مجله علوم آماری، بهار ۱۳۸۶
جلد ۱، شماره ۱، ص ۶۱-۷۲

صف با دو نوع ورودی، دو نوع سرویس و تعطیلی با شیوه برنولی

غلامحسین شاهکار، عبدالرحیم بادامچی‌زاده
دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۵/۳/۲۹ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۱/۲۰

چکیده : خط مشی مورد نظر دراین صف شامل دو ورودی با نرخهای متفاوت و دو نوع سرویس با نرخهای متفاوت است. هر دو ورودی فرآیند پواسون با نرخ میانگین متفاوت در نظر گرفته می‌شوند. همچنین فرض کنیم دو نوع سرویس دارای توزیع نمایی با میانگین های متفاوت هستند. بدون کاستن از کلیت مساله، می‌توان فرض کرد که یک سرویس دهنده هر دو نوع سرویس را ارایه می کند. هر متقاضی پس از ورود به سامانه در یک صف واحد برای دریافت سرویس منتظر می‌ماند. ارایه سرویس به ترتیب ورود $(FCFS)$ است. پس از اتمام هر نوع سرویس، سرویس دهنده به شیوه برنولی و با احتمال معینی باجه را به دلایلی تعطیل می‌کند. دوره تعطیلی دارای توزیع نمایی بوده و پس از اتمام دوره تعطیلی سرویس دهنده دوباره به سامانه بر می‌گردد، اگر متقاضی در سامانه وجود داشته باشد با خط مشی فوق به ارایه سرویس می‌پردازد. در غیر این صورت جهت ارایه سرویس منتظر می‌ماند.
در این بررسی پس از به دست آوردن معادلات حالت پایا به محاسبه متوسط تعداد افراد در سامانه و متوسط زمان انتظار در سامانه می‌پردازیم. به کمک فرمولهای لیتل این مقادیر را برای صف به دست می‌آوریم. به علاوه در حالت خاص نیز مساله را بررسی می‌کنیم.

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عبدالرحیم بادامچی‌زاده، badamchi@yahoo.com

واژه‌های کلیدی : فرآیند پواسون، توزیع نمایی، سرویس ناهمگن، تعطیلی با شیوه برنولی، معادلات حالت پایا.

۱ مقدمه

صف $M/M/1$ به عنوان ساده ترین نوع صف به طور کامل در گراس و هریس (۱۹۹۸) آمده است. همچنین در بروئر و بام (۲۰۰۵) مطالب مفیدی در مورد صف $M/G/1$ آورده شده است که G به معنای سرویس با توزیع دلخواه است. در سه دهه اخیر توجه خاصی به این نوع صفها با زمان تعطیلی سرویس دهنده صورت گرفته است.

برای اولین بار در فوهرمن (۱۹۸۱) و همچنین در بابا (۱۹۸۶) و بورثاکور و چودری (۱۹۹۷) این صف با ورودی گروهی و پواسون مورد بررسی قرار گرفته است. درچودوری (۲۰۰۰) صفهای با ورودی گروهی و سرویس کلی وتک باجه‌ای با زمان تعطیلی و دوره ترتیبی تحلیل شده است. به علاوه در دوشی (۱۹۹۰)، مادان (۱۹۹۱)، لوی و ایچیلای (۱۹۷۶) و چودوری (۲۰۰۲) می‌توان به کارهای قابل توجهی اشاره کرد. درگراس و هریس (۱۹۹۸) به صف های با دو نوع ورودی و دو نوع سرویس اشاره شده است. در سالهای اخیر کارهای ارزشمندی در مورد صف های با یک نوع ورودی و دو نوع سرویس ناهمگن و زمان تعطیلی سرویس دهنده صورت گرفته است که می توان به‌مادان و چودوری (۲۰۰۵) و مادان و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد.

در این مقاله به بررسی تعمیمی از حالتهای فوق می‌پردازیم که در آن صف مورد نظر دارای دو نوع ورودی با نرخهای متفاوت و دارای توزیع پواسون، دو نوع سرویس ناهمگن با نرخهای متفاوت و توزیع نمایی است. همچنین فرض می‌کنیم سرویس دهنده پس از اتمام هر نوع سرویس با شیوه برنولی و احتمالی معین باجه را به دلایلی تعطیل می‌کند. توزیع دوره‌های تعطیلی نمایی فرض می‌شود. همچنین زمان‌های ورود، سرویس، و تعطیلی متغیرهای مستقل‌اند. نمونه‌هایی از این نوع صف‌ها را می‌توان در زندگی روزمره مانند بیمارستان‌ها، آرایشگاه‌ها، در خط تولید

کارخانه، در شبکه‌های رایانه‌ای و غیره یافت.

در بخش ۲ ابتدا به بیان تعریف‌های مقدماتی و مدلسازی ریاضی صف می‌پردازیم. سپس در بخش ۳ معادلات تعادلی حالت پایا را به دست می‌آوریم و به کمک آنها توابع مولد تعداد افراد در سامانه با در نظر گرفتن نوع متقاضی موجود در سرویس به دست خواهد آمد. در بخش ۴ متوسط تعداد افراد درسامانه و صف و همچنین متوسط زمان انتظار در سامانه و صف را محاسبه خواهیم کرد. در بخش ۵ به بررسی حالتهای خاصی می‌پردازیم که از نتایج این بحث حاصل می‌شوند.

۲ تعریف‌ها و مدلسازی ریاضی

یکی از مشکلات موجود در بررسی صف‌ها، پیچیدگی محاسبات و ظهور فرمول‌های طولانی به واسطه تعدد پارامترهای موجود است. در این مقاله علیرغم وجود شرایط مختلف با اتخاذ شیوه‌ای خاص سعی نموده‌ایم پارامترهای موجود را در ظاهر کاهش دهیم که این کار موجب آسان شدن محاسبات و بیان نسبتاًساده فرمول‌ها و نتایج شده است. با این حال مطمئن هستیم که کاربر حرفه‌ای این مقاله با فرمول‌های حجیم و محاسبات طاقت فرسای سامانه‌های صف آشنا و مأنوس است.
بر این اساس فرض‌های زیر رابرای صف مورد نظر داریم:

۱. دو نوع متقاضی متفاوت با فرآیند پواسون و نرخ‌های $\alpha\lambda$ و $(1-\alpha)\lambda$ وارد سامانه می‌شوند. در صورتی که سرویس دهنده مشغول باشد آنگاه صفی واحد با خط مشی سرویس به ترتیب ورود، توسط این متقاضیان ایجاد می‌شود.

۲. دو نوع سرویس ناهمگن با توزیع نمایی و نرخ‌های μ و $\beta\mu$ توسط سرویس دهنده ارایه می‌شود. بر حسب نوع متقاضی در ابتدای صف، سرویس دهنده نوع سرویس خود را تعیین می‌کند.

۳. پس از اتمام هر نوع سرویس، به دلایلی مانند خستگی سرویس دهنده، ارتقأ یا تعمیر ابزار سرویس، اشکالات فنی و غیره سرویس دهنده با احتمال θ باجه را تعطیل می‌کند و یا با احتمال $(1-\theta)$ در سامانه باقی می‌ماند. دوره‌های تعطیلی دارای توزیع نمایی با میانگین $1/\gamma$ فرض می‌شوند. پس از اتمام دوره تعطیلی و

بازگشت سرویس دهنده، در صورت وجود متقاضی، به ارایه سرویس می‌پردازد، در غیر این صورت منتظر رسیدن متقاضی خواهد بود.
۴)زمان ورود، زمان سرویس و زمان تعطیلی متغیرهای مستقل در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۱ : به‌ازای $r = ۱,۲$ فرض کنیم $P_{rn}(t)$ احتمال وجود متقاضی rام در سرویس و وجود n متقاضی در سامانه در زمان t باشد. دراین صورت $P_n(t) = P_{۱n}(t) + P_{۲n}(t)$ احتمال وجود n متقاضی در سامانه با در نظر گرفتن وجود یک متقاضی در سرویس بدون لحاظ کردن نوع آن در زمان t خواهد بود.
همچنین $P_{\circ}(t)$ را احتمال بیکاری سرویس دهنده در زمان t تعریف می کنیم، به عبارت دیگر متقاضی در صف یا سامانه وجود نداشته باشد.
همچنین به ازای $n \geq ۱$ تابع $V_n(t)$ را احتمال وجود n متقاضی در سامانه در زمان t و در موقع تعطیلی سرویس دهنده تعریف می‌کنیم.
حال فرض کنیم شرایط حالت پایا برقرار است و قرار می‌دهیم:

$$P_{rn} = \lim_{t\to\infty} P_{rn}(t)$$
$$P_{\circ} = \lim_{t\to\infty} P_{\circ}(t)$$
$$V_n = \lim_{t\to\infty} V_n(t)$$

بنابراین P_{rn} و $P_{\circ}$ و V_n احتمال های متناظر برای حالت پایا خواهند بود. با استفاده از آنها توابع مولد را برای حالت پایا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_۱(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} P_{۱n} z^n \qquad (۱)$$

$$F_۲(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} P_{۲n} z^n \qquad (۲)$$

$$F(z) = F_۱(z) + F_۲(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} P_n z^n \qquad (۳)$$

$$V(z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n z^n \qquad (۴)$$

۳ معادلات حالت پایا

با توجه به ویژگی‌های ۱ و ۲ مذکور در بخش ۲، توضیح زیر برای تبیین معادلات حالت پایا ضروری است.

به دلیل وجود دو نوع سرویس، در معادلات تعادلی P_{1n} و P_{2n} به هم مربوط خواهند بود. نرخ سرویس برای متقاضی نوع ۱ و ۲ به ترتیب μ و $\beta\mu$ است، در هر صورت بعد از اتمام سرویس، متقاضی نوع اول با شانس α و متقاضی نوع دوم با شانس $(1-\alpha)$ در سرویس خواهد بود. به عبارت دیگر سامانه با شانس α و $(1-\alpha)$ به ترتیب در وضعیت $(1,n)$ و $(2,n)$ خواهد بود. بنابراین نرخ تغییر وضعیت از حالت $(1,n+1)$ به حالت $(1,n)$ برابر $\alpha\mu$، از حالت $(2,n+1)$ به $(1,n)$ برابر$\alpha\beta\mu$، از حالت $(1,n+1)$ به $(2,n)$ برابر $(1-\alpha)\mu$، و از حالت $(2,n+1)$ به $(2,n)$ برابر $(1-\alpha)\beta\mu$ است. به علاوه اگر نرخ زمان تعطیلی راγ فرض کنیم آنگاه با شانس $\alpha\gamma$ متقاضی نوع اول و با شانس $(1-\alpha)\gamma$ متقاضی نوع دوم در سرویس خواهند بود. پس از نوشتن معادلات تفاضلی حالت پایا و تقسیم روابط (۵) تا (۹) بر μ و با فرض $\eta = \frac{\lambda}{\mu}$، معادلات زیر را داریم:

$$\begin{aligned}(\eta+1)P_{1n} &= \eta P_{1,n-1} + \alpha(1-\theta)P_{1,n+1} \\ &+ \alpha\beta(1-\theta)P_{2,n+1} + \mu^{-1}\alpha\gamma V_n, n \geq 2 \end{aligned} \qquad (۵)$$

$$\begin{aligned}(\eta+\beta)P_{2n} = \eta P_{2,n-1} &+ (1-\alpha)(1-\theta)P_{1,n+1} \\ &+ (1-\alpha)\beta(1-\theta)P_{2,n+1} \\ &+ \mu^{-1}(1-\alpha)\gamma V_n, n \geq 2 \end{aligned} \qquad (۶)$$

$$(\eta+1)P_{11}=\alpha\eta P_0+\alpha(1-\theta)P_{12}+\alpha\beta(1-\theta)P_{22}+\mu^{-1}\alpha\gamma V_1 \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}(\eta+\beta)P_{21} &= (1-\alpha)\eta P_0+(1-\alpha)(1-\theta)P_{12}\\ &+ (1-\alpha)\beta(1-\theta)P_{22}+\mu^{-1}(1-\alpha)\gamma V_1 \qquad (8)\end{aligned}$$

$$\eta P_0=(1-\theta)P_{11}+(1-\theta)\beta P_{21}+\mu^{-1}\alpha\gamma V_0 \qquad (9)$$

$$(\lambda+\gamma)V_n=\lambda V_{n-1}+\theta\mu P_{1,n+1}+\theta\beta\mu P_{2,n+1} \quad n\geq 1 \qquad (10)$$

$$(\lambda+\gamma)V_0= \theta\mu P_{11}+\theta\beta\mu P_{21} \qquad (11)$$

حال رابطه (۵) را در z^n ضرب کرده و از $n=2$ تا $n=\infty$ جمع بسته، سپس رابطه (۷) را در z ضرب کرده و با حاصل آن جمع می‌کنیم. با استفاده از (۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}[(\eta+1)-\eta z-\frac{\alpha(1-\theta)}{z}]F_1(z)-\frac{\alpha\beta(1-\theta)}{z}F_2(z) &= \alpha\eta P_0(z-1)\\ &+ \mu^{-1}\alpha\gamma V(z) \quad (12)\end{aligned}$$

دوباره همین کار را با روابط (۶) و (۸) تکرار کرده و با استفاده از (۹) داریم:

$$\begin{aligned}[(\eta+\beta)- \eta z-\frac{(1-\alpha)\beta(1-\theta)}{z}]F_2(z)-\frac{(1-\alpha)(1-\theta)}{z}F_1(z) &=\\ (1-\alpha)\eta P_0(z-1)+\mu^{-1}(1-\alpha)\gamma V(z) \qquad (13)\end{aligned}$$

حال رابطه (۱۰) را در z^n ضرب کرده و از $n=1$ تا $n=\infty$ جمع بسته، و با استفاده از (۱۱) داریم:

$$(\lambda+\gamma)V(z)=\lambda zV(z)+\frac{\theta\mu}{z}F_1(z)+\frac{\theta\beta\mu}{z}F_2(z) \qquad (14)$$

از (۱۴) خواهیم داشت:

$$V(z) = \frac{\theta\mu}{z}[\frac{F_1(z) + \beta F_2(z)}{\lambda(1-z)+\gamma}] \qquad (۱۵)$$

حال با جایگذاری (۱۵) در روابط (۱۲) و (۱۳) دستگاه معادلات همزمان زیر را برای $F_1(z)$ و $F_2(z)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} [1+\eta(1-z)-\alpha h(z)]F_1(z) - [\alpha\beta h(z)]F_2(z) = \alpha\eta P_0(z-1) \\ -(1-\alpha)h(z)F_1(z) + [\beta+\eta(1-z)-(1-\alpha)\beta h(z)]F_2(z) = (1-\alpha)\eta P_0(z-1) \end{cases}$$

که در آن

$$h(z) = \frac{1}{z}[(1-\theta) + \frac{\gamma\theta}{\lambda(1-z)+\gamma}] \quad , h(z) = 1 \qquad (۱۶)$$

با حل این دستگاه $F_1(z)$ و $F_2(z)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F_1(z) = \frac{\alpha\eta P_0 z[\beta+\eta(1-z)][\lambda(1-z)+\gamma]}{zA(z)}, \qquad (۱۷)$$

$$F_2(z) = \frac{(1-\alpha)\eta P_0 z[1+\eta(1-z)][\lambda(1-z)+\gamma]}{zA(z)}, \qquad (۱۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A(z) &= \lambda(1-z)+\gamma][\eta^2(z-1)-\eta(\beta+1)] \\ &+ [\eta(\alpha+\beta-\alpha\beta)][\lambda(1-z)(1-\theta)+\gamma-\beta[\lambda(z-1+\theta)-\gamma] \end{aligned}$$

در این مرحله برای تعیین کامل $F_1(z)$ و $F_2(z)$ نیاز به مقدار P_0 داریم. با استفاده از شرط نرمال ساز داریم:

$$F_1(1) + F_2(1) + P_0 = 1$$

به کمک روابط (۱۷) و (۱۸) و با جایگذاری مقادیر داریم:

$$P_0 = 1 + \frac{\gamma\eta(\alpha\beta-\alpha+1)}{\beta(\lambda\theta-\gamma)} \qquad (۱۹)$$

همچنین ضریب بهره‌دهی سامانه نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho = 1 - P_0 = \frac{\gamma\eta(\alpha - \alpha\beta - 1)}{\beta(\lambda\theta - \gamma)} \quad (20)$$

لازم به ذکر است که احتمال بیکاری (P_0) و ضریب بهره‌دهی و همچنین روابط لیتل در سامانه‌های صف با تعطیلی از قوانین صف‌های معمولی تبعیت می‌کند (ر–ک تاکاجی، ۱۹۹۱).

شرط حالت پایا یعنی $\rho < 1$، در این سامانه عبارتست از

$$\gamma\eta[\alpha(1 - \beta) - 1] < \beta(\lambda\theta - \gamma) \quad (21)$$

۴ محاسبه مشخصه‌های سامانه

فرض کنیم L_1 و L_2 به ترتیب متوسط تعداد افراد در سامانه از نوع ۱ و ۲ باشند. آنگاه بنا بر تعریف داریم:

$$L_1 = \frac{d}{dz}F_1(z) \mid_{z=1} \quad (22)$$

و

$$L_2 = \frac{d}{dz}F_2(z) \mid_{z=1} \quad (23)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\alpha\eta}{\beta(\gamma - \lambda\theta)}\{ [\gamma(\beta - \eta) - \lambda\beta] \\ &+ \frac{\beta\gamma[\eta(\beta + 1)(\lambda - \gamma) + \eta^2\gamma - \lambda[\beta + \eta(1 - \theta)(\alpha + \beta - \alpha\beta)]]}{\beta(\lambda\theta - \gamma) + \eta\gamma(\alpha\beta - \alpha + 1)}\} \quad (24) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{(1 - \alpha)\eta}{\beta(\gamma - \lambda\theta)}\{ [\gamma(1 - \eta) - \lambda] \\ &+ \frac{\gamma[\eta(\beta + 1)(\lambda - \gamma) + \eta^2\gamma - \lambda[\beta + \eta(1 - \theta)(\alpha + \beta - \alpha\beta)]]}{\beta(\lambda\theta - \gamma) + \eta\gamma(\alpha\beta - \alpha + 1)}\} \quad (25) \end{aligned}$$

فرض کنیم ρ_1 و ρ_2 به ترتیب ضریب بهره‌وری سامانه فقط با ورودی نوع ۱ و نوع ۲ باشند. شبیه محاسبه ρ می‌توان دید:

$$\rho_1 = \frac{\alpha\beta\eta\gamma}{\beta(\gamma-\lambda\theta)} \quad , \quad \rho_2 = \frac{(1-\alpha)\eta\gamma}{\beta(\gamma-\lambda\theta)} \tag{۲۶}$$

در این صورت $(L_q)_1$ و $(L_q)_2$ یعنی متوسط تعداد افراد در صف به ترتیب برای ورودی نوع ۱ و نوع ۲ از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$(L_q)_1 = L_1 - \rho_1 \qquad (L_q)_2 = L_2 - \rho_2 \tag{۲۷}$$

همچنین متوسط زمان انتظار در صف برای ورودی نوع ۱ و نوع ۲ به ترتیب برابر است با:

$$(W_q)_1 = \frac{(L_q)_1}{\alpha\lambda} \quad , \quad (W_q)_2 = \frac{(L_q)_2}{(1-\alpha)\lambda} \tag{۲۸}$$

علاوه براین بنابر رابطه (۳) متوسط تعداد افراد در سامانه برابر $L = L_1 + L_2$ است. و در نتیجه متوسط زمان انتظار در سامانه برابر است با $W = \frac{L}{\lambda}$.

۵ برخی حالت های خاص

در این بخش به بررسی چند حالت خاص می‌پردازیم که در مراجع قبلی به آنها اشاره کردیم.

برای تعیین مشخصه های این سامانه، بدون تعطیلی سرویس دهنده، در روابط (۱۹) و (۲۰) و (۲۶) فرض می‌کنیم که $\theta \to 0$ و $\gamma \to \infty$. در این صورت داریم:

$$P_0 = 1 - \alpha\eta - (1-\alpha)(\frac{\eta}{\beta}) \quad , \quad \rho = \eta[\alpha + (1-\alpha)(\frac{1}{\beta})] \tag{۲۹}$$

و

$$\rho_1 = \alpha\eta \quad , \quad \rho_2 = (1-\alpha)(\frac{\eta}{\beta}) \tag{۳۰}$$

سپس با همین فرض در روابط (۱۷) و (۱۸) و مشتق گیری از $F_1(z)$ و $F_2(z)$ حاصل داریم:

$$(L_q)_1 = \alpha\eta^2 \frac{1-(\beta-1)(1-\alpha)(\eta/\beta^2)}{1-\alpha\eta-(1-\alpha)(\eta/\beta)} \quad , L_1 = \rho_1 + (L_q)_1 \tag{۳۱}$$

و

$$(L_q)_2 = (1-\alpha)\eta^2 \frac{(1/\beta^2) + (\beta - 1)\alpha(\eta/\beta^2)}{1 - \alpha\eta - (1-\alpha)(\eta/\beta)} \quad , L_2 = \rho_2 + (L_q)_2 \qquad (32)$$

بنابراین داریم:

$$L_q = \frac{\alpha\eta^2 + (1-\alpha)(\eta^2/\beta^2)}{1 - \alpha\eta - (1-\alpha)(\eta/\beta)} \quad , \quad W_q = (L_q/\lambda) \qquad (33)$$

اگر فرض کنیم $\alpha = 1$، آنگاه صفی فقط با یک نوع ورودی مورد نظر است که در واقع همان صف $M/M/1$ معمولی است. با اعمال این فرض در ر وابط (۳۰) و (۳۳) رابطه

$$L_q = \frac{\eta^2}{1-\eta} \quad , \rho_1 = \rho = \eta, \quad W_q = (L_q/\lambda) \qquad (34)$$

حاصل می‌گردد.

۶ بحث و نتیجه گیری

در سال‌های اخیر اکثر سامانه‌های صف با یک نوع ورودی بررسی شده‌اند، اما تنوع در ورودی یکی از بحث‌های جدید می‌باشد، که در این مقاله نیز دو نوع ورودی با توزیع پواسون بررسی گردیده است، که در آن تعداد نوع سرویس با تعداد نوع ورودی برابری می‌کند. در حالیکه در نظر گرفتن بیش از دو نوع ورودی یکی ازمساله‌های حل نشده است. به علاوه ورودی‌ها با توزیع‌های دلخواه نیز می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. بحث مشابهی در مورد سرویس‌دهی نیز وجود دارد که در نظر گرفتن چند نوع سرویس با توزیع‌های دلخواه می‌تواند زمینه‌ای برای تحقیق بیشتر باشد. نظر به اینکه تعطیلی سرویس‌دهنده به دلایل مختلف از مشکلات روزمره سامانه صف می باشد و در این مقاله سامانه دارای تعطیلی سرویس دهنده با توزیع زمان تعطیلی نمایی مورد مطالعه قرار گرفته است، تعمیم این مساله به حالت توزیع کلی زمان تعطیلی می‌تواند از زمینه‌های تحقیقی بعدی باشد.

مراجع

Baba, Y. (1986), *On the $M^X/G/$۱ Queue with Vacation Time.* Operations Research Letters, **5**, 93-98.

Borthakur, A. and Choudhury, G. (1997), *On a Batch Arrival Poisson Queue with Generalized Vacation.* Sankhya Ser. B, 59, 369-383.

Breuer, L., Baum, D.(2005) *An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods*, Springer, Netherlands.

Choudhury, G. (2000), *An $M^X/G/$۱ Queueing System with a Set up Period and a Vacation Period*, Queueing Systems Theory Applications, **36**, 23-38.

Choudhury, G. (2002), *A Batch Arrival Queue with a Vacation Time Under Single Vacation Policy*, Computer & Operation Research, **29**, 1941-1955.

Doshi, B. T. (1990) *Conditional and Unconditional Distributions for M/G/1 Type Queues with Server Vacation*, Questa, **7**, 229-252.

Fuhrman, S. (1981), *A Note on the M/G/1 Queue with Server Vacation*, Operation Ressearch, 31, 1368.

Gross, D. and Harris, M. (1998), *Foundementals of Queueing Theory, Second Edition*, John Wiley and Sons.

Levi, Y. and Yechilai, U. (1976), *An M/M/s Queue with Servers Vacations.* Information, Vol. 14, **2**, 153-163.

Madan, K. C. (1991), *On a* $M^{[x]}/M^{[b]}/۱$ *Queueing System wiyh General Vacation Times*, Internnational Journal of Management and Information Sciences, 1, **2**, 51-61.

Madan, K. C. and Choudhury, G. (2005), *A Single Server Queue with two Phases of Heterogenous Service under Bernoullischedule and a General Vacation Time*, Information and Management Sciences. Vol. 16, **2**, 1-16.

Madan, K. C., Al-Rawi, Z. R. and Amjad, D. A. (2005), *On* $M^X/\binom{G_۱}{G_۲}/۱/G(BS)/V_s$ *Vacation Queue with Two Types of General Heterogeneous Service* Journal of Applied Mathematics and Decision Science, **3**, 123-135.

Takagi, H. (1991), *QUEUEING ANALYSIS*, Vol. 1, North-Holland, Netherlands.