

SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛ شبکه های توجه گرافی (GAN)

مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛
شبکه های توجه گرافی
(Graph Attention Networks)



آموزش استفاده از وب آو ساینس

کارگاه آنلاین آموزش استفاده از
وب آو ساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۳

جلد ۸، شماره ۱، ص ۳۷-۵۶

آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال با روش خودگردانی پارامتری

احسان خراتی کوپایی، سلطان محمد صدوقی الوندی

گروه آمار، دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۴/۱۴

چکیده: از ضریب تغییرات به عنوان شاخصی برای سازگاری یا یکنواختی مجموعه‌ای از مشاهدات از چند جامعه با واحدهای اندازه‌گیری مختلف استفاده می‌شود. در این مقاله روشی جدید بر پایه روش خودگردانی پارامتری برای آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال ارائه می‌شود. از آن جهت که در هر مساله آزمون فرضیه آماری، ارائه روشی که بتواند خطای نوع اول را به خوبی کنترل کند اهمیت دارد؛ نخست با استفاده از شبیه‌سازی عملکرد روش پیشنهادی در کنترل خطای نوع اول بررسی می‌شود. سپس به مقایسه توان آزمون پیشنهادی با روش‌هایی که اخیراً ارائه شده‌اند؛ پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ضرایب تغییرات، آزمون والد، روش خودگردانی پارامتری، نسبت درست‌نمایی، مقدار تعمیم‌یافته.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: احسان خراتی کوپایی، eh.kh.ko@gmail.com

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۰۳، ۶۲F۴۰

به دلیل اینکه ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد، معیاری مناسب برای مقایسه پراکندگی چند جامعه با واحدهای اندازه‌گیری مختلف است. به همین دلیل نیز ضریب تغییرات مورد توجه آماردانان قرار گرفته است. هدف این مقاله ارائه آزمونی برای برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال بر اساس آزمون والد^۱ و روش خودگردانی پارامتری^۲ است. تاکنون روش‌های مختلفی برای آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال ارائه شده‌اند اما هیچ‌یک از روش‌ها دقیق نیستند، به این معنی که خطای نوع اول آن‌ها دقیقاً در سطح اسمی آزمون نیست. از مهمترین روش‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد. بنت (۱۹۷۶) آزمونی بر اساس نسبت درست‌نمایی ارائه کرد. همچنین گوپتا و ما (۱۹۹۶)، رائو و جوز (۲۰۰۱) و نیری و رائو (۲۰۰۳) آزمون والد را برای این مساله به کار گرفتند. تسو (۲۰۰۹) نیز از آزمون تقریبی امتیاز^۳ برای آزمون برابری ضرایب تغییرات استفاده کرد. اخیراً لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) به ترتیب روش‌هایی بر اساس p -مقدار تعمیم یافته، خودگردانی پارامتری و آزمون نسبت درست‌نمایی ارائه نمودند و خطای نوع اول و توان آزمون خود را با استفاده از شبیه‌سازی با روش‌های موجود مقایسه کردند. در این مقاله، روشی جدید بر پایه روش والد و خودگردانی پارامتری برای آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال ارائه می‌شود. اما آماره این آزمون متفاوت از جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) است. از آن جهت که در هر مساله آزمون فرض آماری، ارائه روشی که بتواند خطای نوع اول را به نحو مطلوبی کنترل کند اهمیت دارد، نخست با شبیه‌سازی، خطای نوع اول روش پیشنهادی با روش‌های نیری و رائو (۲۰۰۳)، لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) مقایسه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که از دیدگاه خطای نوع اول، روش پیشنهادی و روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) عملکرد بهتری نسبت به

^۱ Wald

^۲ Parametric bootstrap

^۳ Score test

دیگر روش‌ها دارند. لذا فقط توان آزمون روش پیشنهادی، با توان آزمون روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) مقایسه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در برخی موارد، توان آزمون روش پیشنهادی بهتر از روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) است. در مواردی نیز عکس این موضوع اتفاق می‌افتد و در برخی موارد دیگر، عملکرد این دو روش از دیدگاه توان مانند هم است. همچنین لازم به ذکر است که روش پیشنهادی از لحاظ محاسباتی ساده‌تر از روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) است. ساختار مقاله بدین صورت می‌باشد. در بخش ۲ روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳)، کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) و آزمون والد نیری و رائو (۲۰۰۳) به‌طور مختصر معرفی می‌شوند. همچنین آزمونی جدید بر اساس روش والد و با استفاده از روش خودگردانی پارامتری پیشنهاد و شرح داده می‌شود. در بخش ۳ با مطالعه‌ای شبیه‌سازی به مقایسه آزمون پیشنهادی با روش‌های دیگر از دیدگاه کنترل خطای نوع اول و توان آزمون پرداخته می‌شود. در بخش ۴ با ارائه یک مثال روش‌های ارائه شده توصیف و در بخش ۵ بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ معرفی روش‌های آزمون

فرض کنید X_{ij} برای $i = 1, \dots, k$ ؛ $j = 1, \dots, n_i$ نشان‌دهنده i امین نمونه از i امین جامعه نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 باشد. میانگین و واریانس جامعه i ام به صورت

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad \bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

برآورد می‌شوند. همچنین \bar{x}_i و s_i^2 را به‌عنوان مقادیر مشاهده شده از \bar{X}_i و S_i^2 در نظر بگیرید. ضریب تغییرات جامعه i ام با $\phi_i = \sigma_i / \mu_i$ نشان داده می‌شود. هدف انجام آزمون برای فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_0 : \phi_1 = \dots = \phi_k = \phi \\ H_1 : \phi_i \neq \phi_j \quad i \neq j \text{ یک حداقل} \end{cases}$$

۴۰ آزمون برای ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال

یا به طور معادل

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \dots = \theta_k = \theta \\ H_1 : \theta_i \neq \theta_j \quad i \neq j \end{cases}$$

برای حداقل یک $i \neq j$

است، که در آن $\theta_i = 1/\phi_i$ اگر H ماتریس مقابله‌ها با اندازه $(k-1) \times k$ و C برداری $1 \times k$ باشد به طوری که

$$C = (\theta_1, \dots, \theta_k)'_{k \times 1}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}_{(k-1) \times k}$$

آن‌گاه فرضیه مورد علاقه را می‌توان به صورت $HC = 0$ در مقابل $H_1 : HC \neq 0$ نوشت.

۱.۲ روش لیو و همکاران

روش لیو و همکاران (۲۰۱۱) براساس مفهوم کمیت‌های تعمیم یافته است (ویرهاندی، ۱۹۹۵). در این روش، کمیت‌های تعمیم یافته به صورت

$$\mathcal{R}_{\mu_i} = \bar{x}_i - \frac{1}{\sqrt{n_i}} s_i T_i, \quad \mathcal{R}_{\sigma_i} = \frac{\sqrt{n_i - 1} s_i}{U_i}$$

هستند، که در آن $T_i \sim t_{n_i - 1}$ و $U_i \sim \chi^2_{n_i - 1}$. همچنین آماره آزمون به صورت

$$\|D\|^2 = (\mathcal{R}_{HC} - \mu'_R) \Sigma_R^{-1} (\mathcal{R}_{HC} - \mu_R), \quad \|d\|^2 = \mu'_R \Sigma_R^{-1} \mu_R$$

معرفی می‌شود، که در آن

$$\mathcal{R}_{HC} = H \left(\frac{\mathcal{R}_{\mu_1}}{\mathcal{R}_{\sigma_1}}, \dots, \frac{\mathcal{R}_{\mu_k}}{\mathcal{R}_{\sigma_k}} \right)'$$

$$\mu_R = E(\mathcal{R}_{HC} | (\bar{x}, s)) = H \left(E\left(\frac{\mathcal{R}_{\mu_1}}{\mathcal{R}_{\sigma_1}} | (\bar{x}, s)\right), \dots, E\left(\frac{\mathcal{R}_{\mu_k}}{\mathcal{R}_{\sigma_k}} | (\bar{x}, s)\right) \right)'$$

$$\Sigma_R = Cov(\mathcal{R}_{HC} | (\bar{x}, s))$$

$$= H \text{diag}\{V(\frac{\mathcal{R}_{\mu_1}}{\mathcal{R}_{\sigma_1}} | (\bar{x}, s)), \dots, V(\frac{\mathcal{R}_{\mu_k}}{\mathcal{R}_{\sigma_k}} | (\bar{x}, s))\} H'$$

$$V(\frac{\mathcal{R}_{\mu_i}}{\mathcal{R}_{\sigma_i}} | (\bar{x}, s)) = \frac{\bar{x}_i^2}{(n_i - 1)s_i^2} V(U_i) + \frac{1}{n_i},$$

$$E(\frac{\mathcal{R}_{\mu_i}}{\mathcal{R}_{\sigma_i}} | (\bar{x}, s)) = \frac{\bar{x}_i}{\sqrt{(n_i - 1)s_i}} E(U_i).$$

که در آن $\text{diag}\{x_1, \dots, x_k\}$ نشان‌دهنده ماتریس قطری $k \times k$ با درایه‌های قطر اصلی x_i ها است. فرضیه صفر در سطح α رد می‌شود هرگاه

$$P_H. (\|D\|^2 \geq \|d\|^2) \leq \alpha,$$

که نحوه محاسبه احتمال آن در لیبو و همکاران (۲۰۱۱) ارائه شده است.

۲.۲ روش جعفری و کاظمی

ساختار آماره آزمون این روش شبیه به آماره والد می‌باشد. با قرار دادن

$$V^* = \text{diag}\{\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_k}\}, \quad C = (\frac{\bar{X}_1}{S_1}, \dots, \frac{\bar{X}_k}{S_k})'_{k \times 1}$$

آماره آزمون به صورت

$$Q = (H\tilde{C})' [HV^*H']^{-1} (H\tilde{C})$$

$$= \sum_{i=1}^k n_i (\frac{\bar{X}_i}{S_i})^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^k n_i (\frac{\bar{X}_i}{S_i}))^2 \quad (1)$$

خواهد بود. فرضیه H_0 برای مقادیر بزرگ Q رد می‌شود. برای محاسبه p -مقدار، با روش خودگردانی پارامتری، نخست آماره خودگردانی به صورت

$$Q_B = \sum_{i=1}^k n_i (\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B})^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^k n_i (\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B}))^2,$$

معرفی می‌شود، که در آن $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ، $\bar{X}_i^B \sim N(\tilde{\theta}, 1/n_i)$ ، $S_i^{2B} \sim \frac{1}{n_i-1} \chi_{n_i-1}^2$ و $\tilde{\theta}$ برآوردگری مناسب برای θ (مقدار مشترک θ_i ها) می‌باشد. برای برآورد مقدار مشترک θ_i ها، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) در حالتی که فقط اطلاعات میانگین و

۴۲ آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال

واریانس نمونه‌ای در دسترس باشد میانگین وزنی $\sum_{i=1}^k n_i(\bar{x}_i)/n$ و در غیر این صورت برآورد ماکسیمم درست‌نمایی را پیشنهاد داده‌اند. برای محاسبه p -مقدار، از Q_B تحت H_0 مشاهداتی به دفعات زیاد (مثلاً ۱۰۰۰۰ مرتبه) تولید می‌شود و تعداد دفعاتی که مقادیر تولید شده Q_B از مقدار مشاهده شده Q بیشتر باشد به عنوان برآورد p -مقدار در نظر گرفته می‌شود. ذکر این نکته لازم است که آماره Q نسبت به پارامتر مقیاس ناورد^۴ است. پس بدون از دست دادن کلیت مساله فرض شده است که $\sigma_i = 1$ برای $i = 1, \dots, k$

۳.۲ روش کریشنامورثی و لی

در این روش آماره آزمون نسبت درست‌نمایی بهینه‌سازی شده است. لگاریتم تابع درست‌نمایی بر اساس k جامعه نرمال تحت فرض صفر و بعد از حذف نمودن مقادیر ثابت به صورت

$$\ell(\mu, \phi) = -\sum_{i=1}^k n_i \ln(\mu_i \phi) - \sum_{i=1}^k \frac{n_i (\hat{\sigma}_i^2 + (\bar{X}_i - \mu_i)^2)}{2\phi^2 \mu_i^2}$$

است، که در آن $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{n_i - 1}{n_i} S_i^2$ و مقدار مشترک ضرایب تغییرات تحت H_0 می‌باشد. لازم به ذکر است که برآورد ماکسیمم درست‌نمایی ϕ و μ_i به صورت صریح قابل محاسبه نیستند و برای به دست آوردن آن‌ها باید از روش‌های عددی استفاده نمود. در نهایت آماره آزمون نسبت درست‌نمایی به صورت

$$\Lambda = -2 \left[\sum_{i=1}^k n_i \ln \left(\frac{\hat{\mu}_i \hat{\phi}}{\hat{\sigma}_i^2} \right) \right]$$

حاصل می‌شود، که در آن $\hat{\mu}_i$ و $\hat{\phi}$ برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی μ_i و ϕ هستند. اگر میانگین و واریانس Λ به ترتیب با $m(\Lambda)$ و $\nu(\Lambda)$ نشان داده شوند آماره بهینه شده روش نسبت درست‌نمایی به صورت

$$\Lambda_M = \sqrt{2(k-1)} \left(\frac{\Lambda - m(\Lambda)}{\sqrt{\nu(\Lambda)}} \right) + (k-1),$$

^۴ Invariant

خواهد بود، که تحت H_0 دارای توزیع تقریبی $\mathcal{X}_{(k-1)}^2$ است. اما چون به دست آوردن $m(\Lambda)$ و $\nu(\Lambda)$ مشکل است؛ با استفاده از نمونه‌گیری به روش خودگردانی پارامتری می‌توان آن‌ها را برآورد کرد. به این صورت که نخست از $\hat{\mu}_i^B, \hat{\sigma}_i^B/n_i \sim \hat{\mu}_i^B, \hat{\sigma}_i^B/n_i$ و $\bar{X}_i^B \sim \hat{\mu}_i^B, \hat{\sigma}_i^B/n_i$ و $S_i^{2B} \sim \hat{\mu}_i^B, \hat{\sigma}_i^B/n_i$ مشاهداتی به دفعات زیاد تولید و کمیت

$$\Lambda^B = -2 \left[\sum_{i=1}^k n_i \ln \left(\frac{\hat{\mu}_i^B \hat{\sigma}_i^B}{\hat{\sigma}_i^{2B}} \right) \right],$$

محاسبه می‌شود، که در آن $\hat{\mu}_i^B, \hat{\sigma}_i^B$ و $\hat{\phi}^B$ برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی بر اساس مشاهدات خودگردانی تولید شده از \bar{X}_i^B و S_i^{2B} هستند. متوسط و واریانس Λ^B یعنی $m(\Lambda^B)$ و $\nu(\Lambda^B)$ به ترتیب تقریبی برای $m(\Lambda)$ و $\nu(\Lambda)$ خواهند بود که این خود مستلزم استفاده مجدد از روش ماکسیمم درست‌نمایی و روش‌های عددی در نمونه‌های خودگردانی می‌باشد. در روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) در سطح α فرض صفر زمانی رد می‌شود که

$$\Lambda_M > \mathcal{X}_{(k-1)}^2(\alpha),$$

که در آن $\mathcal{X}_{(k-1)}^2(\alpha)$ چندک $(1-\alpha)$ ام از توزیع χ^2 با $k-1$ درجه آزادی است.

۴.۲ آزمون پیشنهادی

نیری و رائو (۲۰۰۳) با استفاده از بسط تیلور، برآورد واریانس تقریبی \bar{X}_i/S_i را (از مرتبه n^{-1}) به صورت

$$R_i = \frac{2 + \left(\frac{\bar{X}_i}{S_i}\right)^2}{2n_i}$$

محاسبه نمودند. اگر قرار داده شود $\mathbf{R} = \text{diag} \{R_1, \dots, R_k\}$ آن‌گاه آماره آزمون براساس ایده والد به صورت

$$WT = (H\tilde{C})' [HRH']^{-1} (H\tilde{C})$$

$$= \sum_{i=1}^k W_i \left(\frac{\bar{X}_i}{S_i} \right)^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^k W_i} \left(\sum_{i=1}^k W_i \left(\frac{\bar{X}_i}{S_i} \right) \right)^2 \quad (2)$$

خواهد بود، که در آن $W_i = 1/R_i$. نیری و رائو (۲۰۰۳) نشان دادند که WT تحت فرضیه صفر، به صورت مجانبی دارای توزیع خبی دو با $k - 1$ درجه آزادی است و فرضیه صفر زمانی رد می شود که $WT > \chi^2_{(k-1)}(\alpha)$. این آماره از لحاظ محاسباتی راحت تر از آماره کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) است ولی همچنان که نشان داده خواهد شد به لحاظ خطای نوع اول عملکرد مطلوبی برای حجم نمونه های کوچک ندارد. روش پیشنهادی با استفاده از روش خودگردانی پارامتری و بر اساس آماره WT است. آماره خودگردانی به صورت

$$WT_B = \sum_{i=1}^k W_i^B \left(\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B} \right)^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^k W_i^B} \left(\sum_{i=1}^k W_i^B \left(\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B} \right) \right)^2 \quad (3)$$

در نظر گرفته می شود، که در آن $W_i^B = 1/R_i^B$ ، $R_i^B = (2 + (\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B})^2) / 2n_i$ ، $\bar{X}_i^B \sim N(\theta, 1/n_i)$ و $S_i^2 \sim \frac{1}{n_i-1} \chi^2_{(n_i-1)}$ ، θ برآوردگری مناسب برای مقدار مشترک θ_i می باشد. این برآوردگر می تواند میانگین وزنی \bar{X}_i/S_i ها، یعنی $\hat{\theta}_w = \sum_{i=1}^k W_i (\frac{\bar{X}_i}{S_i}) / \sum_{i=1}^k W_i$ باشد. لازم به ذکر است که آماره WT نسبت به پارامتر مقیاس ناوردا است. پس بدون از دست دادن کلیت مساله فرض شده است که $\sigma_i = 1$ برای $i = 1, \dots, k$. در روش پیشنهادی فرضیه صفر در سطح α رد می شود اگر

$$P_{H_0}(WT_B \geq wt) \leq \alpha, \quad (4)$$

که در آن wt مقدار مشاهده شده WT است. برای محاسبه p -مقدار با روش خودگردانی پارامتری، به دفعات زیاد از WT_B تحت H_0 مشاهده تولید می شود و نسبت دفعاتی که مشاهدات تولید شده بیشتر از wt هستند به عنوان برآورد p -مقدار ارائه می شود (برای الگوریتم محاسبه p -مقدار بخش ۳ را ملاحظه کنید).

گرچه به واسطه استفاده از ساختار آزمون والد، روش پیشنهادی و روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) شباهت های ظاهری به هم دارند اما تفاوت های عمده این دو روش عبارتند از:

الف- برخلاف آنچه که جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) بیان داشته‌اند به نظر می‌آید آماره Q در عبارت (۱) تحت فرضیه H_0 دارای توزیع خبی دو با $k-1$ درجه آزادی نمی‌باشد. با استفاده از واریانس تقریبی \bar{X}_i/S_i می‌توان نشان داد با در نظر گرفتن ضریب $(2 + \theta^2)/2$ برای Q ، این آماره تحت H_0 به صورت مجانبی دارای توزیع خبی دو با $k-1$ درجه آزادی می‌شود یعنی

$$Q_c = \left(\frac{2}{2 + \theta^2}\right) Q \sim^{asy} \chi^2_{(k-1)}.$$

در حالی که آماره آزمون پیشنهادی براساس ساختار آماره آزمون والد تحت فرضیه صفر دارای توزیع مجانبی خبی دو با $k-1$ درجه آزادی است.

ب- عمده‌ترین تفاوت روش پیشنهادی و روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳)، عملکرد آن‌ها در کنترل خطای نوع اول بر اساس شبیه‌سازی‌ها می‌باشد. در واقع اگر تفاوتی بین این دو روش نبود این تفاوت قابل ملاحظه در خطای نوع اول آن‌ها نیز وجود نداشت. جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) دو برآوردگر برای مقدار مشترک ضرایب تغییرات ارائه دادند. در صورت استفاده از برآوردگر وزنی $\sum_{i=1}^k n_i (\frac{\bar{X}_i}{S_i})/n$ برای θ ، روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) عملکرد بسیار ضعیفی در برآورد خطای نوع اول خواهد داشت و در بسیاری موارد مقدار صفر را به عنوان برآورد خطای نوع اول ارائه می‌دهد. (قسمت ۳ جداول ۱ و ۲ را ملاحظه کنید). پس وقتی که فقط اطلاعات میانگین و واریانس نمونه‌ای موجود باشد در حالی که خود مشاهدات در دسترس نباشند، استفاده از این روش مناسب نخواهد بود. در صورت استفاده از برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای θ ، عملکرد این روش در برآورد خطای نوع اول کمی بهبود می‌یابد اما باز هم در برخی موارد مقادیر بسیار کوچکی را به عنوان برآورد خطای نوع اول ارائه می‌دهد (قسمت ۳ جداول ۱ و ۲ را ملاحظه کنید). لازم به ذکر است که کاهش خطای نوع اول باعث کاهش توان آزمون می‌شود.

ج- در روش پیشنهادی تفاوتی در استفاده از برآوردگر وزنی یا ماکسیمم درست‌نمایی برای θ نیست. پر واضح است که در این روش استفاده از برآوردگر وزنی $\hat{\theta}_w = \sum_{i=1}^k W_i (\frac{\bar{X}_i}{S_i}) / \sum_{i=1}^k W_i$ بسیار راحت‌تر از استفاده از برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برای برآورد مقدار مشترک ضرایب تغییرات یعنی θ خواهد بود

۴۶ آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال

زیرا برآورد ماکسیمم درست‌نمایی θ به صورت صریح به دست نمی آید و باید به صورت عددی محاسبه شود. لذا مانند روش‌های جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) اجباری به یافتن برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای θ نیست.

لازم به ذکر است به دلیل اینکه آماره‌های آزمون والد و آزمون نسبت درست‌نمایی تحت فرضیه صفر به صورت مجانبی معادلند (انگل، ۱۹۸۴) این انتظار می‌رود که آزمون پیشنهادی با آزمون کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) تقریباً از لحاظ خطای نوع اول عملکردی شبیه به یکدیگر داشته باشند اما در توان آزمون با یکدیگر متفاوت باشند.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این قسمت روش پیشنهادی با روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳)، والد کلاسیک نیری و رائو (۲۰۰۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) از لحاظ خطای نوع اول و توان در مطالعه‌ای شبیه‌سازی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) دو حالت بررسی می‌شود. اول حالتی که مقدار مشترک ضرایب تغییرات از روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد و با علامت اختصاری JKL نمایش داده می‌شود. دوم حالتی که مقدار مشترک ضرایب تغییرات از میانگین وزنی \bar{X}_i/S_i ها برآورد و با علامت اختصاری JKW نمایش داده می‌شود. روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، نیری و رائو (۲۰۰۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) نیز به ترتیب با علائم اختصاری GPT، WT و MLRT نمایش داده می‌شوند. همچنین روش پیشنهادی نیز با نماد New معرفی می‌گردد.

در شبیه‌سازی برای روش پیشنهادی، ناحیه بحرانی با روش خودگردانی پارامتری به دست آمده است. یعنی توزیع WT تحت H_0 و H_1 با نمونه‌گیری به روش خودگردانی پارامتری تخمین زده می‌شود. برای این کار فرض کنید x_{i_1}, \dots, x_{i_n} برای $i = 1, \dots, k$ داده شده باشد. حال مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- محاسبه $\hat{\theta}_{iw}$ که در زیربخش ۴-۲ معرفی شده است.

۲- محاسبه مقدار آماره WT در عبارت (۲).

۳- تولید \bar{X}_i^B, S_i^{2B} برای $i = 1, \dots, k$ که در زیربخش ۴-۲ معرفی شده‌اند.

۴- محاسبه مقدار آماره WT_B بر اساس عبارت (۳).

۵- تکرار مراحل ۳ و ۴ (۱۰۰۰۰ مرتبه).

برآورد مونت کارلو برای p -مقدار در عبارت (۴) میانگین تعداد دفعاتی است که WT_B بیشتر از wt می‌شود. نسبت تعداد دفعاتی که در $N = 10000$ مرتبه، p -مقدار کمتر از α می‌شود برآورد خطای نوع اول (در صورتی که مقادیر WT_B تحت H_0 تولید شوند) و یا توان آزمون (در صورتی که مقادیر WT_B تحت H_1 تولید شوند) خواهد بود. در روش WT، برای بررسی خطای نوع اول از تقریب توزیع خبی دو با $k - 1$ درجه آزادی استفاده شده است (نیری و راثو، ۲۰۰۳). در روش‌های GPT، JKL و JKW با استفاده از روش مونت کارلو خطای نوع اول و توان آزمون با $N = 10000$ تکرار تخمین زده شده‌اند. نتایج برآورد احتمال خطای نوع اول برای $k = 4, 7$ جامعه مستقل نرمال برای حجم نمونه و ضرایب تغییرات مختلف در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. در تمامی حالات، احتمال خطای نوع اول اسمی، $0/05$ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که روش‌های ارائه شده در این مقاله دارای توزیع تقریبی به‌ازای حجم نمونه‌های بزرگ هستند؛ لذا در شبیه‌سازی، سعی بر این است که رفتار آزمون‌ها در حجم نمونه‌های کوچک بررسی شوند.

همان‌طور که در جدول‌های ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود در تمامی موارد بررسی شده، برآورد احتمال خطای نوع اول روش‌های New و MLRT به سطح اسمی $0/05$ نزدیک‌تر است.

روش تقریبی WT خطای نوع اول را کنترل نمی‌کند (مانند مقادیر $0/12$ برای $k = 7$ ، $n = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$ و $0/1$ برای $k = 7$ ، $n = (5, 2, 5, 2, 3, 3, 2)$). روش‌های JKL، JKW و GPT گرچه برآورد احتمال خطای نوع اول آن‌ها بیشتر از $0/05$ نیست اما در برخی موارد خیلی کوچکتر از $0/05$ می‌باشد؛ که این در عمل موجب کاهش توان آزمون خواهد شد. از بین این سه آزمون، روش‌های JKW و GPT عملکرد ضعیف‌تری در خطای نوع اول دارند؛ زیرا برآورد احتمال خطای نوع

جدول ۱: برآورد خطاهای نوع اول آ برای ۴ جامعه نرمال مستقل

مقدار مشترک ضرایب تغییرات								آزمون	حجم نمونه
۰/۰۲	۰/۰۲۵	۰/۰۳	۰/۰۳۵	۰/۰۴	۰/۰۴۵	۰/۰۵	۰/۰۵۵		
۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	GPT	
۰/۰۳۱	۰/۰۳۰	۰/۰۳۳	۰/۰۲۹	۰/۰۲۷	۰/۰۲۵	۰/۰۳۲	۰/۰۳۰	JKL	
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	JKW	۳, ۳,
۰/۰۷۹	۰/۰۷۷	۰/۰۷۲	۰/۰۷۴	۰/۰۷۰	۰/۰۷۱	۰/۰۶۹	۰/۰۶۹	WT	۳, ۳
۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	New	
۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱	MLRT	
۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۷	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸	GPT	
۰/۰۴۰	۰/۰۴۱	۰/۰۴۲	۰/۰۳۷	۰/۰۳۶	۰/۰۳۶	۰/۰۳۳	۰/۰۲۳	JKL	
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	JKW	۵, ۲,
۰/۰۷۱	۰/۰۶۸	۰/۰۶۴	۰/۰۶۹	۰/۰۶۲	۰/۰۶۳	۰/۰۶۷	۰/۰۶۶	WT	۵, ۲
۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	New	
۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	۰/۰۵۱	MLRT	
۰/۰۱۱	۰/۰۱۱	۰/۰۱۹	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۰۲۰	GPT	
۰/۰۳۶	۰/۰۳۹	۰/۰۴۱	۰/۰۴۱	۰/۰۳۹	۰/۰۳۸	۰/۰۳۶	۰/۰۳۵	JKL	
۰/۰۰۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۴	۰/۰۰۶	JKW	۴, ۴,
۰/۰۶۶	۰/۰۶۸	۰/۰۶۶	۰/۰۶۸	۰/۰۶۵	۰/۰۶۲	۰/۰۶۴	۰/۰۶۱	WT	۱۲, ۳
۰/۰۵۰	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	New	
۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	MLRT	
۰/۰۰۷	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	۰/۰۰۹	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	GPT	
۰/۰۴۱	۰/۰۴۱	۰/۰۳۹	۰/۰۴۰	۰/۰۴۰	۰/۰۴۱	۰/۰۴۱	۰/۰۳۵	JKL	
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	JKW	۳, ۶,
۰/۰۷۴	۰/۰۶۸	۰/۰۶۶	۰/۰۶۶	۰/۰۷۰	۰/۰۶۳	۰/۰۶۶	۰/۰۶۴	WT	۴, ۲
۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	New	
۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	MLRT	
۰/۰۲۵	۰/۰۲۸	۰/۰۲۷	۰/۰۲۶	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۲۸	۰/۰۲۷	GPT	
۰/۰۳۴	۰/۰۴۲	۰/۰۳۷	۰/۰۳۷	۰/۰۳۶	۰/۰۳۸	۰/۰۳۸	۰/۰۳۷	JKL	
۰/۰۱۵	۰/۰۱۶	۰/۰۱۷	۰/۰۱۵	۰/۰۱۵	۰/۰۱۵	۰/۰۱۷	۰/۰۱۵	JKW	۴, ۶,
۰/۰۶۱	۰/۰۶۸	۰/۰۶۲	۰/۰۵۹	۰/۰۵۹	۰/۰۶۲	۰/۰۵۹	۰/۰۶۲	WT	۸, ۱۰
۰/۰۴۸	۰/۰۵۶	۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	New	
۰/۰۴۸	۰/۰۵۷	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۴۵	۰/۰۴۵	MLRT	
۰/۰۳۶	۰/۰۳۷	۰/۰۳۵	۰/۰۳۶	۰/۰۳۷	۰/۰۳۴	۰/۰۳۶	۰/۰۳۶	GPT	
۰/۰۴۳	۰/۰۳۸	۰/۰۴۲	۰/۰۳۹	۰/۰۴۲	۰/۰۴۲	۰/۰۴۲	۰/۰۳۷	JKL	
۰/۰۲۴	۰/۰۲۲	۰/۰۲۵	۰/۰۲۳	۰/۰۲۴	۰/۰۲۱	۰/۰۲۳	۰/۰۱۹	JKW	۸, ۱۲,
۰/۰۶۱	۰/۰۵۵	۰/۰۶۱	۰/۰۵۸	۰/۰۶۱	۰/۰۵۶	۰/۰۶۰	۰/۰۵۶	WT	۷, ۲۰
۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱	۰/۰۵۴	۰/۰۴۷	۰/۰۵۴	۰/۰۵۰	New	
۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۵۳	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۵۴	۰/۰۴۷	MLRT	

اول در این روش‌ها در برخی موارد صفر است. با توجه به عملکرد آزمون‌ها در برآورد احتمال خطای نوع اول، در ادامه فقط توان آزمون روش‌های New و MLRT با یکدیگر مقایسه می‌شوند. زیرا روش‌های دیگر عملکرد ضعیفی در برآورد خطای نوع اول داشتند. برای بررسی برآورد توان آزمون حالت‌های $n_i = 3, 4, 5$ با حجم نمونه‌های متفاوت و مقادیر مختلف ضرایب تغییرات مدنظر قرار گرفته‌اند.

همچنین جایگشت‌های مختلف مقادیر ضرایب تغییرات نسبت به هم در حالت‌های مختلف در نظر گرفته شده‌اند. نتایج در جدول‌های ۳، ۴ و ۵ ارائه شده است. در جدول ۵ توان آزمون روش‌های New و MLRT در حالت حجم نمونه‌های برابر بررسی شده است. همان‌طور که در جداول ۳ و ۴ ملاحظه می‌شود، در اکثر حالات تحت بررسی، روش پیشنهادی دارای توان بالاتری نسبت به روش MLRT

جدول ۲: برآورد خطاهای نوع اول برای ۷ جامعه نرمال مستقل

مقدار مشترک ضرایب تغییرات							آزمون	حجم نمونه
۰/۰۴	۰/۰۴۵	۰/۰۳	۰/۰۲۵	۰/۰۲	۰/۰۱۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵	
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	GPT
۰/۰۲۸	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۰	۰/۰۱۶	۰/۰۰۱	۰/۰۰۹	۰/۰۰۵	JKL
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	JKW
۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۲۲	۰/۰۱۲۷	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۱۸	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۲۴	WT
۰/۰۴۵	۰/۰۴۶	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۴۶	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۳	New
۰/۰۴۸	۰/۰۴۱	۰/۰۵۳	۰/۰۴۷	۰/۰۴۶	۰/۰۴۶	۰/۰۵۳	۰/۰۵۰	MLRT
۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	GPT
۰/۰۳۸	۰/۰۳۶	۰/۰۳۸	۰/۰۳۴	۰/۰۳۲	۰/۰۲۵	۰/۰۱۷	۰/۰۰۷	JKL
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	JKW
۰/۰۱۰۰	۰/۰۹۳	۰/۰۹۷	۰/۰۹۶	۰/۰۹۲	۰/۰۹۴	۰/۰۹۱	۰/۰۹۰	WT
۰/۰۴۵	۰/۰۴۷	۰/۰۵۱	۰/۰۵۳	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۳	۰/۰۴۹	New
۰/۰۵۰	۰/۰۴۶	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۴۷	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	MLRT
۰/۰۱۳	۰/۰۱۰	۰/۰۱۲	۰/۰۱۲	۰/۰۱۳	۰/۰۱۳	۰/۰۱۱	۰/۰۱۲	GPT
۰/۰۴۴	۰/۰۴۵	۰/۰۴۴	۰/۰۴۰	۰/۰۳۷	۰/۰۳۸	۰/۰۳۸	۰/۰۲۷	JKL
۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	JKW
۰/۰۸۲	۰/۰۸۵	۰/۰۸۶	۰/۰۸۰	۰/۰۷۹	۰/۰۷۸	۰/۰۸۰	۰/۰۸۲	WT
۰/۰۵۰	۰/۰۵۵	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	New
۰/۰۵۰	۰/۰۵۵	۰/۰۵۵	۰/۰۴۷	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	MLRT
۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	GPT
۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	۰/۰۳۸	۰/۰۳۶	۰/۰۳۴	۰/۰۳۰	۰/۰۲۱	۰/۰۰۷	JKL
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	JKW
۰/۰۱۰	۰/۰۹۶	۰/۰۹۲	۰/۰۹۴	۰/۰۸۹	۰/۰۸۸	۰/۰۸۷	۰/۰۸۶	WT
۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۵۳	۰/۰۵۴	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۷	۰/۰۴۶	New
۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	۰/۰۴۷	MLRT
۰/۰۲۱	۰/۰۱۸	۰/۰۱۹	۰/۰۲۰	۰/۰۲۰	۰/۰۲۵	۰/۰۲۲	۰/۰۲۲	GPT
۰/۰۴۴	۰/۰۴۵	۰/۰۴۴	۰/۰۴۵	۰/۰۳۹	۰/۰۴۵	۰/۰۴۱	۰/۰۲۸	JKL
۰/۰۱۵	۰/۰۱۴	۰/۰۱۵	۰/۰۱۶	۰/۰۱۲	۰/۰۱۸	۰/۰۱۳	۰/۰۱۵	JKW
۰/۰۷۱	۰/۰۷۴	۰/۰۷۲	۰/۰۷۲	۰/۰۷۳	۰/۰۷۴	۰/۰۷۲	۰/۰۷۲	WT
۰/۰۴۵	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	New
۰/۰۴۷	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	۰/۰۴۷	۰/۰۵۰	۰/۰۴۶	۰/۰۴۵	MLRT
۰/۰۰۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۴	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	GPT
۰/۰۳۹	۰/۰۳۸	۰/۰۳۷	۰/۰۳۲	۰/۰۳۰	۰/۰۲۹	۰/۰۲۲	۰/۰۰۷	JKL
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	JKW
۰/۰۱۰۳	۰/۰۱۰۰	۰/۰۱۰۱	۰/۰۹۴	۰/۰۹۸	۰/۰۹۴	۰/۰۹۴	۰/۰۹۷	WT
۰/۰۵۳	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	New
۰/۰۴۶	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۷	۰/۰۴۶	۰/۰۴۹	MLRT

جدول ۳: برآورد توان آزمون برای ۳ جامعه نرمال مستقل با روش های New و

MLRT

ضرایب تغییرات و جایگشت های آن						آزمون	حجم نمونه
۰/۱،۰/۴	۰/۱،۰/۲	۰/۲،۰/۱	۰/۴،۰/۲	۰/۲،۰/۱	۰/۲،۰/۴		
۰/۲	۰/۴	۰/۲	۰/۱	۰/۴	۰/۱	New	۲، ۵، ۱۰
۰/۲۵۰	۰/۲۱۹	۰/۲۲۹	۰/۲۳۶	۰/۲۱۹	۰/۲۱۹	MLRT	
۰/۴۰۲	۰/۴۴۵	۰/۴۱۸	۰/۵۱۹	۰/۴۴۳	۰/۴۸۵	New	۳، ۵، ۷
۰/۴۰۰	۰/۴۶۲	۰/۳۴۶	۰/۴۰۲	۰/۵۹۳	۰/۵۸۲	MLRT	
۰/۵۸۸	۰/۱۴۸	۰/۱۱۰	۰/۷۱۲	۰/۸۴۸	۰/۸۱۳	New	۴، ۷، ۱۰
۰/۶۰۱	۰/۶۸۲	۰/۵۶۰	۰/۶۴۲	۰/۸۳۲	۰/۸۲۰	MLRT	
۰/۹۶۹	۰/۹۸۷	۰/۹۷۲	۰/۹۸۶	۰/۹۹۸	۰/۹۹۶	New	۱۰، ۱۵، ۲۰
۰/۹۷۴	۰/۹۹۰	۰/۹۷۲	۰/۹۸۴	۰/۹۹۸	۰/۹۹۵	MLRT	

۵۰آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال

می باشد و در چند حالت محدود رقابتی تنگاتنگ با روش MLRT داشته است. مانند جدول ۳ زمانی که حجم نمونه (۴ و ۷ و ۱۰) و ضرایب تغییرات (۰/۴ و ۰/۲ و ۰/۱) و (۰/۲ و ۰/۴ و ۰/۱) می باشد. در حالت حجم نمونه های برابر (جدول ۵) نیز دو روش New و MLRT تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.

همان طور که از جدول های ۴، ۳ و ۵ دیده می شود برای حجم نمونه ثابت، جایگشت های مختلف مقادیر ضرایب تغییرات منجر به تغییر در مقدار برآورد توان آزمون می شود. به منظور مقایسه بهتر روش های New و MLRT، حالت دیگری نیز در نظر گرفته شده است.

در این حالت از حجم نمونه و مقادیر متفاوت ضرایب تغییراتی استفاده شده که کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) برای مقایسه توان آزمون خود با سایر روش ها استفاده کرده اند. به علاوه برای حجم نمونه ثابت، برخی جایگشت های مختلف ضرایب تغییرات نیز در نظر گرفته شده است. بر اساس نتایج جدول ۶ برای حجم نمونه برابر و حجم نمونه بزرگ باز هم دو روش New و MLRT از لحاظ توان شبیه به هم هستند. در برخی موارد که توان روش MLRT بیشتر از روش جدید به نظر می آید، با در نظر گرفتن جایگشت دیگری از مقادیر ضرایب تغییرات این برتری به نفع روش New تغییر پیدا کرده است یا برآورد توان دو روش تقریباً یکسان شده اند.

۴ مثال عددی

داده های این مثال (نیری و رائو، ۲۰۰۳) مربوط به تعداد صید ۴ نوع ماهی در سال های ۱۹۹۱ الی ۱۹۹۹ در ایالت کارناتا کا هند است و اطلاعات مربوط به آن ها در جدول ۷ و نتایج آزمون ها در جدول ۸ ارائه شده اند. همان طور که دیده می شود روش های WT، MLRT و New فرض برابری ضرایب تغییرات را در سطح ۰/۰۵ رد می کنند. اما با استفاده از GPT، JKL و JKW این فرض رد نخواهد شد.

بحث و نتیجه گیری

همان طور که دیده می شود در روش های GPT، JKL و JKW وضعیت خوبی در خطای نوع اول نداریم و در برخی موارد برآورد احتمال خطای نوع اول بسیار

جدول ۴: برآورد توان آزمون برای ۴ جامعه نرمال مستقل با روش‌های New و MLRT

ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن						حجم نمونه
۰/۱، ۰/۳۳،	۰/۱، ۰/۳۳،	۰/۱، ۰/۴،	۰/۱، ۰/۴،	۰/۱، ۰/۲،	۰/۱، ۰/۲،	
۰/۴، ۰/۲	۰/۲، ۰/۴	۰/۲، ۰/۳۳	۰/۳۳، ۰/۲	۰/۴، ۰/۳۳	۰/۳۳، ۰/۴	
۰/۳۹۱	۰/۳۷۸	۰/۳۱۲	۰/۳۵۴	۰/۲۶۱	۰/۲۷۵	New ۲، ۵، ۸، ۱۰
۰/۳۱۲	۰/۳۲۰	۰/۲۶۶	۰/۲۸۰	۰/۲۷۴	۰/۲۸۵	MLRT
ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن						حجم نمونه
۰/۴، ۰/۲،	۰/۴، ۰/۲،	۰/۴، ۰/۳۳،	۰/۴، ۰/۳۳،	۰/۴، ۰/۱،	۰/۴، ۰/۱،	
۰/۳۳، ۰/۱	۰/۱، ۰/۳۳	۰/۱، ۰/۲	۰/۲، ۰/۱	۰/۳۳، ۰/۲	۰/۲، ۰/۳۳	
۰/۷۶۶	۰/۷۱۶	۰/۵۹۷	۰/۶۸۰	۰/۵۰۸	۰/۵۲۴	New ۲، ۵، ۸، ۱۰
۰/۵۳۹	۰/۴۹۶	۰/۳۶۸	۰/۴۲۸	۰/۳۳۴	۰/۳۵۴	MLRT
ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن						حجم نمونه
۰/۳۳، ۰/۴،	۰/۳۳، ۰/۴،	۰/۳۳، ۰/۲،	۰/۳۳، ۰/۲،	۰/۳۳، ۰/۱،	۰/۳۳، ۰/۱،	
۰/۱، ۰/۲	۰/۲، ۰/۱	۰/۴، ۰/۱	۰/۱، ۰/۴	۰/۴، ۰/۲	۰/۲، ۰/۴	
۰/۶۸۱	۰/۷۴۶	۰/۸۵۹	۰/۸۴۰	۰/۶۴۹	۰/۶۹۲	New ۲، ۵، ۸، ۱۰
۰/۴۶۹	۰/۵۲۷	۰/۶۷۲	۰/۶۶۸	۰/۴۶۷	۰/۵۱۹	MLRT
ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن						حجم نمونه
۰/۲، ۰/۱،	۰/۲، ۰/۱،	۰/۲، ۰/۳۳،	۰/۲، ۰/۳۳،	۰/۲، ۰/۴،	۰/۲، ۰/۴،	
۰/۴، ۰/۳۳	۰/۳۳، ۰/۴	۰/۱، ۰/۴	۰/۴، ۰/۱	۰/۳۳، ۰/۱	۰/۱، ۰/۳۳	
۰/۵۴۳	۰/۵۶۲	۰/۸۳۳	۰/۸۸۱	۰/۸۵۸	۰/۷۸۵	New ۲، ۵، ۸، ۱۰
۰/۴۵۷	۰/۴۷۴	۰/۶۶۹	۰/۷۱۶	۰/۶۷۰	۰/۶۰۱	MLRT

جدول ۵: برآورد توان آزمون برای ۵ جامعه نرمال مستقل با روش‌های New و MLRT

ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن						آزمون	حجم نمونه
$0/2, 0/15,$	$0/4, 0/4,$	$0/2, 0/2,$	$0/05, 0/06,$	$0/1, 0/15,$	$0/05, 0/05,$		
$0/15, 0/15$	$0/4, 0/3$	$0/2, 0/3$	$0/07, 0/08$	$0/15, 0/15$	$0/05, 0/1$		
$0/15$	$0/3$	$0/3$	$0/09$	$0/15$	$0/1$		
$0/072$	$0/070$	$0/094$	$0/101$	$0/079$	$0/272$	New	۴, ۴, ۴,
$0/065$	$0/065$	$0/089$	$0/091$	$0/072$	$0/230$	MLRT	۴, ۴
$0/082$	$0/078$	$0/113$	$0/133$	$0/084$	$0/252$	New	۵, ۵, ۵,
$0/075$	$0/074$	$0/107$	$0/124$	$0/079$	$0/308$	MLRT	۵, ۵
$0/092$	$0/094$	$0/134$	$0/158$	$0/094$	$0/448$	New	۶, ۶, ۶,
$0/083$	$0/089$	$0/126$	$0/149$	$0/095$	$0/409$	MLRT	۶, ۶
$0/103$	$0/107$	$0/178$	$0/213$	$0/113$	$0/602$	New	۸, ۸, ۸,
$0/096$	$0/103$	$0/173$	$0/205$	$0/118$	$0/572$	MLRT	۸, ۸

جدول ۶: برآورد توان آزمون برای ۳ جامعه نرمال مستقل بر اساس جدول کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴)

حجم نمونه					آزمون	ضرایب تغییرات
۱۰, ۲۰, ۳۰	۱۰, ۱۰, ۱۰	۵, ۱۰, ۱۰	۵, ۱۰, ۵	۵, ۵, ۵		
۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	New	۰/۱, ۰/۱, ۰/۱
۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	MLRT	۰/۱, ۰/۱, ۰/۱
۰/۰۵۰	۰/۰۴۲	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸	۰/۰۱۷	New	۰/۱, ۰/۲, ۰/۲
۰/۰۵۷	۰/۰۴۲	۰/۰۲۴	۰/۰۲۱	۰/۰۱۸	MLRT	۰/۱, ۰/۲, ۰/۲
۰/۰۷۸	-	۰/۰۴۰	۰/۰۳۴	-	New	-
۰/۰۷۸	-	۰/۰۳۷	۰/۰۲۷	-	MLRT	۰/۲, ۰/۱, ۰/۲
۰/۰۷۸	-	۰/۰۴۱	۰/۰۱۸	-	New	-
۰/۰۷۸	-	۰/۰۳۸	۰/۰۲۱	-	MLRT	۰/۲, ۰/۲, ۰/۱
۰/۰۹۵	۰/۰۹۷	۰/۰۶۱	۰/۰۵۹	۰/۰۵۴	New	-
۰/۰۹۷	۰/۰۸۲	۰/۰۷۸	۰/۰۷۱	۰/۰۶۸	MLRT	۰/۱, ۰/۴, ۰/۴
۱	-	۰/۰۹۵	۰/۰۹۰	-	New	-
۱	-	۰/۰۹۴	۰/۰۸۷	-	MLRT	۰/۴, ۰/۱, ۰/۴
۱	-	۰/۰۹۵	۰/۰۸۹	-	New	-
۱	-	۰/۰۹۵	۰/۰۷۱	-	MLRT	۰/۴, ۰/۴, ۰/۱
۰/۰۹۹	۰/۰۹۱	۰/۰۷۱	۰/۰۷۱	۰/۰۶۷	New	-
۱	۰/۰۹۲	۰/۰۸۵	۰/۰۸۸	۰/۰۷۰	MLRT	۰/۱, ۰/۵, ۰/۴
۰/۰۹۹	-	۰/۰۷۱	۰/۰۶۵	-	New	-
۱	-	۰/۰۸۵	۰/۰۷۶	-	MLRT	۰/۱, ۰/۴, ۰/۵
۱	-	۰/۰۸۳	۰/۰۷۸	-	New	-
۱	-	۰/۰۸۱	۰/۰۸۲	-	MLRT	۰/۴, ۰/۵, ۰/۱
۱	-	۰/۰۶۶	۰/۰۶۳	-	New	-
۱	-	۰/۰۶۶	۰/۰۹۱	-	MLRT	۰/۵, ۰/۱, ۰/۴
۱	-	۰/۰۶۳	۰/۰۶۵	-	New	-
۱	-	۰/۰۶۷	۰/۰۶۷	-	MLRT	۰/۵, ۰/۴, ۰/۱
۱	-	۰/۰۸۳	۰/۰۶۷	-	New	-
۱	-	۰/۰۸۱	۰/۰۶۱	-	MLRT	۰/۴, ۰/۱, ۰/۵

(-) به دلیل ثابت بودن حجم نمونه، نیازی به برآورد توان در جایگشت‌های مختلف مقادیر ضرایب تغییرات نبوده است.

جدول ۷: اطلاعات مربوط به تعداد صید ۴ نوع ماهی در سال‌های ۱۹۹۱ الی ۱۹۹۹ کارناتا کا هند

نوع ماهی				حجم نمونه
۴	۳	۲	۱	
۹	۹	۹	۹	میانگین نمونه‌ای
۹۳/۴	۳۰۳/۰	۱۰۹/۰	۶۰۵/۶	انحراف معیار نمونه‌ای
۸۲/۹۹	۱۱۳/۹۴	۱۱۵/۳۸	۲۱۰/۸۵	ضریب تغییرات نمونه‌ای
۰/۸۸۹	۰/۳۷۶	۱/۰۵۹	۰/۳۴۸	

جدول ۸: نتایج آزمون

روش	p-مقدار	مقدار آماره
GPT	۰/۰۵۶	۷/۶۴۶
JKL	۰/۰۸۱	۲۷/۳۰۸
JKW	۰/۱۲۹	۲۷/۳۰۸
WT	۰/۰۳۰	۸/۹۴۳
MLRT	۰/۰۴۲	۸/۲۱۸
New	۰/۰۳۸	۸/۹۴۳

کمتر از سطح اسمی ۰/۰۵ است. آزمون مجانبی WT نیز خطای نوع اول را کنترل نمی‌کند. اما روش‌های New و MLRT هر دو وضعیت مطلوبی در کنترل خطای نوع اول دارند و برآورد احتمال خطای نوع اول در این دو روش حتی برای نمونه‌های کوچک بسیار نزدیک به سطح اسمی آزمون می‌باشد. در این بین روش‌های JKW و GPT عملکرد ضعیف‌تری نسبت به روش‌های دیگر دارند زیرا در برخی موارد احتمال خطای نوع اول آن‌ها صفر برآورد شده است. نکته دیگر در مورد روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) این است که آماره آزمون در این روش، به صورت مجانبی تحت H_0 دارای توزیع χ^2 با $k-1$ درجه آزادی نمی‌باشد و فقط می‌توان با روش خودگردانی پارامتری از آن استفاده کرد. بنابراین استفاده از روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و آماره مجانبی WT به دلیل عملکرد ضعیف در خطای نوع اول در عمل توصیه نمی‌گردد. لذا بر اساس این نتایج فقط توان آزمون روش‌های New و MLRT بررسی شده‌اند؛ زیرا با توجه به عملکرد JKW، JKL، GPT و JKW و WT در خطای نوع اول، لزومی به مقایسه توان آن‌ها نمی‌باشد. در برخی موارد توان آزمون در روش New بهتر از MLRT است و در برخی موارد بالعکس و در برخی موارد دیگر عملکرد دو روش مانند هم است. به عنوان نمونه در جدول ۶ در مواردی که توان MLRT بهتر از New است با در نظر گرفتن جایگشت‌های دیگری از ضرایب تغییرات، این برتری به نفع روش New تغییر پیدا کرده است یا توان دو روش تقریباً یکسان شده‌اند. زمانی که حجم نمونه‌ها با یکدیگر برابر باشند و همچنین برای حجم نمونه بزرگ، دو روش New و MLRT توان شبیه به یکدیگر دارند. ذکر این نکته الزامی است که در روش MLRT مجبور به استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی برای برآورد مقدار مشترک ضرایب تغییرات در نمونه داده شده و نمونه‌های خودگردانی هستیم که این خود مستلزم استفاده از روش‌های عددی است. به نظر می‌آید استفاده از روش New به دلیل سادگی و سهولت بیشتر نسبت به روش MLRT برتری دارد. علاوه بر این، روش پیشنهادی از لحاظ خطای نوع اول و توان آزمون عملکرد مناسبی دارد. بنابراین استفاده از روش پیشنهادی در عمل به‌عنوان یک روش ساده‌تر و قابل اعتماد توصیه می‌شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از داوران محترم مقاله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند دارند.

مراجع

- Bennett, B. M. (1976), On Approximate Test for Homogeneity of Coefficients of Variation, *Contribution to Applied Statistics*, **22**, 169-171.
- Engle, R. F. (1984), *Wald, Likelihood Ratio and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics*, Volume II, Elsevier Science Publishers BV.
- Gupta, R. C. and Ma, S. (1996), Testing the Equality of the Coefficients of Variation in k Normal Populations, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **25**, 115-132.
- Jafari, A. and Kazemi, M. (2013), A Parametric Bootstrap Approach for the Equality of Coefficients of Variation, *Computational Statistics*, **28**, 2621-2639.
- Krishnamoorthy, K. and Lee, M. (2014), Improved Tests for The Equality of Normal Coefficients of Variation, *Computational Statistics*, **29**, 215-232.
- Liu, X., Xu, X. and Zhao J. (2011), A New Generalized p-value Approach for Testing Equality of Coefficients of Variation in k Normal Populations, *Journal of Statistical Computation and Simulation.*, **81**, 1121-1130.

Nairy, K. and Rao, K. A. (2003), Tests of Coefficients of Variation of Normal Population, *Communication in Statistics-Simulation and Computation.*, **32**, 641-661.

Rao, K. A. and Jose, C. T. (2001), *Tests for Equality of Coefficient of Variation of k Populations*, In: Proceeding the 53rd Session of International Statistical Institute, Seoul, Korea.

Tsou, T. S. (2009), A Robust Score Test for Testing Several Coefficients of Variation with Unknown Underlying Distributions, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **38**. 1350-1360.

Weerahandi, S. (1995), *Exact Statistical Methods for Data Analysis*, Springer, New York.

Archive of SID

SID



سرویس های
ویژه



سرویس ترجمه
تخصصی



کارگاه های
آموزشی



بلاگ
مرکز اطلاعات علمی



عضویت در
خبرنامه



فیلم های
آموزشی

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



مباحث پیشرفته یادگیری عمیق؛
شبکه های توجه گرافی
(Graph Attention Networks)



کارگاه آنلاین آموزش استفاده از
وب آوساینس



کارگاه آنلاین مقاله روزمره انگلیسی