  $\lambda$  عبارتند از:

توزیع های مجانبی AMLE و MLE به ترتیب عبارتند از:  $(\circ/۴۷۸۳, ۱/۰۴۶۹)$  و  $(\circ/۵۰۴۳, ۱/۰۴۷۰)$ . بازه اطمینان براساس آزمون نسبت درست‌نمایی برابر است با  $(\circ/۵۲۴۹, ۱/۰۸۳۶)$  و بازه‌های اطمینان براساس دو روش بوت استرپ درصدی و تی به ترتیب عبارتند از:  $(\circ/۴۵۵۱, ۱/۴۰۹۰)$  و  $(\circ/۴۶۶۵, ۱/۵۰۴۵)$ . همچنین بازه اطمینان بی‌زی پارامتر  $\lambda$  برابر است با  $(\circ/۷۵۱۷۴۸۱۲, \circ/۷۵۱۷۴۸۳۵)$ .

برای طرح دوم،  $m$  امین شکست بعد از زمان  $T$  رخ داده است. بنابراین با حالت دوم سانسور هیبرید فزاینده نوع دو روبرو هستیم و  $J = ۱۵$  و  $R_j^* = ۱۵$  و نمونه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو عبارتند از:

۰/۳۲	۰/۴۷	۰/۵۲	۰/۵۹	۰/۷۷	۰/۸۱	۰/۸۱	۰/۹۰
۰/۹۶	۱/۱۸	۱/۲۰	۱/۲۰	۱/۳۱	۱/۳۵	۱/۴۳	

با استفاده از داده‌های فوق، مقادیر  $A$  و  $B$  به ترتیب برابرند با:

$$A = \sum_{i=1}^{15} (R_i + 2)\delta_i y_i^* + 15 \times \delta_d^* \times (1/50)^2 = 27/2821$$

$$B = \sum_{i=1}^{15} [R_i + (R_i + 2)\gamma_i] y_i + [15 + 15 \times \gamma_d^*] \times (1/50) = 22/7139$$

بنابراین AMLE پارامتر  $\lambda$  برابر است با

$$\tilde{\lambda} = \frac{22/7139 + \sqrt{22/7139^2 + 8 \times 15 \times 27/2821}}{2 \times 27/2821} = \circ/۶۹۶۱$$

با حل معادله عددی (۸) مقدار MLE برابر است با  $\hat{\lambda} = \circ/۷۰۳۲$ . برآوردهای BEL و BEM پارامتر  $\lambda$  عبارتند از:  $\hat{\lambda}_{BEL} = \circ/۶۷۰۱$  و  $\hat{\lambda}_{BEM} = \circ/۶۶۵۹$ . بازه‌های اطمینان برای  $\lambda$  براساس توزیع‌های مجانبی AMLE و MLE به ترتیب عبارتند از:  $(\circ/۳۸۶۲, \circ/۹۹۳۲)$  و  $(\circ/۴۰۴۱, ۱/۰۰۲۲)$ .



بازه اطمینان بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی برابر است با (۱/۰۹۵۸, ۵/۵۱۶۶) و بازه‌های اطمینان به روش بوت استرپ درصدی و تی به ترتیب عبارتند از: (۱/۲۱۸۸, ۳/۳۵۵۲) و (۱/۲۴۱۳, ۳/۳۵۹۵). همچنین بازه اطمینان بیزی پارامتر  $\lambda$  برابر است با (۰/۶۶۶۰, ۰/۶۶۵۸).

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردهای مختلف نقطه‌ای و بازه‌ای پارامتر توزیع نیمه‌لوژستیک بر اساس داده‌های سانسور همبسته فزاینده محاسبه و به کمک شبیه‌سازی مقایسه شده‌اند. از جدول ۱ ملاحظه می‌شود که در اغلب حالت‌ها برای همه برآوردها، زمانی که  $m, n$  و طرح ثابت در نظر گرفته شوند و  $T$  افزایش داده شود اریبی و  $MSE$  کاهش می‌یابند.  $MLE$  و  $AMLE$  از نظر اریبی و  $MSE$  عملکرد مشابه دارند. با افزایش  $m$  و ثابت نگه داشتن سایر فاکتورهای موثر، مقادیر اریبی و  $MSE$  در بیشتر موارد کاهش می‌یابد. برآوردهای بیزی آگاهی بخش بهتر از برآوردهای کلاسیک  $MLE$  و  $AMLE$  است، مگر اینکه  $m$  و  $n$  کوچک باشند. برآوردهای بیزی به دست آمده با تقریب  $MCMC$  عملکرد بهتری نسبت به برآوردهای بیزی به دست آمده با تقریب لیندلی دارد.

از جدول ۲ مشاهده می‌شود که در اغلب موارد، روش‌های مختلف ارائه شده از نظر طول و درصد پوشش خوب عمل می‌کنند. زمانی که  $m$  و  $n$  و طرح ثابت در نظر گرفته شوند، با افزایش  $T$  طول بازه اطمینان کاهش و درصد پوشش افزایش می‌یابد مگر اینکه  $n, m$  و  $T$  بسیار کوچک باشند. بازه‌های اطمینان بر اساس توزیع‌های مجانبی  $MLE$  و توزیع مجانبی  $AMLE$  از نظر طول بازه اطمینان و درصد پوشش بسیار مشابه عمل می‌کنند. بازه اطمینان بیزی بر اساس توزیع پیشین آگاهی بخش بهتر از بازه اطمینان بیزی بر اساس توزیع پیشین ناآگاهی بخش است. زمانی که  $n$  و  $m$  و  $T$  کوچک باشند، بازه‌های اطمینان بوت استرپ بهتر از بازه‌های اطمینان مجانبی عمل می‌کنند، اما زمانی که  $n$  و  $m$  افزایش می‌یابد، بسیار نزدیک به هم یا بازه‌های مجانبی بهتر از بوت استرپ عمل می‌کنند.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادات داوران محترم که باعث بهبودی مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

### مراجع

- Balakrishnan, N. (2007), Progressive Censoring Methodology: An Appraisal (with Discussion), *Test*, **16**, 211-296.
- Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*, Birkhauser, Boston.
- Balakrishnan, N. and Asgharzadeh, A. (2005), Inference for the Scaled Half-Logistic Distribution Based on Progressively Type II Censored Samples, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 73-87.
- Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (1992), Estimation for the Scaled Half Logistic Distribution Under Type II Censoring, *Computational Statistics and Data Analysis*, **13**, 123-141.
- Balakrishnan, N. and Kundu, D. (2013), Hybrid Censoring: Models, Inferential Results and Applications, *Computational Statistics and Data Analysis*, **57**, 166-209.
- Balakrishnan, N. and Puthenpura, S. (1986), Best Linear Unbiased Estimators of Location and Scale Parameters of the Half Logistic Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **25**, 193-204.

- Balakrishnan, N. and Saleh, H. M. (2011), Relations for Moments of Progressively Type II Censored Order Statistics From Half Logistic Distribution with Applications to Inference, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 2775-2792.
- Balakrishnan, N. and Sandhu, R. A. (1995), A Simple Simulation Algorithm for Generating Progressive Type II Censored Samples, *Journal of the American Statistical Association*, **49**, 229-230.
- Balakrishnan, N. and Wong, K. H. T. (1991), Approximate MLEs for the Location and Scale Parameters of the Half Logistic Distribution with Type II Right Censoring, *IEEE Transactions on Reliability*, **40**, 140-145.
- Bayat Mokhtari, E., Habibi Rad, A. and Yousefzadeh, F. (2011), Inference for Weibull Distribution Based on Progressively Type II Hybrid Censored Data, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 2824-2838.
- Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.
- Devroye, L. (1994), A Simple Algorithm for Generating Random Variates with a Log-Concave Density, *Computing*, **33**, 247-257.
- Efron, B. (1979), Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics*, **7**, 1-26.
- Efron, B. (1982), The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans, *CBMSNSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, **38**, SIAM, Philadelphia, PA.

- Hall, P. (1988), Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals, *Annals of Statistics* , **16** , 927-953.
- Hinkley, D. (1977), On Quick Choice of Power Transformation, *The American Statistician* , **26**, 67-69.
- Joarder, A., Krishna, H. and Kundu. D. (2009), On Type II Progressively Hybrid Censoring, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **8**, 534-546
- Kim, C. and Han, K. (2010), Estimation of the Scale Parameter of the Half-Logistic Distribution Under Progressively Type II Censored Sample, *Statistical Papers*, **51**, 375-387.
- Kundu, D. and Joarder, A. (2006), Analysis of Type II Progressively Hybrid Censored Data, *Computational Statistics and Data Analysis*, **50**, 2509-2528.
- Lawless, F. J. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd Ed., John Wiley, New York.
- Lindley, D. V. (1980), Approximation Bayesian Method, *Trabajos de Estadística* , **31** , 223-237.
- Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley, New York.
- Tiku, M. L., Akkaya A. D. (2004), *Robust Estimation and Hypothesis Testing*, New Age International , New Delhi.

# SID



سرویس های  
ویژه



سرویس ترجمه  
تخصصی



کارگاه های  
آموزشی



بلاگ  
مرکز اطلاعات علمی



عضویت در  
خبرنامه



فیلم های  
آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛  
شبکه های توجه گرافی  
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از  
وب آوساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی