

# SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



PROPOSAL

پروپوزال

مركز آموزش پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی

کارگاه آنلاین پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی



مركز آموزش روش تحقیق و مقاله نویسی علوم انسانی

کارگاه آنلاین روش تحقیق و مقاله نویسی علوم انسانی



مركز آموزش آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترکیه های جستجو

کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترکیه های جستجو

## کنترل پایدارساز سراسری مسیر کوانتومی با حالت‌های تعادل چندگانه

جواد شریفی<sup>۱</sup>، حمیدرضا مومنی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، jv.sharifi@gmail.com

<sup>۲</sup> دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، momeni\_h@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۴/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۷/۵)

**چکیده:** سیستم کوانتومی تصادفی با حالت تخمین‌یافته (مسیر کوانتومی) که دارای چندین نقطه تعادل است مورد تحلیل جهت طراحی یک کنترل‌کننده پایدارساز سراسری قرار گرفته است. قانون کنترلی به گونه‌ای طراحی شده است که تضمین می‌کند سیستم تنها به سمت نقطه تعادل مطلوب هدایت می‌شود و به سمت هیچکدام از دیگر نقاط تعادل حرکت نمی‌کند. به عنوان یک مثال فیزیکی از پایدارسازی سیستم با چندین نقطه تعادل، پایدارسازی سراسری یک اتم دارای اسپین نیم (شامل دو نقطه تعادل) که بعنوان بیت کوانتومی در محاسبات کوانتومی کاربرد فراوانی دارد، مورد بررسی قرار گرفته و شبیه‌سازی شده است و نتایج شبیه‌سازی، طراحی نظری حاصل شده را تأیید می‌نماید.

**کلمات کلیدی:** مسیر کوانتومی، معادلات دیفرانسیل تصادفی، پایداری تصادفی، اتم اسپین نیم، کویت.

**Abstract:** Quantum trajectory with multiple equilibrium points is analyzed to become globally stable. The control law is designed such that the quantum system stabilized to one of its wanted equilibrium point and escape from the other unwanted equilibriums. As a physical example the global stabilization of one half-spin atom, which is known as a quantum bit (qubit) and has many applications in quantum computing, is investigated by our control law and simulated. The simulation result confirms the theoretical design.

**Keywords:** Quantum trajectory, stochastic differential equation, stochastic stability, half-spin atom, quantum bit (qubit).

### ۱- مقدمه

است، سیستم کوانتومی باز<sup>۴</sup> (دارای تقابل و برهم‌کنش با محیط و نویز) است. معادلاتی که نمو<sup>۵</sup> سیستم کوانتومی با نویز کوانتومی (فوتون)<sup>۶</sup> را بیان می‌کند، معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی<sup>۷</sup> است که برای اولین بار توسط دو دانشمند بنام هادسن و پارساساراسی [10] بدست آمد و این معادلات نیز به اسم آن دو نفر شهرت دارد. با استفاده از این معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی، یک دانشمند روسی بنام بلاوئین در [11] برای اولین بار، توانست معادلات دیفرانسیل تصادفی کلاسیکی استخراج نماید که بر اساس اندازه‌گیری خروجی، تخمین حالت سیستم کوانتومی باز را امکان‌پذیر نماید. این معادلات تخمین که به مسیر کوانتومی شهرت دارد، گستره وسیعی از سیستم‌های کوانتومی باز را شامل می‌شود. مسیرهای کوانتومی بدلیل کاربرد فراوان، مورد

فیزیک کوانتومی به بررسی دینامیک و قوانین حاکم بر ذرات ریز (در مقیاس هسته اتم، اتم و ملکول) می‌پردازد. با پیشرفت فناوری لیزر هم اکنون دستکاری اینگونه سیستم‌ها برای رسیدن به هدف مطلوب امکان‌پذیر شده است [1]. یکی از مهمترین کاربردهای کنترل سیستم-های کوانتومی برای توسعه محاسبات و پردازش اطلاعات کوانتومی به منظور تحقق و ساخت رایانه‌های کوانتومی است [2,3]. از دیگر کاربردهای کنترل کوانتومی در فیزیک ماده چگال<sup>۱</sup> و لیزر اتمی [4,5,6]، نانو تکنولوژی [7]، اسپینترونیک<sup>۲</sup> [8] و بسیاری از دیگر کاربردها می‌باشد [9]. معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده دینامیک یک سیستم کوانتومی بسته (بدون تقابل با محیط)، معادله مشهور شرودینگر<sup>۳</sup> می‌باشد. اما آنچه در توسعه تکنولوژی کوانتومی بسیار حائز اهمیت

<sup>4</sup> Open quantum system

<sup>5</sup> Evolution

<sup>6</sup> Quantum noise (photon)

<sup>7</sup> Quantum stochastic differential equation (QSDE)

<sup>1</sup> Condense Physics

<sup>2</sup> Spintronic

<sup>3</sup> Schrödinger Equation

(کوئیت)<sup>۲</sup>، که از اساسی‌ترین اجزای محاسبات کوانتومی است، بررسی شده و شبیه‌سازی می‌شود.

## ۲- حالت و مشاهده پذیر کوانتومی

یک فضای هیلبرت محدود  $\mathcal{H}^3$  را در نظر بگیرید. ضرب داخلی در این فضا را با نماد  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  نشان می‌دهیم که در مولفه دوم خطی و در مولفه اول ناخطی<sup>۴</sup> است. نرم فضای هیلبرت اقلیدسی است که عبارت است از  $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . یک بردار ستونی مختلط  $n \times 1$  در فضای  $\mathcal{H}$  با نماد  $|\Psi\rangle$  نشان داده می‌شود و کت<sup>۵</sup> دیراک نامیده می‌شود. ترانهاده مزدوج<sup>۶</sup> این بردار مختلط که یک بردار سطری  $1 \times n$  است با نماد  $\langle \Psi| = |\Psi\rangle^\dagger$  نشان داده شده و برا<sup>۷</sup> نامیده می‌شود. فرض کنید که  $|\Psi\rangle$  پایه‌های فضای هیلبرت باشند، آنگاه برای هر بردار در این فضا داریم:  $|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^n a_k |\Psi_k\rangle$  بطوریکه ضرایب ترکیب خطی  $a_k \in \mathbb{R}_+$  به گونه‌ای می‌باشند که بردار حالت نرمالیزه باشد، به عبارتی:  $\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi, \Psi \rangle = \|\Psi\|^2 = 1$  واضح است که حاصلضرب کت در برا  $\langle \Psi | \Psi \rangle$  یک ماتریس  $n \times n$  است که با ترانهاده مزدوج خود برابر است، این ماتریس را در فیزیک کوانتومی، ماتریس چگالی<sup>۸</sup> می‌نامند و با نماد  $\rho$  نشان می‌دهند. با توجه به نرمالیزه بودن بردار حالت، رد ماتریس چگالی برابر با یک است:  $\text{tr}(\rho) = 1$ . همچنین توان دوم ماتریس چگالی در رابطه  $0 \leq \text{tr}(\rho^2) \leq 1$  صدق می‌کند و تساوی<sup>۹</sup> برابر با یک زمانی برقرار است که ماتریس چگالی متناظر با حالت خالص<sup>۱۰</sup> (پایه ماتریسی) باشد [19]. ماتریس چگالی اگرچه دارای درایه‌های مختلط است، اما با توجه به تعریف آن یک ماتریس هرمیتی (خود-الحاق)<sup>۱۱</sup> است:  $\rho = \rho^\dagger$ . با استفاده از ماتریس چگالی، می‌توان مقادیر آماری وابسته به یک کمیت قابل اندازه‌گیری در فیزیک کوانتومی را محاسبه نمود. ابتدا اجازه دهید به تعریف مشاهده‌پذیر در فیزیک کوانتومی بپردازیم.

در فیزیک کوانتومی، عملگرهای قابل اندازه‌گیری را مشاهده‌پذیر<sup>۱۲</sup> می‌نامند. برای مثال مکان، سرعت، ممان زاویه‌ای یک ذره کوچک (مثل اتم) مثال‌هایی از مشاهده‌پذیرهای کوانتومی می‌باشند. یک

توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها، فیزیکدان‌ها و مهندسان کنترل [12-14] قرار گرفته است.

روش‌های کنترلی فراوانی برای مسیرهای کوانتومی توسعه یافته است که از جمله مهم‌ترین آنها، کنترل بهینه تصادفی و پایدارسازی تصادفی است. اما پایدارسازی تصادفی این سیستم‌ها هم بسیار مشکل است و هم اهمیت بیشتری دارد. دلیل این اهمیت این است که مسیر کوانتومی دارای این خاصیت ویژه‌اند که دارای چندین نقطه تعادل پایدار می‌باشند و این امر، پایدارسازی سراسری آنرا بسیار مشکل نموده است. اولین مساله پایدارسازی اینگونه سیستم‌ها در [15] برای یک مثال جزئی از مسیر کوانتومی یعنی یک بیت کوانتومی (کوئیت) بررسی شد که از روش هندسی استفاده شده است. همچنین در [16] مساله پایدارسازی سراسری برای دو دسته مسیر کوانتومی بررسی شده است که این دو دسته عبارتند از (۱) -مجموعه‌ای از اتم‌های دارای اسپین و نیز (۲) - دو اتم دارای همبستگی. در این روش پایدارسازی سراسری، یک کنترل چند قانونی که بسته به ناحیه حالت چگالی سیستم، سوئیچ کرده و سیگنال کنترلی مناسب را اعمال می‌کند تا این دو سیستم را پایدار سراسری نماید. اما روش دستیابی کنترلی آنها که بر اساس سوئیچ کردن در نواحی مختلف است، بسیار پیچیده بوده و تنها برای این دو مثال نوعی حل شده است نه برای معادله کلی مسیر کوانتومی بلاو کین. در مرجع [17] کنترل لیاپانوف مسیر کوانتومی با وجود مشاهده‌پذیر هرمیتی یا خود-الحاق<sup>۱</sup> بررسی شده است. همچنین در [18] مساله پایدارسازی سراسری برای یک دسته از اتم‌ها مورد تحلیل قرار گرفته است.

هدف ما در اینجا ارائه یک کنترل‌کننده پایدار ساز سراسری و تنها با یک قانون کنترلی در تمامی نواحی حالت سیستم، برای معادله کلی مسیر کوانتومی بلاو کین است که برای کلیه سیستم‌های کوانتومی باز قابل کاربرد باشد. برای این منظور، در ابتدا بطور مختصر به قالب ریاضی کوانتومی آماری در فضای هیلبرت، اشاره کرده و حالت سیستم کوانتومی را تشریح می‌کنیم. همچنین، معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی را که اساس توسعه نظریه مسیرهای کوانتومی است، بیان می‌کنیم. پس از آن، مسیر کوانتومی بلاو کین را شرح می‌دهیم. سپس مهم‌ترین قضایای پایداری تصادفی بیان شده و در ادامه با استفاده از این قضایای پایداری تصادفی، یک کنترل پایدار ساز سراسری برای مسیر کوانتومی بلاو کین بدست می‌آید که برای هر حالت اولیه در سراسر فضای حالت، سیستم کوانتومی را تنها به یک نقطه تعادل مطلوب پایدار سازد. در نهایت عملکرد طراحی برای یک سیستم ساده کوانتومی

<sup>2</sup> Quantum bit (Qubit)

<sup>3</sup> فضای هیلبرت محدود دارای تعداد پایه‌های متناهی است.

<sup>4</sup> Anti-Linear

<sup>5</sup> Ket

<sup>6</sup> Conjugate transpose ( $\dagger$ )

<sup>7</sup> Bra

<sup>8</sup> Density matrix

<sup>9</sup> کران بالای این رابطه با استفاده از نامساوی رد ماتریسی زیر بدست می‌آید:

$\text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$

<sup>10</sup> Pure State

<sup>11</sup> Hermitian (Self-adjoint)

<sup>12</sup> Observable

<sup>1</sup> Hermitian (self-adjoint)

ماتریس پراکنندگی<sup>9</sup> نامیده می‌شود. درایه  $(i, j)$  این ماتریس، بیانگر پراکنندگی بین دو کانال  $i$  و  $j$  می‌باشد.  $I$  ماتریس همانی است. این معادله برای نمو مشاهده‌پذیرهای کوانتومی و نیز حالت کوانتومی بسیار مهم است. اگر  $X = X_0$  یک مشاهده‌پذیر کوانتومی بوده و نیز  $\rho = \rho_0$  حالت اولیه سیستم کوانتومی باشد، آنگاه نمو زمانی این دو

متغیر بر اساس معادله هادسن-پارسا سراسری عبارت است از:

$$X_t = U_t X U_t^\dagger, \quad \rho_t = U_t^\dagger \rho U_t \quad (3)$$

#### ۴- معادلات تخمین حالت (مسیر) کوانتومی<sup>10</sup>

برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ میلادی، پروفیسور بلاو کین<sup>11</sup> دریافت که تحت شرایطی امکان تخمین حالت یک سیستم کوانتومی تحت اندازه‌گیری وجود دارد [11]. بلاو کین نشان داد در صورتیکه اندازه‌گیری در خروجی یک سیستم کوانتومی به گونه‌ای باشد که مشاهدات در زمان  $t$  بر نمو مشاهده‌پذیر کوانتومی در زمان‌های  $\tau \geq t$  تاثیر نگذارد و یا به عبارتی انحطاط ناپذیر<sup>12</sup> باشد، و نیز مقادیر مشاهده‌پذیر در زمانهای متفاوت جابجاپذیر باشند، و یا خود انحطاط ناپذیر<sup>13</sup> باشد، آنگاه می‌توان تخمین کمترین خطای مربعی از حالت سیستم کوانتومی بدست آورد. در اینجا وارد موضوع تخمین نمی‌شویم چرا که هدف ما در اینجا مساله کنترل سیستم‌هایی است که تخمین زده شده‌اند. در نوشتجات فیزیکی موضوع تخمین سیستم کوانتومی تحت اندازه‌گیری پیوسته، مسیر کوانتومی<sup>14</sup> نامیده می‌شود. معادله مسیر کوانتومی عبارت است از:

$$d\rho_t = (i[\rho_t, H] + L\rho_t L^\dagger - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, \rho_t\}) dt + (L\rho_t + \rho_t L^\dagger - \text{tr}([L^\dagger + L]\rho_t)\rho_t) dW_t \quad (4)$$

در این معادله، عملگرهای جابجاگر<sup>15</sup>  $[, ]$  و ناجابجاگر<sup>16</sup>  $\{, \}$  بصورت  $[A, B] = AB - BA$ ,  $\{A, B\} = AB + BA$  تعریف می‌شوند. همچنین  $W_t$ ، یک فرآیند وینر با میانگین صفر و واریانس یک است که بر اساس اندازه‌گیری خروجی  $Y_t$  بصورت  $dW_t = dY_t - \text{tr}([L^\dagger + L]\rho_t) dt$  بیان می‌شود.

مشاهده‌پذیر در زمان اولیه (صفر) با  $X = X_0$  و در زمان‌های دیگر با  $X_t$  نشان داده می‌شود. باید خاطر نشان کرد که مشاهده‌پذیر، ممکن است بصورت ماتریسی باشد. مقدار میانگین آماری (امید ریاضی) یک مشاهده‌پذیر با نماد  $\langle X \rangle$  نشان داده شده و با استفاده از بردار حالت و یا ماتریس چگالی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle X \rangle = \langle \Psi, X \Psi \rangle = \text{tr}(\rho X) \quad (1)$$

#### ۳- معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی

معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی، بیانگر نمو سیستم کوانتومی در مواجهه با نویز کوانتومی می‌باشد. نویز کوانتومی، فرآیندهای وابسته به فوتون (ذرات نور) می‌باشند. نویزهای اساسی کوانتومی سه دسته می‌باشند که مختصراً در زیر توضیح داده شده است:

- فرآیند نابودی<sup>1</sup> که با  $A_t$  نشان داده می‌شود.
- فرآیند خلق<sup>2</sup> که با  $A_t^\dagger$  نشان داده می‌شود و ترانهاده مزدوج نویز نابودی است.
- فرآیند عدد<sup>3</sup> که با  $\Lambda_t$  نشان داده می‌شود.

دو نویز اول مختلط بوده و قابل اندازه‌گیری مستقیم نمی‌باشند و از نظر فیزیکی برای اندازه‌گیری آنها، دو عملگر قابل اندازه‌گیری بصورت  $P_t = -i(A_t - A_t^\dagger)$ ,  $Q_t = A_t + A_t^\dagger$  تعریف می‌شود. این دو نویز جدید که به ترتیب عملگرهای بزرگی<sup>4</sup> و فاز<sup>5</sup> نام دارند، بوسیله آشکارساز هموداین قابل اندازه‌گیری می‌باشند. نویز سوم مقدار حقیقی بوده و با شمارشگر فوتونی<sup>6</sup> اندازه‌گیری می‌شود. بر اساس این سه نویز، در سال ۱۹۸۴ هادسن و پارسا سراسری محاسبات تصادفی کوانتومی<sup>7</sup> را پایه‌گذاری نموده و معادلات دیفرانسیل کوانتومی تصادفی بدست آوردند که کاربردهای فراوانی در فیزیک کوانتومی دارد. این معادلات برای یک عملگر ماتریس یکانی،  $U_t^\dagger U_t = U_t U_t^\dagger = I$  بصورت زیر قابل بیان می‌باشد و به معادله دیفرانسیل تصادفی هادسن-پارسا سراسری شهرت دارد [10]:

$$dU_t = U_t L dA_t^\dagger - (U_t S L^\dagger) dA_t + U_t (S - I) d\Lambda_t + U_t (-iH - \frac{1}{2} L^\dagger L) dt, \quad U_0 = I, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2)$$

در این معادله،  $H$  هامیلتونین<sup>8</sup> (عملگر انرژی) و هرمیشین است که حامل سیگنال کنترلی است.  $L$  عملگر اندازه‌گیری است که میدان کوانتومی توسط آن با سیستم کوانتومی برهم کنش می‌کند.  $S$  نیز

<sup>9</sup> Scattering matrix  
<sup>10</sup> Rössler

<sup>11</sup> یک ریاضی-فیزیکدان روسی تبار واقع در دانشگاه ناتینگهام انگلستان و از دوستان استراتونویچ (پایه‌گذار تخمین غیرخطی و محاسبات تصادفی روی هندسه خمینه) می‌باشند.

<sup>12</sup> Nondemolish:  $[X_{\tau \geq t}, Y_t] = 0$

<sup>13</sup> Self-nondemolish:  $[X_{\tau}, X_t] = 0 : \tau \neq t$

<sup>14</sup> Quantum trajectory

<sup>15</sup> Commutator

<sup>16</sup> Anti-Commutator

<sup>1</sup> Annihilation process

<sup>2</sup> Creation process

<sup>3</sup> Number process

<sup>4</sup> Amplitude operator

<sup>5</sup> Phase operator

<sup>6</sup> Photocounter

<sup>7</sup> Quantum stochastic calculus

<sup>8</sup> Hamiltonian

$$dX_t = f(u_t, X_t) dt + g(X_t) dW_t \quad (5)$$

که در این معادله توابع ماتریسی  $f, g$  بصورت کلی غیرخطی در نظر گرفته شده‌اند.  $W_t$  یک فرآیند وینر با میانگین صفر و واریانس یک است که در فضای احتمال درای تابع اندازه  $\mathbb{P}$  قرار دارد. فرض کنید که  $X_e$  نقطه تعادل این سیستم باشد، یعنی  $f(u_t, X_e) = g(X_e) = 0$ . آنگاه تعاریف زیر، برای پایداری تصادفی این نقطه تعادل بیان می‌شوند:

۱- نقطه  $X_e$  را پایدار در احتمال<sup>۳</sup> گویند، اگر برای یک همسایگی از شرایط اولیه  $X$  به این نقطه، داشته باشیم:

$$\lim_{X_0 \rightarrow X_e} \mathbb{P} \left( \sup_{t \geq 0} \|X_t - X_e\| > \varepsilon \right) = 0 : \forall \varepsilon > 0$$

۲- پایدار سراسری<sup>۴</sup> است اگر پایدار در احتمال بوده و داشته

$$\mathbb{P} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \|X_t - X_e\| = 0 \right) = 1$$

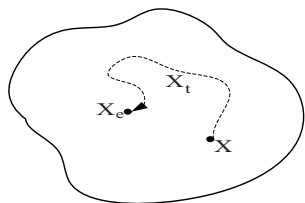
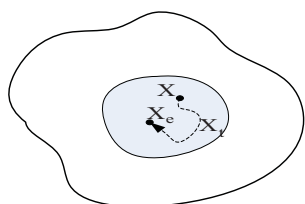
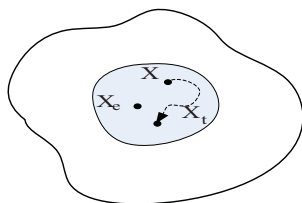
باشیم. به عبارتی  $X_t$  به ازای کلیه شرایط اولیه در فضای حالت به نقطه تعادل همگرا شود.

۳- اگر  $X_e$  پایدار در احتمال بوده و برای یک همسایگی

نزدیک از شرایط اولیه  $X$  به این نقطه تعادل،  $X_t$  با

احتمال غیرصفر به این نقطه همگرا شود، گویند که پایدار

مجانبی<sup>۵</sup> در احتمال می‌باشد.

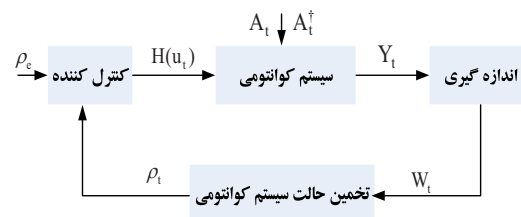


شکل ۲- پایداری در احتمال (بالا)، پایداری مجانبی در احتمال (وسط) و پایداری سراسری در احتمال (پائین)

با استفاده از تعاریف فوق، قضایای پایداری تصادفی زیر توسعه

یافته است [20-22]:

با توجه به اینکه معادله بلاوکین، یک معادله دیفرانسیل تصادفی با نویز کلاسیک است، محاسبات تصادفی ایتو<sup>۱</sup> بر آن حاکم است و در نتیجه می‌توان از روش‌های کنترل تصادفی که برای سیستم‌های تصادفی کلاسیک توسعه داده شده است، بهره‌مند شد. روش‌های کنترل تصادفی بسیار متنوع می‌باشند که از جمله مشهورترین آنها روش کنترل بهینه تصادفی و کنترل پایدار ساز می‌باشد. آنچه ما در اینجا به آن می‌پردازیم، پایدار سازی تصادفی معادلات تخمین بلاوکین است. در بخش بعد نظریات پایداری تصادفی بیان می‌شود. در شکل ۱، بلوک دیاگرام کنترل مسیر کوانتومی نشان داده شده است. در ابتدا سیستم کوانتومی تصادفی بواسطه عملگر اندازه‌گیری  $L$  با نویز کوانتومی برهم کنش می‌کند، سپس با استفاده از یک ابزار اندازه‌گیری فیزیکی بنام آشکارساز هوموداین<sup>۲</sup>، موج پراکنده شده از سطح سیستم اندازه‌گیری می‌شود. سپس با استفاده از اندازه‌گیری بدست آمده از خروجی و نیز با استفاده از معادلات مسیر کوانتومی، حالت سیستم در هر زمان تخمین زده می‌شود و با استفاده از این تخمین حالت، سیگنال کنترلی (امواج الکترومغناطیسی) طراحی شده، بصورت پسخور غیرخطی حالت به سیستم اعمال می‌شود.



شکل ۱- دیاگرام بلوکی کلی کنترل مسیر کوانتومی

## - پایداری تصادفی

پایدار سازی یک سیستم دینامیکی، از مهمترین خواسته‌ها در یک سیستم کنترل است. روش لیاپانوف که یکی از بنیادی‌ترین نظریه‌های پایداری است، با گذشت زمان زیاد، هنوز به عنوان یک ابزار قدرتمند برای تحلیل پایداری سیستم‌ها بکار می‌رود. بسیاری از نظریات پایداری لیاپانوف در کتاب‌های کنترل غیرخطی موجود می‌باشد و بسیار مشهور است. بعلاوه، روش پایداری لیاپانوف برای سیستم‌های تصادفی مارکوف و نیز به شکل معادلات دیفرانسیل تصادفی، توسط کوشنر [20] و هاسمینسکی [21] و مانو [22] توسعه داده شده است. در ذیل بطور مختصر به مهمترین تعاریف و قضایای پایداری تصادفی اشاره می‌شود. برای این منظور، معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل ایتو را در نظر بگیرید:

<sup>۱</sup> ایتو (Itô): دانشمند ژاپنی که بنیانگذار محاسبات و انتگرال تصادفی است. ایتو را نیوتن دوم می‌نامند.

<sup>۲</sup> Homodyne Detector

<sup>۳</sup> Stable in probability

<sup>۴</sup> Globally stable

<sup>۵</sup> Asymptotically stable

سیستم داشته باشیم  $[H_{free}, \rho_e] = [0]$ . آنگاه مقادیر مثبت  $\alpha, \beta > 0$  بطوریکه، یک کنترل کننده پایدار ساز سراسری مسیر کوانتومی عبارت است از:

$$u_t = (\alpha^2 + 2\beta^2 \langle \rho_e \rangle) \langle -i[H_{control}, \rho_e] \rangle + 2\beta \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right) \quad (6)$$

**اثبات.** تابع لیپانوف را بصورت  $V(\rho_t) = \alpha^2 (1 - \langle \rho_e \rangle) + \beta^2 (1 - \langle \rho_e \rangle)^2$  در نظر بگیرید. با توجه به اینکه  $\rho_e$  یک حالت تعادل ویژه است آنگاه  $\text{tr}(\rho_e^2) = \text{tr}(\rho_e) = 1$  در نتیجه  $V(\rho_e) = 0$  از طرفی با استفاده از نامساوی رد ماتریسی ( $\text{tr}(\rho_t \rho_e) \leq 1$ )، در نتیجه  $V(\rho_t \neq \rho_e) > 0$ . با استفاده از قانون ضرب ایتو و با استفاده از مسیر کوانتومی، تغییرات تابع لیپانوف برابر است با:

$$dV(\rho_t) = -\alpha^2 d\langle \rho_e \rangle - 2\beta^2 \langle \rho_e \rangle d\langle \rho_e \rangle - \beta^2 (d\langle \rho_e \rangle)^2 = -(\alpha^2 + 2\beta^2 \langle \rho_e \rangle) \langle i[H, \rho_e] \rangle dt + 2\langle \rho_e \rangle \left( \alpha^2 + 2\beta^2 \langle \rho_e \rangle \right) \left( \langle L^\dagger \rho_e L - \frac{1}{2} \{L^\dagger L, \rho_e\} \rangle \right) dt - \beta^2 \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right)^2 dt - (\alpha^2 + 2\beta^2 \langle \rho_e \rangle) \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right) dW_t \quad (7)$$

و در نتیجه تغییرات کوچک آن که ضریب زمانی  $dV(\rho_t)$  می باشد، پس از اعمال شرط  $[H_{free}, \rho_e] = [0]$  عبارت است از:

$$\mathcal{R}(V) = - \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right)^2 - 2 \langle \rho_e \rangle \left( \langle L^\dagger \rho_e L - \frac{1}{2} \{L^\dagger L, \rho_e\} \rangle + 2 \langle \rho_e \rangle \langle i[u_t, H_{control}, \rho_e] \rangle \right) \quad (8)$$

با استفاده از پایه های ماتریسی گلنن، [23] می توان پایه های ماتریس چگالی را طوری انتخاب نمود که ماتریس  $\rho_e$  یک حالت ویژه عملگر اندازه گیری  $L$  باشد، به عبارتی  $L\rho_e = c\rho_e$ . در نتیجه جمله دوم در معادله تغییرات کوچک (۸) صفر شده و داریم:

$$\mathcal{R}(V) = 2 \langle \rho_e \rangle \langle i[u_t, H_{control}, \rho_e] \rangle - \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right)^2 \quad (9)$$

با انتخاب سیگنال کنترلی بصورت زیر:

$$u(\rho_t) = (\alpha^2 + 2\beta^2 \langle \rho_e \rangle) \langle i[H_{control}, \rho_e] \rangle + 2\beta \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right) \quad (10)$$

آنگاه مقادیر مثبت  $\alpha, \beta > 0$  وجود دارد که تغییرات کوچک زیر بدست می آید:

$$\mathcal{R}(V(\rho_t)) = - \{ (\alpha^2 + 2\beta^2 \langle \rho_e \rangle) \langle i[H_{control}, \rho_e] \rangle - \beta \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right) \}^2 < 0 \quad (11)$$

**قضیه ۱:** مجموعه  $B_r = \{X : \|X - X_e\| < r; r > 0\}$  را در نظر بگیرید. تابع دو بار مشتق پذیر  $V: B_r \rightarrow \mathbb{R}_+$  بصورت  $V(X_e) = 0; V(B_r \neq X_e) > 0$  و با تغییرات کوچک<sup>۱</sup>  $\mathcal{R}(V) = (\partial_t V + f \partial_x V + \frac{1}{2} \text{tr}(gg^T \partial_x^2 V))$  را در نظر بگیرید. اگر برای  $X \in B_r$  داشته باشیم:  $\mathcal{R}(V) \leq 0$ ، آنگاه نقطه تعادل  $X_e$  را پایدار در احتمال و اگر برای  $X \in \{B_r \neq X_e\}$  شرط  $\mathcal{R}(V) < 0$  برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل فوق، پایدار مجانبی در احتمال است.

**قضیه ۲:** تابع اسکالر دو بار مشتق پذیر  $V(X_t)$  را در نظر بگیرید بطوریکه  $V(X_e) = 0; V(X_t \neq X_e) > 0$ . اگر نقطه تعادل پایدار در احتمال باشد و دو شرط: (۱)  $\mathcal{R}(V) < 0$  برای مقادیر  $X_t \neq X_e$  و نیز (۲)  $-\infty < |\mathcal{R}(V)| < \infty$  برای  $V(X) \rightarrow \infty$  برقرار شوند، آنگاه نقطه تعادل  $X_e$  پایدار تصادفی سراسری می باشد.

## ۶- پایدار سازی مسیر کوانتومی

در این بخش می خواهیم با استفاده از نظریه پایداری تصادفی، برای مسیر کوانتومی معادله ۴، کنترل کننده پایدار ساز سراسری با پسخور غیرخطی حالت<sup>۲</sup> بصورت  $u_t = F(\rho_t)$  را طراحی نمایم، بطوریکه به ازای شرایط اولیه متفاوت از ماتریس چگالی حالت سیستم، با گذشت زمان بتوان به یکی از حالت های تعادل (ویژه)<sup>۳</sup> سیستم  $\rho_e$  همگرا شد. برای این منظور باید تابع لیپانوف تصادفی  $V(\rho_t)$  به گونه ای انتخاب شود که شرایط قضیه ۲ برقرار شود. دقت کنید که هامیلتونین کل سیستم برابر با جمع هامیلتونین آزاد یا داخلی سیستم و هامیلتونین کنترلی است، و یا به عبارتی:  $H = H_{free} + u_t H_{control}$ .

در مرجع [16] اثبات شده است که معادلات مسیر کوانتومی بلاو کین دارای چندین حالت تعادل پایدار است که با سیگنال کنترلی صفر (عدم حضور سیگنال کنترلی)، سیستم با توجه به اینکه دارای شرایط اولیه نزدیک به ناحیه جذب هر یک از نقاط تعادل، به آن نقطه تعادل همگرا می شود. اما آنچه در محاسبات کوانتومی و دیگر کاربردهای کنترل کوانتومی مطلوب می باشد، این است که برای تمامی نقاط فضای حالت، کنترل کننده پایدار ساز سراسری ای طراحی شود که بتواند حالت سیستم را به نقطه تعادل دلخواه سوق دهد. برای دست یابی به این هدف، قضیه زیر بیان و اثبات می شود:

**قضیه ۳-** مسیر کوانتومی بلاو کین را در نظر بگیرید. فرض کنید ثابت مختلط  $c$  وجود دارد بطوریکه برای حالت تعادل  $\rho_e$  رابطه  $L\rho_e = c\rho_e$  برقرار باشد. همچنین برای ماتریس هامیلتونین آزاد

<sup>۱</sup> تغییرات کوچک (infinitesimal) برابر با ضریب  $dt$  در  $dV(X_t)$  است.

<sup>۲</sup> Nonlinear state feedback

<sup>۳</sup> پایه های ماتریس چگالی همان ماتریس های گلنن (Gell-Mann) می باشند.



واضح است که در رابطه بالا اگر داشته باشیم  $\rho_t = \rho_e$ ، با توجه به اینکه  $\text{tr}(\rho_e) = 1$ ،  $\rho_e^2 = \rho_e$ ، آنگاه  $u(\rho_e) = 0$ . اما چون  $\rho_t \neq \rho_e$  آنگاه  $u(\rho_t) \neq 0$ . در نتیجه سیگنال کنترلی غیرصفر سبب حرکت سیستم از نقطه تعادل فرضی  $\rho_t$  می‌شود. همچنین  $V(\rho_t \neq \rho_e) > 0$ ، در نتیجه نقطه فرضی  $\rho_t$ ، حتی اولین شرط مورد نیاز در قضیه ۱ برقرار نیست و در نتیجه این نقطه نمی‌تواند پایدار در احتمال باشد. از طرفی با توجه به اینکه ماتریس چگالی کراندار است، سیگنال کنترلی نمی‌تواند سیستم را بی‌کران نماید و شرط نهایی پایداری سراسری در قضیه ۲ برقرار شده و اثبات تکمیل می‌شود.

### ۷- شبیه‌سازی: تک بیت کوانتومی (کوبیت)

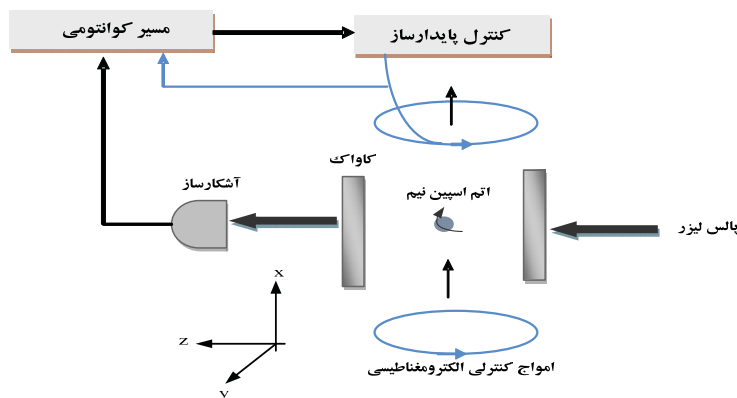
برای شبیه‌سازی کنترل پایدارساز طراحی شده در بخش قبل، پایه‌ای-ترین عنصر محاسبات کوانتومی یعنی کوبیت را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم. در شکل ۳، ساختار آزمایشگاهی مورد نیاز برای کنترل یک کوبیت نشان داده شده است. در ابتدا، پالس لیزر (نویز کوانتومی  $A_t, A_t^\dagger$ ) با ممان دوقطبی مغناطیسی اتم (عملگر اندازه-گیری  $L$ ) در جهت مختصاتی  $Z$  برهم‌کنش می‌کند. امواج پراکنده شده حاصل از برهم‌کنش، در خروجی کاواک بوسیله آشکارساز هموداین اندازه‌گیری می‌شود. خروجی آشکارساز بصورت جریان الکتریکی ( $Y_t$ ) است. سپس با استفاده از خروجی اندازه‌گیری شده و نیز با کمک معادلات مسیر کوانتومی بلاو کین، حالت سیستم کوانتومی ( $\rho_t$ ) تخمین زده می‌شود. در نهایت با استفاده از تخمین حالت و قانون کنترلی طراحی شده  $u_t$ ، سیگنال کنترلی که امواج الکترومغناطیسی  $H(u_t)$  در جهت مختصاتی  $X$  می‌باشد، به کوبیت اعمال می‌شود.

که باید نشان دهیم این عبارت همواره منفی بوده و تنها در حالت ویژه  $\rho_e$  صفر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که با استفاده از این کنترل-کننده، نقطه تعادل  $\rho_e$ ، یک نقطه تعادل ایستا است، یعنی ضریب نویز در معادله ۷ صفر می‌شود و در نتیجه نویز نمی‌تواند سیستم را از نقطه تعادل  $\rho_e$  حرکت دهد. با استفاده از  $L\rho_e = c_e\rho_e$  و نیز  $\rho_e L^\dagger = c_e^\dagger\rho_e$ ، بسادگی بدست می‌آید:

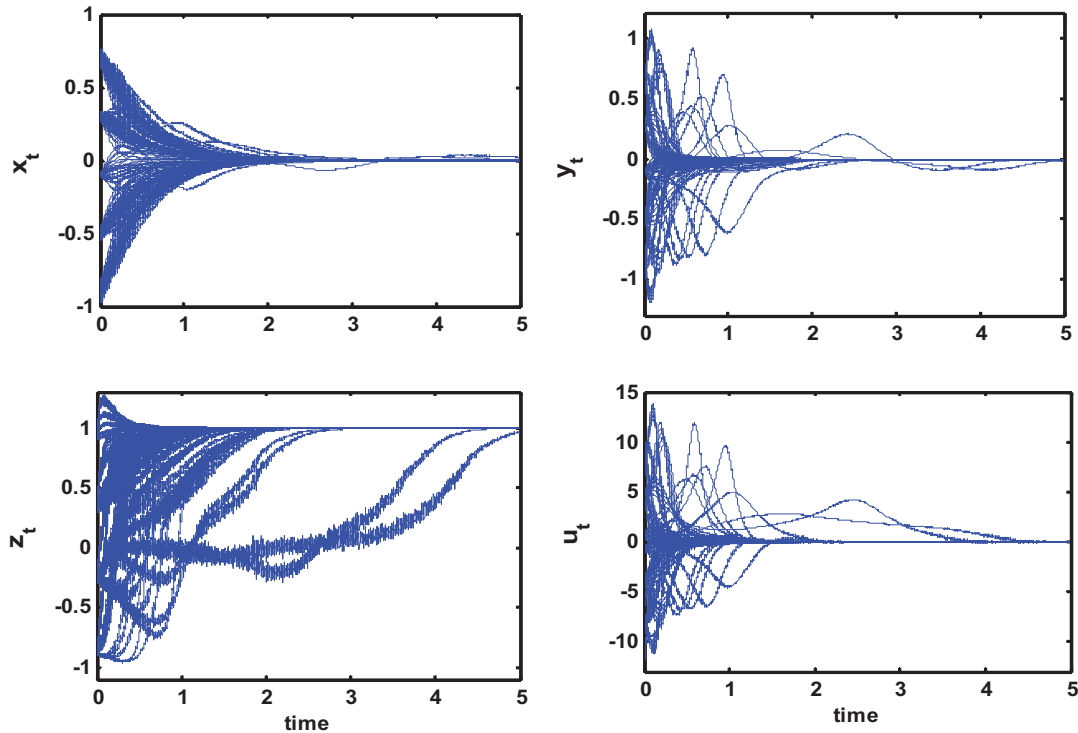
$$\begin{aligned} & \left( \langle L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right) \Big|_{\rho_t = \rho_e} = \\ & \text{tr}(\rho_e L^\dagger \rho_e + \rho_e L \rho_e) - \text{tr}(\rho_e L^\dagger + L \rho_e) \text{tr}(\rho_e^2) = \\ & \text{tr}(c_e^\dagger \rho_e^2 + c_e \rho_e^2) - \text{tr}(c_e^\dagger \rho_e + c_e \rho_e) \text{tr}(\rho_e^2) = \\ & (c_e^\dagger + c_e) \text{tr}(\rho_e^2) (1 - \text{tr}(\rho_e)) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

از طرفی چون  $\mathcal{R}(V(\rho_e)) = 0$ ، در نتیجه  $dV(\rho_e) = 0$  و همچنین  $u(\rho_e) = 0$ . پس این نقطه تعادل برای تابع لیانوف انتخاب-شده کنترل‌کننده فوق ایستا است. از طرفی فرض کنید در زمان  $t$  که  $\rho_t \neq \rho_e$  الگوریتم کنترلی متوقف شود و سیستم نتواند به سمت نقطه تعادل حرکت کند یعنی  $\mathcal{R}(V(\rho_t)) = 0$ . با استفاده از این فرض صفرشدن، عبارت  $\langle i[\rho_e, H_{\text{control}}] \rangle$  برابر با  $\beta \left( \langle \rho_e L + L^\dagger \rho_e \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right)$  با جایگذاری این عبارت در معادله سیگنال کنترلی، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} (\rho_t) = & -\beta \left( \langle \rho_e L + L^\dagger \rho_e \rangle - \langle L^\dagger + L \rangle \langle \rho_e \rangle \right) = \\ & \beta \left( \text{tr}([L + L^\dagger] \rho_e \rho_t) - \text{tr}([L + L^\dagger] \rho_t) \text{tr}(\rho_e \rho_t) \right) \end{aligned} \quad (13)$$



شکل ۳- شماتیک سیستم کنترل پایدارساز سراسری اتم اسپین نیم (کوبیت): عملگر سیستم کوانتومی در جهت  $Z$  با پالس لیزر تحریک شده و موج پراکنده شده در سمت دیگر کاواک بوسیله هموداین اندازه‌گیری می‌شود. با استفاده از سیگنال اندازه‌گیری شده، حالت سیستم تخمین زده می‌شود و در نهایت قانون کنترلی (موج الکترومغناطیسی) در جهت  $X$  به اتم اعمال می‌شود.



شکل ۴- شبیه‌سازی کنترل پایدار ساز سراسری یک کویت

برای شبیه‌سازی این سیستم نیاز است تا هامیلتونین‌ها، عملگرهای اندازه‌گیری و ماتریس چگالی تعریف شوند. ماتریس چگالی بطور کلی برحسب ماتریس‌های گلنن قابل بیان است [23] که برای حالتی که ماتریس چگالی  $2 \times 2$  می‌باشد، ماتریس‌های گلنن برابر با ماتریس‌های معروف پاولی<sup>۱</sup> می‌باشد که عبارتند از:

برای شبیه‌سازی این سیستم نیاز است تا هامیلتونین‌ها، عملگرهای اندازه‌گیری و ماتریس چگالی تعریف شوند. ماتریس چگالی بطور کلی برحسب ماتریس‌های گلنن قابل بیان است [23] که برای حالتی که ماتریس چگالی  $2 \times 2$  می‌باشد، ماتریس‌های گلنن برابر با ماتریس‌های معروف پاولی<sup>۱</sup> می‌باشد که عبارتند از:

$$[H_{\text{free}}, \rho_{e_1}] = [H_{\text{free}}, \rho_{e_2}] = [0]$$

$$[H_{\text{control}}, \rho_{e_1}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, [H_{\text{control}}, \rho_{e_2}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

همچنین سیگنال کنترل با استفاده از قضیه ۳ عبارت است از:

$$u_t = (\alpha^2 + \beta^2(1+z))y + 2\beta(1-z^2)$$

کوچک زیر حاصل می‌شود:

با استفاده از این ماتریس‌های پایه، ماتریس چگالی بصورت

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

بیان می‌شود. نقاط تعادل یک کویت به ازای مقادیر  $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$  می‌باشد که متناظر با ماتریس‌های چگالی زیر است:

$$\mathcal{R}(V(\rho_t)) = -\left\{(\alpha^2 + \beta^2(1+z))y - \beta(1-z^2)\right\}^2$$

و با توجه به اینکه در نقطه تعادل  $\rho_{e_2}$  داریم:

$$\rho_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$V(\rho_t = \rho_{e_2}) = \alpha^2(1 - \text{tr}(\rho_{e_1}\rho_{e_2})) + \beta^2(1 - \text{tr}^2(\rho_{e_1}\rho_{e_2})) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad (17)$$

شرط پایداری در احتمال برای این نقطه تعادل برقرار نیست. پس از کمی محاسبات، معادلات تک کویت برحسب ضرایب مختصات  $(x, y, z)$  بصورت زیر حاصل می‌شود:

می‌خواهیم سیستم را به سمت  $\rho_{e_1}$  پایدار کنیم که متناظر با این مفهوم فیزیکی است که اتم دارای اسپین در جهت مثبت مختصات  $z$  باشد. در اینحالت تابع لیپانوف تصادفی عبارت است از:

<sup>1</sup> Pauli matrices



روشهای دیگر کنترلی مانند کنترل مقاوم و نیز کنترل بهینه تصادفی را می‌توان برای مسیر کوانتومی و نیز معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی توسعه داد. روش کنترل بهینه برای هر دو دسته از معادلات کوانتومی به عنوان تحقیقات آینده ما در حال توسعه می‌باشد

## مراجع

- [1] Krausz, F., Ivanov, M., 2009, "Attosecond physics", *Review of Modern Physics*, 81, 163-234.
- [2] Lvovsky, A. I., Raymer, M. G., 2009, "Continuous-variable optical quantum-state tomography", *Review of Modern Physics*, 81, 299-332.
- [3] Král, P., Thanopoulos, I., Shapiro, M., 2007, "Colloquium: Coherently controlled adiabatic passage", *Review of Modern Physics*, 79, 53-77.
- [4] Hohenester, U., Rekdal, P. K., Borzi, A., Schmiedmayer, J., 2007, "Optimal quantum control of Bose-Einstein condensates in magnetic microtraps", *Physical Review A*, 75, doi: 023602.
- [5] Choi, S., Bigelow, N. P., 2005, "Initial steps towards quantum control of atomic Bose-Einstein condensates", *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 7, 413-420.
- [6] Ketterle, E.W., 2001, "When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser", *Nobel Lecture*, 118-154.
- [7] Dunning, F. B., Mestayer, J. J., Reinhold, C. O., Yoshida, S., Burgdörfer, J., 2009, "Engineering atomic Rydberg states with pulsed electric fields", *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 42, doi: 2/022001.
- [8] Fert, A., 2008, "Nobel Lecture: Origin, development, and future of spintronics", *Review of Modern Physics*, 80, 1517-1530.
- [9] Werschnik, J., Gross, E. K. U., 2007, "Quantum optimal control theory", *Journal of Physics B*, 40 pp. 175-211.
- [10] Hudson, R. L., Parthasarathy, K. R., 1984, "Quantum Itô's formula and stochastic evolutions", *Communications in Mathematical Physics*, 93, 301-323.
- [11] Belavkin, V. P., 1992, "Quantum Continual Measurements and a Posteriori Collapse on CCR", *Communications in Mathematical Physics*, 146, 611-635.
- [12] Bouten, L., *Filtering and Control in Quantum Optics*, PhD Thesis. University of Nijmegen, 2004.
- [13] Ticozzi, F., Viola, L., 2008, "Quantum Markovian Subsystems: Invariance, Attractivity and Control", *IEEE Trans. Automatic Control*, 3, 9, 2048-2063.
- [14] Van Handel, R., Stockton, J. K., Mabuchi, H., 2005, "Modeling and feedback control design for quantum

$$\begin{cases} dx_t = -2(x_t + y_t)dt - 2x_t z_t dW_t \\ dy_t = 2(x_t - u_t z_t - y_t)dt - 2y_t z_t dW_t \\ dz_t = 2y_t u_t dt + (1 - z_t^2)dW_t \end{cases} \quad (18)$$

با استفاده از این معادلات و سیگنال کنترلی طراحی شده در صفحه قبل، برای مقادیر  $\alpha = 3, \beta = 1$ ، نتایج شبیه‌سازی یک کوبیت به ازای شرایط اولیه مختلف در شکل ۴ مشاهده می‌شود. این نتایج نشان می‌دهد که اسپین اتم، به ازای کلیه شرایط اولیه در فضای حالت سیستم، به سمت مثبت دستگاه مختصات  $z$  دوران نموده و بطور سراسری پایدار شده است.

## ۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، بطور مختصر درباره نظریه سیستم‌های کوانتومی باز که در تقابل با نویز فوتونی می‌باشند، بحث شد. از مهمترین دستاوردها در فیزیک کوانتومی، نظریه تخمین حالت سیستم با استفاده از اصل اندازه-گیری انحطاط‌ناپذیر است که بسیاری از دانشمندان و محققین ریاضی و فیزیک توانسته‌اند بر اساس این اصل، معادلات تخمین حالت سیستم کوانتومی را بدست آورند. این معادلات دیفرانسیل تصادفی، غیرخطی بوده و به منظور طراحی سیگنال کنترلی برای سیستم کوانتومی باز بسیار حائز اهمیت می‌باشند. همانطور که پیشتر در متن اشاره شد، روشهای کنترلی بسیاری برای این دسته معادلات ارائه شده است. ما توانستیم با استفاده از نظریه پایداری تصادفی، برای مسیر کوانتومی یک کنترل-کننده پایدارساز سراسری بدست آوریم. این کنترل‌کننده برای یک سیستم کوانتومی ساده (کوبیت) پرکاربرد در محاسبات کوانتومی و ساخت رایانه‌های کوانتومی، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. دینامیک کنترل‌شده کوبیت شبیه‌سازی شد و نتایج مطلوب (پایداری سراسری) حاصل شد.

در ادامه این موضوع تحقیقاتی، می‌توان به بحث پایدارسازی سراسری معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی پرداخت. باید دقت نمود که برای این مورد، در ابتدا نیاز است تا قضایای پایداری تصادفی کوانتومی، مشابه با قضایای ۱ و ۲ ذکر شده در این مقاله، توسعه یابد. سپس با استفاده از قضایای پایداری حاصل، می‌توان به طراحی کنترل-کننده، همانند قضیه ۳، پرداخت. در مرجع [24] برخی از قضایای پایداری تصادفی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی بدست آمده است.

- [20] Kushner, H. J., *Stochastic Stability and Control*, New York: Academic Press, 1967.
- [21] Has'minski, R. Z., *Stochastic Stability of Differential Equations*, Amsterdam, the Netherlands: Sijthoff Noordhoff, 1980.
- [22] Mao, X., *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood Publishing Chichester, 1997.
- [23] Bertlmann R. A., Krammer, P., 2008, "Bloch vectors for qudits", *Journal of Physics A*, 41, doi: 235303.
- [24] Sharifi, J., Momeni, H. R., "Quantum Stochastic Stability", [quant-ph/0907.3452v1](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0907.3452v1).
- state preparation", *Journal of Optics B: Quantum Semiclass Optics*, 7, 179-197.
- [15] Van Handel, R., Stockton, J. K., Mabuchi, H., 2005, "Feedback Control of Quantum State Reduction", *IEEE Trans. Automatic Control*, 50, 6, 768-780.
- [16] Mirrahimi, M., Van Handel, R., 2007, "Stabilizing feedback controls for quantum systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46, 445-467.
- [17] Altafini, C., Ticozzi, F., 2005, "Almost global stochastic feedback stabilization of conditional quantum dynamics", [quant-ph/0510222v1](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0510222v1).
- [18] Tsumura, K., 2008, "Global Stabilization at Arbitrary Eigenstates of N-dimensional Quantum Spin Systems via Continuous Feedback", *American Control Conference*, 4148-4153.
- [19] Breuer, H. P., Petruccione, F. *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Clarendon, 2006.

# SID



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



عضویت در خبرنامه



فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



PROPOSAL  
پروپوزال

پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی

دکتره تهرانی

کارگاه آنلاین  
پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی



روش تحقیق و مقاله نویسی علوم انسانی

دکتره تهرانی

کارگاه آنلاین  
روش تحقیق و مقاله نویسی علوم انسانی



ISI  
Scopus

آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو

دکتره تهرانی

کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو