

# ارائه یک راه حل تقریبی جدید برای حل پیچش الاستیک- پلاستیک مقاطع توپر دلخواه با تنش تسلیم متغیر

مجید بنی اسدی<sup>۱</sup>، کارن ابری نیا<sup>۲</sup> و محمد حسن نائی<sup>۳</sup>

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

## چکیده

در این تحقیق، پیچش الاستیک- پلاستیک مقاطع توپر بدون کارسختی با تنش تسلیم متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. در کارهای قبلی انجام گرفته در زمینه پیچش الاستیک- پلاستیک (مقاطع تنش تسلیم ثابت)، از روشهای تحلیلی و یا عددی دقیق استفاده شده، اما در این مقاله با کمک غیر کوپل سازی معادله دیفرانسیل پیچش، حل پیچش الاستیک- پلاستیک مقاطع تنش تسلیم متغیر انجام شده است. فرض تنش تسلیم متغیر برای قطعاتی که عملیات حرارتی و یا ریخته گری شده اند درست می باشد. برای انجام حل عددی مورد نظر نرم افزاری با کمک برنامه نویسی کوپل تدوین شده است. در مورد حل های صورت گرفته برای حالت تنش تسلیم ثابت نتایج با نتایج اجزاء محدود مقایسه گردیده و برتری روش مذکور تایید گردیده است. از طرفی، برای حل های اجزاء محدود از نرم افزار ABAQUS استفاده شده است.

**واژه های کلیدی:** پیچش، الاستیک- پلاستیک، تنش تسلیم متغیر، مقاطع توپر دلخواه

## Introduction of a New Approximate Solution to Elastoplastic Torsion of Arbitrary Solid Sections with Variable Yield Stress

M. Baniassadi, K. Abrinia, and M.H. Naei  
Mech. Eng. Group, School of Eng., Univ. of Tehran

### ABSTRACT

In this work, the elastoplastic torsion of solid sections without work hardening with variable yield stress is examined. In similar previous works with constant yield stress assumption, exact numerical or analytical approaches were utilized. In view of the new assumptions, the coupled elastoplastic differential equations were decoupled. In variable yield stress assumption, a yield stress gradient from surface to core is assumed, which is a valid and reasonable assumption in cast and heat treated parts. Thus, in elastoplastic torsion of prismatic bars with the aforementioned yield stress gradient assumption, the above mentioned method was used. To carry out the computations, a new software with coupled programming approach was used. A few examples were run both on our developed software and on an accredited finite element software (ABAQUS). Comparison of the results affirms the benefit of our approach.

**Key words:** Torsion, Elastoplastic, Variable Yield Stress, Arbitrary Solid Sections

<sup>۱</sup>- کارشناس ارشد (نویسنده پاسخگو): baniasadim@gmail.com

<sup>۲</sup>- استادیار: cabrinia@ut.ac.ir

<sup>۳</sup>- استاد یار: mhnaei@ut.ac.ir

## فهرست علائم

$f(x, y)$	تابع تغییرات تنش تسلیم برشی
$f(s)$	تابع تغییرات فاصله ای تنش تسلیم برشی
G	مدول پیچشی
p	فشار
s	ثابت نیروی کششی
$S_Y$	تنش تسلیم برشی
$\theta$	زاویه پیچش
$\sigma_1$	تنش اصلی
$\sigma_2$	تنش اصلی
$\tau$	تنش برشی اصلی
$T_p$	گشتاور پیچشی
$\Psi_e$	تابع پیچش حل پلاستیک
$\Psi_p$	تابع پیچش حل الاستیک
$\Psi_{ep}$	تابع پیچش حل الاستیک-پلاستیک

پرلین<sup>۵</sup> راه حلی برای پیچش الاستیک-پلاستیک مقاطعی که هسته الاستیک محصور در ناحیه پلاستیک دارند ارائه داد [۶].

از جمله کارهای دیگر صورت گرفته در زمینه پیچش الاستیک-پلاستیک مقاطع توخالی می توان به کارهای هاج و هراکوویچ اشاره کرد [۷].

آنین<sup>۶</sup> با متد خط مستقیم راه حلی تقریبی برای پیشرفت ناحیه پلاستیک در مقاطع مستطیلی ارائه دادند [۸]. این متد برای پیشرفت های اولیه ناحیه پلاستیک استفاده می شود.

در زمینه پیچش الاستیک-پلاستیک مقاطع با در نظر گرفتن کار سختی نیز کارهای گوناگونی انجام شده است. مندلسون<sup>۷</sup> یک روش عددی برای تحلیل پیچش الاستیک-پلاستیک تیرکهای منشوری با کرنش سختی ارائه داده است [۹].

از جمله کارهای عددی صورت گرفته می توان به حل عددی اختلاف محدود معادلات دیفرانسیل پیچش الاستیک پلاستیک اشاره کرد [۱۰]، که البته برای ماده الاستیک کاملاً پلاستیک انجام شده است. برای پیچش ناچیز مقاطع نیز کارهای گوناگونی انجام شده است که از آن جمله می توان [۱۱] را نام برد، در این مقاله با کمک توابع بیضوی، تحلیل تغییر شکل کم پیچشی برای پیچش الاستیک پلاستیک مقاطع مورد بررسی قرار گرفته است.

از دیگر کارهای انجام شده می توان به مرجع [۱۲] اشاره کرد، که در آن حل اجزای محدود پیچش مقاطع منشوری با گشتاور موضعی، مورد بررسی قرار گرفته است. در زمینه بحث ریاضی پیچش الاستیک پلاستیک هم کارهای بسیار گوناگونی انجام شده که از آن جمله می توان به تصدیق وجود جواب و یکتایی جواب برای پیچش الاستیک پلاستیک مقاطع اشاره کرد [۱۳].

در زمینه پیچش مقاطع مسی تحت فشار در مرجع [۱۴] تحقیقات دیگری انجام شده است همچنین در زمینه ی پیچش مقاطعی که تغییر فرم الاستیک خالص ندارند نیز کارهای دیگری انجام شده است مثلاً در مرجع [۱۵] پیچش الاستیک پلاستیک مقطعی که خاصیت الاستیک و پلاستیک را با هم دارا می باشد (مثل آلومینیوم) مورد بررسی قرار گرفته است. بارگذاری مرکب پیچشی، کششی برای میله آلیاژی در

## ۱- مقدمه

در زمینه پیچش مقاطع، کارهای گوناگونی انجام شده است، که اکثر کارهای انجام شده قبل از سال ۱۹۹۰ صورت گرفته است، کارهای جدید در این زمینه محدودتر می باشند.

از جمله کارهای انجام شده حل نیمه معکوس پیچش مقاطع توپر اوال می باشد [۱]. البته قابل ذکر است که این حل یکی از متدهای ارائه شده برای حل نیمه معکوس مقاطع می باشد که البته برای ماده الاستیک کاملاً پلاستیک صادق می باشد. کاجانو<sup>۱</sup> هم با روش تغییرات متدی برای حل الاستیک پلاستیک مقطع مربعی ارائه داد [۲]. ساوتول<sup>۲</sup> از متد دیگری<sup>۳</sup> برای تحلیل پیچش الاستیک پلاستیک مقاطع L، مربع و مثلث استفاده کردند [۳]، افراد دیگری نیز با همین متد به تحلیل مقاطع دیگر پرداختند [۴].

بنچاک<sup>۴</sup> و همکارانش با استفاده از متغیرهای محلی، حل الاستیک-پلاستیک برای مقاطع مربعی و چند ضلعی ارائه دادند [۵].

<sup>5</sup>- Perlin, 1961

<sup>6</sup>- Annin, 1981

<sup>7</sup>- Mendelson, 1968

<sup>1</sup>- Kachanov, 1961

<sup>2</sup>- Southwell, 1965

<sup>3</sup>- Relaxation Method

<sup>4</sup>- Banichuk, 1966

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}, \quad (4)$$

که محور  $Z$  در راستای طول میله قرار دارد. تعبیر فیزیکی معادله دیفرانسیل حاکم بر پیچش الاستیک مشابه معادله غشایی است که از یک سمت تحت فشار هوا قرار گرفته است زیرا در این حالت معادله دیفرانسیل حاکم سیستم به شکل زیر است:

$$\nabla^2 z(x, y) = -\frac{p}{s}, \quad (5)$$

که  $Z$  معرف ارتفاع غشا در هر نقطه و  $p$  معرف فشار هوا و  $s$  ثابت نیروی کششی می باشد واضح است که  $Z$  مشابه با  $\Psi$  و  $p$  متناسب با  $2\theta$  و  $s$  متناسب با  $\frac{1}{G}$  می باشند.

برای حل پلاستیک مقطع معادله دیفرانسیل سیستم به سادگی بدست می آید در صورتی که از معیار تسلیم فون میسر استفاده کنیم با توجه به برش خالص داریم [۲۱]:

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau|, \quad (6)$$

که با جایگذاری در رابطه فون میسر بدست می آوریم:

$$s_y = \frac{\sqrt{3}}{3} Y. \quad (7)$$

حال با توجه به این که اندازه  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{zy}$  را مشخص کردیم، به رابطه زیر می رسیم:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 = (s_y)^2, \quad (8)$$

که در رابطه فوق،  $s_y$  تنش تسلیم برشی می باشد که مقدار آن در رابطه (۷) محاسبه شد. تعبیر فیزیکی  $\Psi$  برای پیچش کاملاً پلاستیک مقطع مشابه سطحی است که در اثر ریختن شن بر روی مقطع ناحیه تحت پیچش ایجاد می شود، و یا به عبارت دیگر همانند اکستروژن یک سطح تحت یک زاویه مشخص است که به سادگی توسط نرم افزارهای مدل سازی نظیر Solid Work قابل ایجاد است.

تعبیر فیزیکی پیچش الاستیک-پلاستیک یک مقطع بدون کار سختی را به کمک تعبیر فیزیکی ذکر شده برای پیچش الاستیک و پیچش کاملاً پلاستیک یک مقطع قابل بیان است. به این شکل که زمانی که مقطعی تحت پیچش قرار می گیرد، با توجه به تعبیر غشایی، با افزایش زاویه

مرجع [۱۶] و پیچش الاستیک پلاستیک میله ی مسی دو سر آزاد در مرجع [۱۷] مورد بررسی قرار گرفته است. ولی در هیچیک از کارهای انجام شده پیچش الاستیک-پلاستیک مقاطع با گرادیان تنش تسلیم بررسی نشده است.

## ۲- تئوری

برای ارائه راه حل تقریبی برای بررسی پیچش الاستیک-پلاستیک مقاطع دلخواه بدون کار سختی از فرض ساده کننده عدم پیوستگی تابع تنش در مرز ناحیه ی الاستیک و پلاستیک استفاده می کنیم. فرضی که در ابتدا نامعقول به نظر می رسد در حالی که در اکثر حل های اجزای محدود چنین فرضی در نظر گرفته می شود و یکی از دلایلی که از روشهای جدید، مثل مش لس استفاده می کنیم همین موضوع می باشد [۱۸] [۱۹]. نکته ی قابل توجه این است که نتایج بدست آمده از این فرض در نهایت ناپیوستگی کمتری نسبت به نتایج اجزای محدود بدست می دهد (برای مقطع مستطیلی نتایج مقایسه در قسمت نتایج ذکر شده است). فرض مذکور باعث می گردد معادله دیفرانسیل های حاکم بر سیستم از حالت کوپل خارج شوند و به دو معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی روی یک ناحیه تبدیل گردند.

حل نیمه معکوس پیچش الاستیک توسط کار سنت ونان انجام گرفته است [۲۰]. با ترکیب قانون هوک و معادلات سازگاری و فرض تابعی که در معادلات تنش صدق کند، معادله مشتقات جزئی حاکم بر مسئله پیچش در حالت الاستیک به شکل زیر استخراج می گردد:

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial s} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = -2G\theta. \quad (2)$$

در معادلات فوق  $\Psi$  تابعی است که با کمک آن تنش های برشی را پیدا می کنیم و  $G$  مدول برشی و  $\theta$  زاویه پیچش بر واحد طول می باشد.

برای یک جسم  $\Psi$  دارای مقدار ثابتی روی مرز جسم می باشد که برای مرز خارجی جسم می توان آنرا صفر اختیار کرد ولی برای مرز داخل جسم (سوراخهای داخل جسم) معمولاً مقدار ثابت غیر صفر می شود. توابع تنش برشی  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{zy}$  به ترتیب توسط روابط زیر بدست می آید:

با فرض عدم پیوستگی تابع تنش باید حل الاستیک و حل کاملاً پلاستیک مقطع را پیدا کنیم، سپس با استفاده از یک برنامه کامپیوتری مقدار  $\Psi$  کمتر در هر نقطه را پیدا نمائیم، با کمک تابع  $\Psi$  بدست آمده و با توجه به رابطه زیر ترک اعمال شده به مقطع را مشخص می کنیم:

$$T = 2 \int \int \psi(x, y) dx dy \quad (15)$$

به همین منظور برنامه‌ای به زبان برنامه‌نویسی ویژوال بیسیک و ویژوال فرترن نوشته شده است که در برنامه مذکور برای پیدا کردن حل الاستیک از روش اختلاف محدود اصلاح شده استفاده شده است. در این روش برای نودهای مرزی با توجه به فاصله نود تا مرز مقادیر نودهای مرزی محاسبه می‌شود این موضوع باعث می‌گردد دقت محاسبه تابع برای حل الاستیک افزایش یابد.

معادلات اختلاف محدود مورد استفاده به شکل زیر می‌باشند:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{2\Psi_1}{\beta_1(1+\beta_1)} + \frac{2\Psi_2}{\beta_2(1+\beta_2)} + \frac{2\Psi_3}{(1+\beta_1)} + \frac{2\Psi_4}{(1+\beta_2)} - \left[ \frac{2}{\beta_1} + \frac{2}{\beta_2} \right] \Psi_0 \quad (16)$$

$$\beta_i = \frac{h_i}{h} \quad (17)$$

که  $h_i$  معرف فاصله نود کناری تا مرز می باشد و  $h$  معرف فاصله بین نودها می باشد.

برای تدوین الگوریتم حل پلاستیک(تنش تسلیم ثابت برای مقطع) از حکم اثبات شده زیر استفاده شده است، اگر فرض کنیم معادله مقطع جسم بصورت منحنی پارامتری باشد در صورتی که تابعی به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\Psi(x, y) = ku_{\Gamma}(x, y), \quad (18)$$

که  $u_{\Gamma}(x, y)$  مینیمم فاصله هر نقطه به مختصات  $(x, y)$  تا مرز  $\Gamma$  جسم باشد و  $k$  هم یک ثابت باشد در این صورت می‌توان ثابت کرد که تابع ذکر شده در معادله دیفرانسیل پیچش کاملاً پلاستیک زیر صدق می‌کند:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 = K^2. \quad (19)$$

پس از استخراج تابع  $\Psi$  برای حل الاستیک (که وابسته به زاویه  $\theta$  است) و حل پلاستیک کامل، مقطع نوبت به

پیچش، همانند غشایی است که فشار آن افزایش می‌یابد و رشد می‌کند تا به سطح گرادیان ثابت برخورد نماید (تعبیر فیزیکی تسلیم شدن فلز) این سطح گرادیان ثابت از رشد بیشتر غشاء در جهت عمود بر سطح جلوگیری می‌کند. در واقع با همین نوع مدل‌سازی فیزیکی به راحتی می‌توانیم پیشرفت مناطق پلاستیک به داخل مناطق الاستیک را مشاهده کنیم.

در گام بعدی برای ساده‌سازی و حل تقریبی ساده تر معادلات سیستم فرض پیوستگی تنش در مرز نواحی الاستیک-پلاستیک را حذف می‌کنیم این فرض باعث می‌گردد که معادلات سیستم از حالت کوپل خارج شوند. معادلات سیستم در حالت کوپل به شکل زیر می‌باشند:

$$\Psi(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = -2G\theta, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 = S_y^2. \quad (11)$$

در معادلات فوق  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  و  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  توابعی پیوسته می باشند و همچنین توابع  $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)$  و  $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)$  کراندار می باشند و در حالت غیر کوپل به شکل زیر می باشند:

$$\Psi(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (12)$$

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = -2G\theta, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 = S_y^2, \quad (14)$$

که در معادلات غیر کوپل مذکور تنها تابع  $\Psi$  پیوسته فرض شده است.

با فرض حذف پیوستگی مشتق تابع  $\Psi$  معادلات به حالت غیر کوپل درمی‌آیند که تعبیر فیزیکی عبارت فوق به این شکل است که سقف گرادیان ثابت مانع رشد غشاء نمی‌شود، بلکه رویه حل الاستیک، به حالت مستقل از رویه ی حل پلاستیک، می‌تواند رشد کند، از اینرو رویه ی حل الاستیک-پلاستیک را رویه ی دربر گیرنده ی حجم مشترک دو رویه ی حل الاستیک و حل پلاستیک در نظر می‌گیریم و برای محاسبه گشتاور لازم برای پیچش مقطع هم از حجم مشترک بین دو رویه استفاده می‌کنیم. برای حل تقریبی الاستیک-پلاستیک یک مقطع

کنیم تا از تعامد و یا عدم تعامد اطمینان حاصل کنیم. مشخص است چنین الگوریتمی بسیار طولانی و وقت گیر است.

الگوریتم تقریبی پیچش کاملاً پلاستیک با فرض گرادیان تنش تسلیم بسیار طولانی و وقت گیر است. برای همین منظور با بررسی وضعیت فیزیکی الگوی تنش تسلیم در مقاطع عملیات حرارتی شده با توجه به منبع [۲۱] باید تابعی برای تنش تسلیم در نظر بگیریم که وابسته به فاصله هر نقطه داخل مقطع تا سطح آن باشد. فرض رابطه‌ای که در آن تنش تسلیم تابع کمینه فاصله هر نقطه تا مرز باشد، موجب می‌شود که الگوریتم ما از حالت دقیق پیدا کند، و الگوی یافتن  $\Psi$  ساده تر گردد زیرا در اینصورت تنها لازم است کمینه فاصله هر نقطه تا مرز را پیدا کرده و سپس با انتگرال گیری در روی مسیر کمینه فاصله، مقدار تابع  $\Psi$  را محاسبه نمائیم. در روابط (۲۲) تا (۲۸) این موضوع به صورت زیر اثبات شده است شکل ۱:

$$(\Psi_p)_{\Gamma_1} = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_p, y_p)} f(x, y) ds, \quad (22)$$

$$(\Psi_p)_{\Gamma_2} = \int_{(x_2, y_2)}^{(x_p, y_p)} f(x, y) ds, \quad (23)$$

$$f(x, y) = f(s), f(s) > 0, \quad (24)$$

$$(\Psi_p)_{\Gamma_1} = \int_0^D f(s) ds, \quad (25)$$

$$(\Psi_p)_{\Gamma_2} = \int_0^D f(s) ds, \quad (26)$$

$$(\Psi_p)_{\Gamma_1} - (\Psi_p)_{\Gamma_2} = \int_{D_1}^{D_2} f(s) ds. \quad (27)$$

با توجه به روابط فوق در می‌یابیم:

$$(\Psi_p)_{\Gamma_1} > (\Psi_p)_{\Gamma_2}. \quad (28)$$

نکته بسیار جالبی که با ارائه الگوی فاصله ای تنش تسلیم بدست می‌آوریم دقیق سازی حل برای معادله ی دیفرانسیل پیچش (۲۰) می باشد، در واقع با فرض مذکور کانتوری با مقدار  $\Psi$  ثابت در روی مرز هم فاصله تا مرز قطعه بدست می‌آوریم. با فرض سیستم مختصاتی مماس و قائم بر کانتور هم فاصله و با توجه به اینکه که می‌دانیم خط قائم بر مرز خارجی، متعامد بر کانتور های هم فاصله متعامد است تابع  $\Psi$  توسط رابطه ی زیر بدست می‌آید شکل ۲:

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial n} = f(x, y) \longrightarrow \Psi_p = \int_0^d f(x, y) dn. \quad (29)$$

محاسبه تابع  $\Psi$  برای حالت الاستیک-پلاستیک می‌رسد. معادله دیفرانسیل پیچش برای حالت تنش تسلیم متغیر به شکل زیر می باشد:

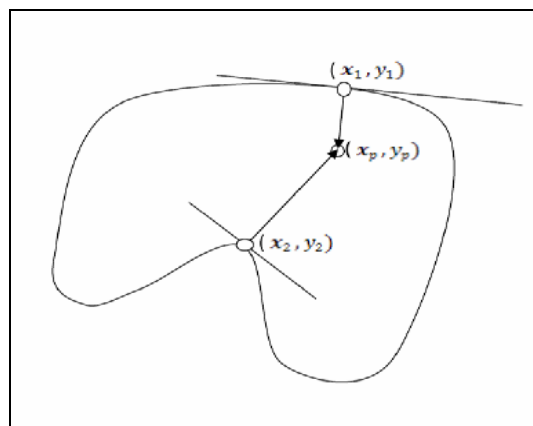
$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 = (f(x, y))^2, \quad (30)$$

$$\Psi(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

برای حل عددی معادله دیفرانسیل ارائه شده در ابتدا معادله دیفرانسیل را به دستگاه معادلات غیر خطی تبدیل کردیم ولی متأسفانه دستگاه معادلات مربوطه با روش های شناخته شده عددی مثل نقطه ثابت و نیوتن حل نشد، زیرا در روش نیوتن با ماتریس های منفرد مواجه شد و حل های عددی برای همگرایی به جواب موفق نبودند، به همین منظور از تعمیم روش تنش تسلیم ثابت بهره برده ایم. برای این منظور فرض می‌کنیم که در حالت تنش تسلیم متغیر نیز همانند تنش تسلیم ثابت تصویر بردار گرادیان، بر سطح رویه  $\Psi$ ، در راستای نرمال مرز خارجی قرار دارد شکل ۱.

برای پیدا کردن تابع  $\Psi$  با فرض ذکر شده به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$\Psi_p = \int_{(x, y)}^{(x_p, y_p)} f(x, y) ds. \quad (31)$$



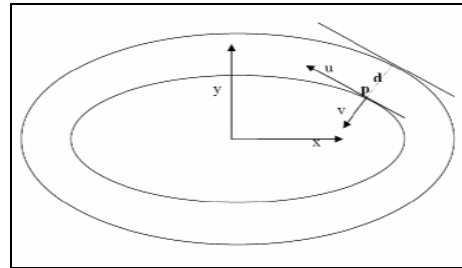
شکل ۱: مسیرهای انتگرال گیری برای یافتن تابع  $\Psi$ .

ابتدا مقادیر انتگرال فوق را به ازای کل مسیرهای متعامد به مرز سطح مقطع محاسبه می‌کنیم و میزان کمینه آنرا برای تابع  $\Psi$  در هر نقطه در نظر می‌گیریم.

حال در صورتی که بخواهیم  $\Psi$  را براساس الگوریتم فوق محاسبه کنیم لازم است برای هر نقطه داخل مقطع شرط تعامد خط واصل گذرا از هر نقطه تا مرز سطح مقطع را چک

### ۳- بحث بر روی نتایج

بررسی نتایج حل کاملاً پلاستیک و الاستیک-پلاستیک مقاطع تنش تسلیم ثابت و متغیر به شرح ذیل صورت می پذیرد:

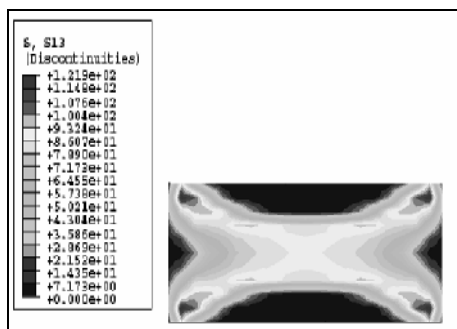


شکل ۲: سیستم مختصات مماس وقائم.

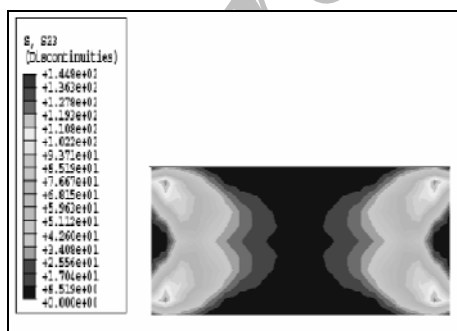
#### ۳-۱- نتایج حل کاملاً پلاستیک و الاستیک-پلاستیک برای مقطع تنش تسلیم ثابت

در ابتدا به بررسی کانتورهای ناپیوستگی تنش بدست آمده برای پیچش الاستیک-پلاستیک مقطع مستطیلی برای گشتاور ۱۳۰۰ نیوتن متر می پردازیم [۲۲]. در این بررسی تعداد نودهای در نظر گرفته شده برای هردوسیستم حل اجزای محدود و حل برنامه یکسان فرض شده است.

کانتور ناپیوستگی تنش نشان داده شده در شکل ۳ تا ۵ به ترتیب ناپیوستگی تنش های  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  و تنش میسر را نشان می دهند.



شکل ۳: کانتور ناپیوستگی تنش  $\tau_{xz}$ .



شکل ۴: کانتور ناپیوستگی تنش  $\tau_{yz}$ .

برای پیدا کردن خطا، باید با توجه به مقادیر  $\Psi_p$  مقدار گرادیان سطح در هر نقطه را محاسبه کرده و با میزان تابع  $f(x, y)$  (تابع تنش تسلیم) مقایسه کنیم. برای پیدا کردن مشتق تابع  $\Psi_p$  باید به طریق عددی، به شکل زیر محاسبه شود:

$$g(x, y) = \left( \left( \frac{\Psi_p(i+1, i) - \Psi_p(i-1, j)}{2h} \right)^2 + \left( \frac{\Psi_p(i, j+1) - \Psi_p(i, j-1)}{2h} \right)^2 \right)^{0/5} \quad (30)$$

که مقادیر خطا با مقایسه  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  محاسبه می شود. در قسمت نتایج، خطا برای مقطع مستطیلی در حالت تنش تسلیم متناسب با فاصله محاسبه شده است و نتایج بدست آمده ذکر شده است.

برای محاسبه زاویه پیچش  $\theta$  به ازای هر ترک ورودی ابتدا میزان  $\Psi_{ep}$  را با توجه به مقیاس محاسبه شده برای  $\Psi_p$  و  $\Psi_e$  محاسبه می شود ( $\Psi_{ep}$  کمینه مقدار  $\Psi_p$  و  $\Psi_e$  در هر نقطه). همانطور که بحث تئوری بطور کامل بحث شد داریم:

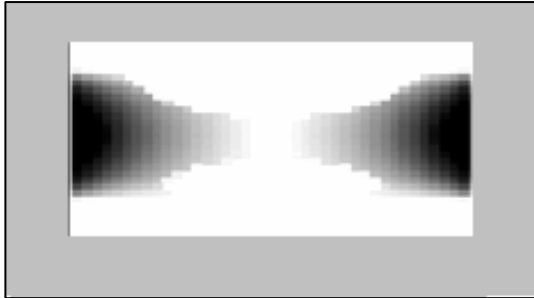
$$\Psi_e = F(\theta) \quad (31)$$

$\Psi$  الاستیک تابع زاویه پیچش  $\theta$  می باشد از اینرو برای یافتن ترک، لازم است با کمک الگوریتمی مقدار  $\theta$  را آنقدر تغییر دهیم تا حجم مشترک در رویه  $\Psi_p$  و  $\Psi_e$  به صورت زیر برابر نصف ترک اعمالی شود:

$$T_p = 2 * h^2 * \sum_{i=1}^n (\Psi_{ep})_i \quad (32)$$

که در آن تعداد کل نودها،  $h$  فاصله نودها،  $T_p$  گشتاور اعمالی می باشد.

کانتور های تنش بدست آمده توسط حل اجزای محدود و برنامه مذکور برای گشتاور ۱۳۰۰ نیوتن متر، ( با فرض ناپیوستگی تنش در مرز ناحیه ی الاستیک و پلاستیک ) در شکل های ۶ تا ۱۱ مشخص شده است.



شکل ۹: کانتور تنش  $\tau_{yz}$  با ناپیوستگی حداکثر ۳۰ مگاپاسگال.

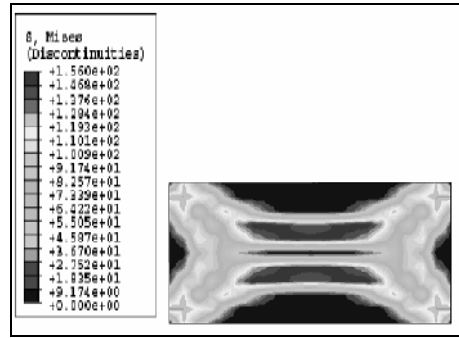


شکل ۱۰: کانتور تنش  $\tau_{xz}$  با ناپیوستگی حداکثر ۸۰ مگاپاسگال.



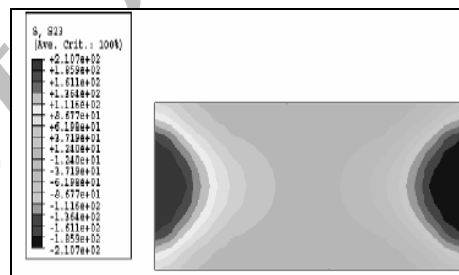
شکل ۱۱: کانتور تنش میسر با ناپیوستگی حداکثر ۹۰ مگاپاسگال.

تشابه بسیار خوبی بین کانتورهای تنش وجود دارد و مشخص است که برای تعداد گره یکسان در هر دو حل، ناپیوستگی تنش بدست آمده با روش مذکور از ناپیوستگی تنش در اجزای محدود کمتر می باشد.

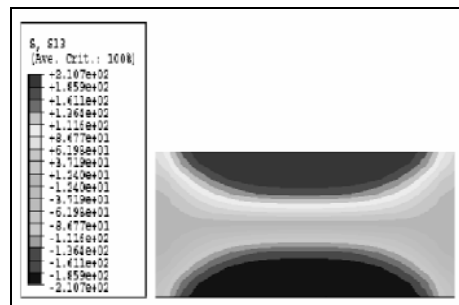


شکل ۵: ناپیوستگی تنش میسر.

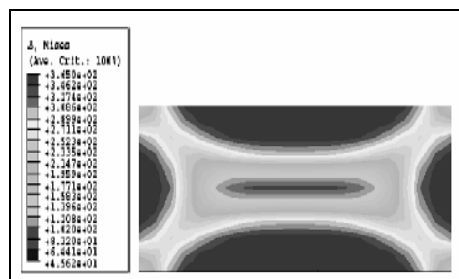
مشخص است که  $\tau_{xz}$  در مرز ناحیه الاستیک و پلاستیک حدود ۷۰ مگاپاسگال ناپیوستگی دارد و  $\tau_{yz}$  در مرز ناحیه الاستیک و پلاستیک حدود ۹۰ مگاپاسگال ناپیوستگی دارد. ناپیوستگی تنش میسر نیز در مرز ناحیه الاستیک و پلاستیک حدود ۱۰۰ مگا پاسگال می باشد.



شکل ۶: کانتور تنش  $\tau_{yz}$ .



شکل ۷: کانتور تنش  $\tau_{xz}$ .



شکل ۸: کانتور تنش میسر.

کانتورهای برنامه وجود دارد نواحی تیره رنگ در حل اجزاء محدود و نواحی روشن در حل صورت گرفته توسط برنامه، معرف نواحی پلاستیک شده می باشند شکل (۱۲ و ۱۳). همچنین با دقت گشتاور بر حسب زاویه پیچش در نمودار ۱ در می یابیم که به ازای یک گشتاور معین جوابهای برنامه یک حد بالا را برای زاویه ی پیچش پیش بینی می کند [۲۲].

۳-۲- نتایج حل کاملاً پلاستیک و الاستیک - پلاستیک برای مقطع با در نظر گرفتن گرادیان فاصله‌ای تنش تسلیم

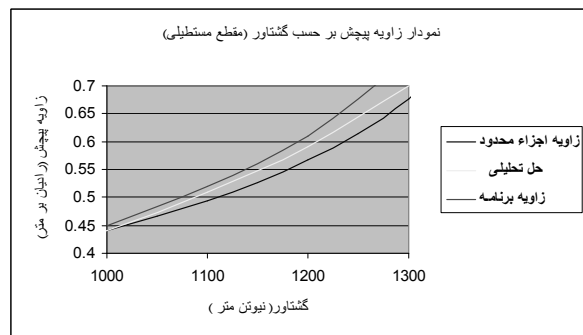
ساده‌ترین الگویی که برای گرادیان تنش تسلیم برای مقطعی که عملیات حرارتی شده قابل بیان است، گرادیان عمقی (فاصله‌ای) تنش تسلیم می‌باشد [۲۱]. به این صورت که برای تنش تسلیم تابعی مثل  $Y = F(r)$  در نظر گرفته می‌شود که پارامتر  $r$  برای هر نقطه داخل مقطع، کمینه فاصله آن تا سطح مقطع می‌باشد. به همین منظور باید تابعی برای  $F(r)$  در نظر بگیریم که تغییرات تنش تسلیم را برای یک جنس نمونه توصیف نماید.

در صورتی که فرضاً یک گرادیان غیرخطی برای تنش تسلیم مطابق با رابطه (۳۳) در نظر بگیریم.

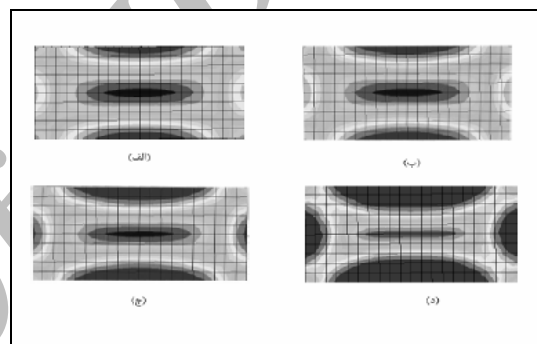
$$F(r) = 3/5 \times 10^8 - (2/63523 \times 10^9) \sqrt{\frac{r}{1000}} \quad (33)$$

برای تابع فرضی  $F(r)$  که در رابطه (۳۳) ذکر شده است. الگوی تنش تسلیم، رویه ی  $\Psi$ ، رویه‌های کانتور پیشرفت منطقه ی پلاستیک و کانتور خطا در شکل‌های ۱۴ تا ۱۷ برای مقطع مستطیلی رسم شده است. البته قابل ذکر است که ابعاد و دیگر مشخصات فیزیکی مقاطع در مرجع [۲۲] ذکر شده است.

برای رابطه تنش تسلیم فوق الگوی پیشرفت منطقه پلاستیک به درون ناحیه پلاستیک برای گشتاورهای ۱۳۵۰، ۱۴۰۰، ۱۴۵۰ نیوتن متر در شکل ۱۶ نشان داده شده است. همچنین نمودار ۲ تغییرات زاویه پیچش بر حسب ترک را نشان می‌دهد. الگوی تنش پسماند به ازای ترک کاملاً پلاستیک و مقادیر  $|\tau_{xz}| \leq 90 \text{ Mpa}$  و  $|\tau_{xy}| \leq 80 \text{ Mpa}$  کانتور آن در شکل ۱۸ نشان داده شده است.

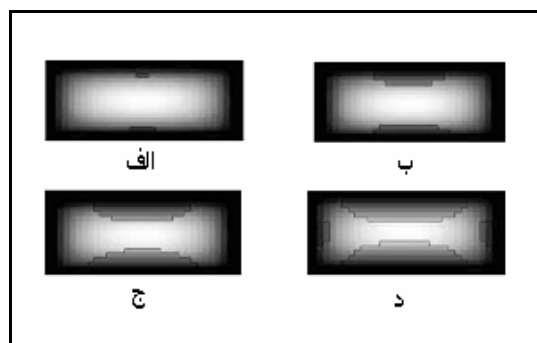


نمودار ۱: نمودار زاویه پیچش بر حسب گشتاور برای مقطع مستطیلی.



شکل ۱۲: پیشرفت ناحیه پلاستیک در الاستیک از نتایج بدست آمده توسط اجزاء محدود.

(الف) گشتاور ۱۰۰۰ N.m (ب) گشتاور ۱۰۰۰ N.m  
(ج) گشتاور ۱۲۰۰ N.m (د) گشتاور ۱۳۰۰ N.m

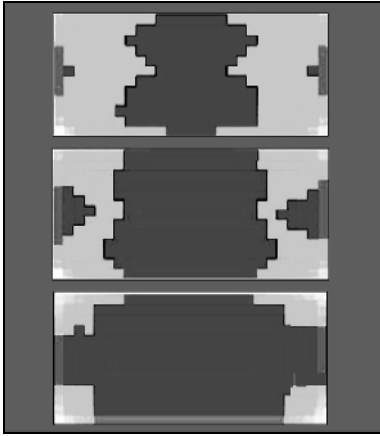


شکل ۱۳: پیشرفت ناحیه پلاستیک در الاستیک از نتایج بدست آمده توسط برنامه.

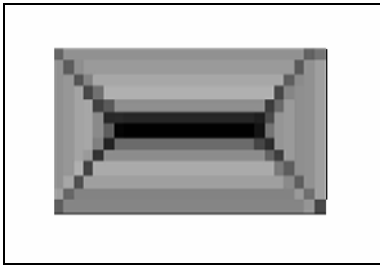
(الف) گشتاور ۱۰۰۰ N.m (ب) گشتاور ۱۰۰۰ N.m  
(ج) گشتاور ۱۲۰۰ N.m (د) گشتاور ۱۳۰۰ N.m

همانطور از جواب های ذکر شده مشخص است تشابه بسیار مناسبی بین کانتورهای حل اجزاء محدود و

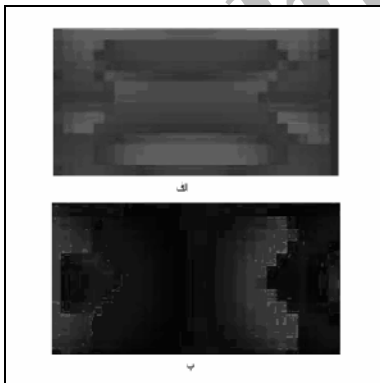




شکل ۱۶: پیشرفت ناحیه پلاستیک در الاستیک با در نظر گرفتن گرادیان تنش تسلیم نتایج بدست آمده توسط برنامه (الف) گشتاور  $1350 \text{ N.m}$  (ب) گشتاور  $1400 \text{ N.m}$  (ج) گشتاور  $1450 \text{ N.m}$ .



شکل ۱۷: کانتور خطای حل پلاستیک (حداکثر خطا در نقاط تیره تر).

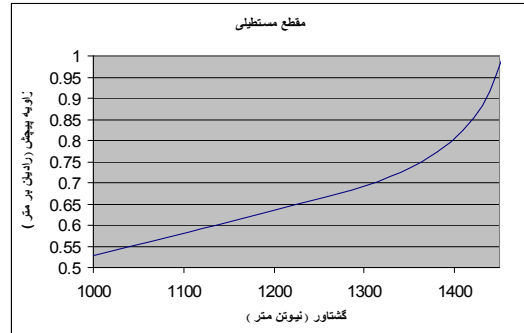


شکل ۱۸: کانتورهای تنش پسماند  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  (حل تورشن بار) برای مقطع مستطیلی با گشتاور  $1450 \text{ نیوتن متر}$ .

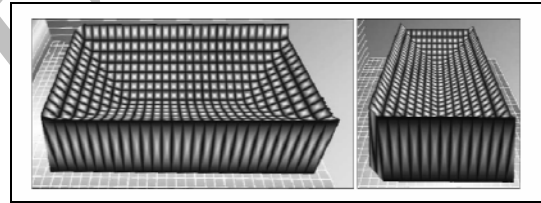
### ۳-۳- بحث

در مقایسه حل‌های صورت گرفته توسط برنامه و حل‌های اجزای محدود برای مقاطع مختلف حل ارائه شده توسط

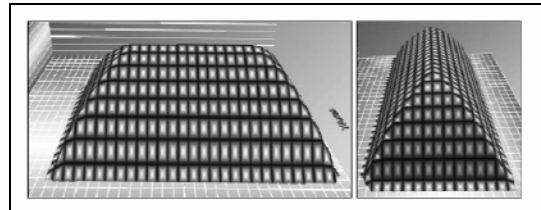
با دقت در کانتور خطای بدست آمده در شکل ۱۷ در می‌یابیم که ماکزیمم خطا در نواحی و اصل گوشه‌های ایجاد می‌شود و مقدار آن حداکثر ۵ درصد می‌باشد. در نواحی دیگر که روشن تر هستند خطا به کمتر از ۲ درصد کاهش می‌یابد.



نمودار ۲: منحنی حل تورشن بار برای مقطع مستطیلی با در نظر گرفتن گرادیان تنش تسلیم.



شکل ۱۴: رویه مشخص‌کننده تنش تسلیم در هر نقطه.



شکل ۱۵: رویه تابع ۱/۲ برای حل پلاستیک تنش تسلیم متغیر، مقطع مستطیلی.

ملاحظه‌ای بعد از دهه هشتاد میلادی نداشته است و در کلیه مسائلی که در این زمینه مطرح گردیده فرض تنش تسلیم ثابت صورت گرفته است. بازسازی معادلات دیفرانسیل پیچش به شکل غیرکوپل دامنه حل معادلات را برای حالت تنش تسلیم غیرثابت ممکن می‌سازد و راه را برای ادامه کار ممکن می‌کند (کاری که انجام آن با نرم افزارهای اجزاء محدود بسیار مشکل است و حل آن نیاز به ماکرو نویسی دارد). در نهایت، برای دستیابی به روش جدیدتر و کاراتر نیاز داریم معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل‌های فیزیکی را تا حد امکان ساده سازیم و مدلی ساده شده برای آنالیز ایجاد نمائیم.

### مراجع

1. Sokolovsky, V.V. "A Problem of Elastic-plastic Torsion", Prikl. Matematika I Mekhanika, Vol. 6, No's., 2-3, pp. 241-246, 1972.
2. Kachanov, L.M. "A Solution of the Elastic-plastic Torsion Problem, Using a Variational Method", In Investigation in Elasticity and Plasticity, Vol. 1, Leningrad Izd-vo LGU, pp. 151-161, 1961.
3. Southwell, R.V. "Relaxation Methods in Theoretical Physics", Vol's. 1, 2, Oxford University Press, London pp. 249-522, 1946.
4. Okudo, H. "The Approximate Decision of Problem to Torsion of a Shaft with Ring Groove", The Reports Inst. High Speed Mech., Vol. 1, No. 5, pp. 230-237, 1953.
5. Banickuk, N.V., Petrov, V.M. and Chernousko, F.L. "Numerical Solution of Variational and Boundary Value Problems by the Method of Local Variations", Zhurn Vychislit Matematiki I Mat. Fiziki, Vol. 6, No. 6, pp. 947-961, 1966.
6. Perlin, B.D. and Sadovsky, V.M. "Elastic-plastic Torsion of a Rectangular Bar", Mekhanika Tverdovo Tela, Vol. 1, No. 5, pp. 182-185, 1981.
7. Heracovich, C.T. and Hodge, P.G. Jr. "Elastic-Plastic Torsion of Hollow Bars by Quadratic Programming", Int. J. Mech. Sci., Vol. 11, No. 1, pp. 53-63, 1969.
8. Annin, B.D. and Sadovsky, V.M., "Elastic Plastic of Rectangular Bar", Mekhanika Tverdovo Tela, Vol. 1, No. 5, pp. 182-185, 1981.
9. Mendelson, A. "Plasticity Theory and Application", Chapter 11, UK, London, 1968.
10. Bland. J.A. "Implementation of an Algorithm for Elastoplastic Torsion", Advances in Engineering Software, Vol. 17, No. 1, pp. 61-68, 1993.
11. Arutyunyan, A. Kh. and Radayev Yu. N., "Elastoplastic Torsion of a Cylindrical Rod for Finite Deformations", J. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 53, No. 6, pp. 804-811, 1989.

نرم افزار تورشن بار زاویه پیچش بیشتری را پیش‌بینی می‌کند و یا به عبارت دیگر حد بالا را برای زاویه پیچش به ازای یک ترک اعمالی پیش‌بینی می‌کند. از اینرو می‌توان از جواب‌های بدست آمده برای طراحی مقاطع مختلف بهره برد.

برای پیشرفت منطقه پلاستیک تشابه بسیار نزدیکی بین جواب‌های برنامه و جواب‌های اجزای محدود به چشم می‌خورد، این امر باعث می‌شود که توصیف مناسبی از پیشرفت منطقه ی پلاستیک به درون ناحیه الاستیک در هر لحظه داشته باشیم. الگوی تنش پسماند بدست آمده تشابه بسیار بی‌نظیری با جواب‌های اجزای محدود دارد، از اینرو می‌توان در مواردی که نیاز به تعیین الگوی تنش پسماند است از آن بهره برد. الگوی ناپیوستگی نشان می‌دهد که ناپیوستگی تنش (برای تعداد گره های یکسان) در نقاط غیر گوشه‌ای کوچکتر یا مساوی ناپیوستگی بدست آمده توسط اجزای محدود می‌باشد، همین امر تأیید قوی‌تری بر جواب بدست آمده توسط برنامه است. الگوی  $\psi$  بدست آمده برای پیچش کاملاً پلاستیک تنش تسلیم غیرثابت با فرضی که مشابه حالت تنش تسلیم ثابت می‌باشد صورت گرفته است و در نهایت صحت جواب ارائه شده با توجه به مقادیر خطا و کانتور آن درستی فرض اولیه را تأیید می‌کند.

دستیابی به الگوی تابع  $\psi$  برای پیچش کاملاً پلاستیک تنش تسلیم غیرثابت محاسبه ترک و تنش پسماند را برای هر مقطع ممکن می‌سازد. همچنین با کمک تعمیم فرض غیرکوپل‌سازی که قبلاً ارائه شد می‌توان پیشرفت منطقه پلاستیک، الگوی تنش، رابطه گشتاور برحسب زاویه پیچش را توصیف نمود.

### ۴- نتیجه‌گیری

مقایسه بین جواب‌های ارائه شده توسط برنامه با جواب‌های اجزای محدود برتری تقریب ارائه شده (نا پیوستگی تنش در مرز ناحیه الاستیک-پلاستیک) را تأیید می‌کند. در حل‌های صورت گرفته در گذشته برای پیچش الاستیک-پلاستیک مقاطع همه بدنبال راه حل تحلیلی و یا عددی دقیق بوده‌اند. ولی در هیچیک از کارهای ارائه شده بدنبال فرض معقولی که معادلات دیفرانسیل را به شکل ساده‌تری بازسازی نماید نبوده‌اند و از این رو مسئله پیچش هیچ پیشرفت قابل

12. Jinag, Wen-Guang and Henshall, J.L., "A Coupling Cross-section Finite Element Model for Torsion Analysis of Prismatic Bars", *European J. Mechnaics-A/Solids*, Vol. 21, No. 3, pp. 513-522, 2002.
13. Ryoo, C.S. and Lee, S.H., "A Computational Verification Method of Existence of Solution for Elastoplastic Torsion Problems with Uniqueness", *Applied Mathematics Letters*, Vol. 13, No. 6, pp. 25-29, 2000.
14. Kim, H.S., Hong, S.I., Y.S., Lee, Dubravina, A.A. and Alexandrov, I.V. "Deformation Behavior of Copper During a High Pressure Torsion Process", *J. Materials Processing Technology*, Vol. 142, No. 2, pp.334-337, 2003.
15. OLEARY, D., "Elastoplastic Torsion: Twist and Stress" *Computing Science & Engineering*, Vol. 6, No. 4, pp. 74-83, 2004.
16. Padmanabhan, R., MacDonald, B.J., and Hashmi, M.S., "Elastic-plastic Behaviour of an AISiC MMC Rod Under Combined Tension and Torsion Loading", *J. Materials Processing Technology*, Vol.155-156, No. 5, pp.1756 - 1759, 2004.
17. Duchêne, L., Houdaigui, F., and Habraken, A. "Length Changes and Texture Prediction During Free End Torsion Test of Copper Bars with FEM and Remeshing Techniques", *Int. J. Plasticity*, Vol. 23, No. 8, pp.1417-1438, 2007.
18. Bathe, J. "Finite Element Procedures", Prentice-Hall, USA., New Jersey, 1996.
19. Liu, G.R. "Mesh Free, Methods", CRC Press, pp. 35, 195, 636, USA., New York, 2003.
20. Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N. "Theory of Elasticity", 3d Ed, Mc Graw-Hill, New York, 1970.

۲۱- گلغذار، م.، "اصول و کاربرد عملیات حرارتی فولادها و چدن‌ها"، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، چاپ اول، اصفهان، ۱۳۷۲.

۲۲- بنی اسدی، م.، "پیش‌الاستیک-پلاستیک مقاطع تنش تسلیم ثابت و متغیر"، پایان نامه کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، ۱۳۸۵.

Surf and download all data from SID.ir: [www.SID.ir](http://www.SID.ir)

Translate via STRS.ir: [www.STRS.ir](http://www.STRS.ir)

Follow our scientific posts via our Blog: [www.sid.ir/blog](http://www.sid.ir/blog)

Use our educational service (Courses, Workshops, Videos and etc.) via Workshop: [www.sid.ir/workshop](http://www.sid.ir/workshop)