

تحلیل تقریبی خرابی پیشرونده سازه‌های فولادی

آرش نجی^۱ و فریدون ایرانی*^۲

^۱ دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه فردوسی مشهد و عضو هیئت علمی موسسه آموزش عالی سجاد مشهد

^۲ استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

خرابی پیشرونده پدیده‌ای است که در آن یک خسارت جزئی یا شکست موضعی باعث خرابی کل سازه یا قسمت زیادی از آن می‌شود به گونه‌ای که خرابی نهایی تناسبی با خرابی اولیه ندارد. برای بررسی خرابی پیشرونده سازه‌ها، روش دینامیکی غیرخطی پاسخ‌های دقیق‌تری را نسبت به روش‌های استاتیکی به دست می‌دهد. به دلیل زمان‌بر بودن تحلیل دینامیکی غیرخطی استفاده از مدل‌های ساده‌تر و روش‌های تقریبی اهمیت زیادی یافته است. در این مقاله به رابطه‌سازی یک مدل ساده و تقریبی برای محاسبه تغییرمکان نقطه بالای ستون حذف شده در تحلیل خرابی پیشرونده پرداخته شده است. سعی شده است مدل پیشنهادی در عین دقت مناسب، ساده نیز باشد به طوری که به کمک محاسبات دستی نیز در زمانی اندک به پاسخ برسد. همچنین با رسم منحنی ظرفیت سازه و مقایسه آن با نیروی محوری ستون حذف شده به بررسی مقاومت سازه در برابر خرابی پیشرونده پرداخته شده است.

واژگان کلیدی: خرابی پیشرونده، سازه‌های فولادی، تحلیل تقریبی، منحنی ظرفیت، رفتار کابلی.

۱- مقدمه

یعنی علت خرابی اولیه را در نظر نمی‌گیرد بلکه پاسخ سیستم پس از حذف یکی از عضوهای اصلی برابر را در نظر می‌گیرد. این روش بیشتر با حذف یک ستون میانی یا گوشه از سازه انجام می‌شود. از این روش برای طراحی سازه‌های جدید یا بررسی ظرفیت سازه‌های موجود استفاده می‌شود. این پدیده در واقع دینامیکی است که در بیشتر موارد با تغییر شکل‌های بزرگ همراه است به نوعی که سازه خسارت دیده برای بقا به دنبال مسیره‌های پخش بار جایگزین است. در GSA و DOD سه روش استاتیکی خطی (LS)، استاتیکی غیرخطی (NLS) و دینامیکی غیرخطی (NLD) برای تحلیل خرابی پیشرونده ارائه شده است.

۲- روش‌های تحلیل

در روش استاتیکی خطی به تیرهای قاب باید بار گسترده مطابق رابطه (۱) یا (۲) وارد شود:

$$\alpha \times (DL + 0.25 LL) \quad (\text{GSA load combination}) \quad (1)$$

$$\alpha \times (1.2DL + 0.5LL) + 0.2WL \quad (\text{DOD load combination}) \quad (2)$$

که DL ، LL و WL به ترتیب بار مرده، زنده و باد هستند و α ضریب بار برای وارد کردن اثرات دینامیکی در تحلیل استاتیکی است که برای تیرهای موجود در دهانه شامل ستون

خرابی پیشرونده پدیده‌ای است که در آن یک خسارت جزئی یا شکست موضعی باعث خرابی کل سازه یا قسمت زیادی از آن می‌شود. یکی از ویژگی‌های اصلی این پدیده این است که خرابی نهایی تناسبی با خرابی اولیه ندارد. هرچند احتمال واژگونی یک سازه اندک است اما در صورت رخداد، باعث زیان‌های اقتصادی و اجتماعی زیادی می‌شود. در چند دهه گذشته، موارد بسیاری از واژگونی کلی یا موضعی سازه‌ها بر اثر پدیده‌هایی چون آتش سوزی، ضربه و انفجار دیده شده است.

پدیده خرابی پیشرونده ابتدا پس از واژگونی ساختمان ۲۲ طبقه در رونان پوینت (Ronan point) لندن در سال ۱۹۶۸ بر اثر انفجار گاز در یکی از طبقات بالایی، توجه مهندسان را به خود جلب کرد [۱، ۲]. پس از حمله تروریستی به ساختمان آلفرد پی موراه (Alfred P. Murrah) در شهر اوکلاهما در سال ۱۹۹۵ [۳] و واژگونی ساختمان تجارت جهانی در سال ۲۰۰۱ [۴-۷] پژوهش‌ها در این زمینه سرعت بیشتری به خود گرفت.

در ایالات متحده، وزارت دفاع (Department of Defense) و اداره خدمات عمومی (General Service Administration) به ارائه دستورالعمل برای مقابله با این پدیده پرداخته‌اند [۸، ۹]. در این دستورالعمل‌ها، روش مسیر بار جایگزین (ALP) برای اطمینان از مقاومت سازه در برابر خرابی پیشرونده انتخاب پیشنهاد شده است. ALP یک روش مستقل از رخداد است

پاسخگو نبودن سازه، از تحلیل دینامیکی غیرخطی به عنوان دقیق‌ترین روش استفاده می‌شود [۲۰].

در این میان می‌توان از مدل‌های تقریبی نیز استفاده نمود [۲۴-۲۱]. در حقیقت، روش‌های تقریبی، محدوده پاسخ سازه را با دقت مناسبی تخمین می‌زنند. اگر پاسخ با اختلاف مناسبی کمتر از معیارهای مجاز آیین‌نامه بود، می‌توان از انجام روش‌های دقیق‌تر اجتناب نمود.

در این مقاله به رابطه‌سازی یک مدل ساده و تقریبی برای محاسبه تغییر مکان نقطه بالای ستون حذف شده در تحلیل خرابی پیشرونده پرداخته شده است.

۳- مرور پژوهش‌های گذشته

Marjanishvili و Agnew [۱۰] به تشریح تحلیل خرابی پیشرونده قاب سه‌بعدی به چهار روش LS، NLS، LD و NLD با نرم‌افزار SAP2000 پرداختند.

Fu [۱۱] با تحلیل غیرخطی دینامیکی یک قاب ۲۰ طبقه فولادی سه‌بعدی دریافت که ستون‌های مجاور ستون حذف شده باید برای بار محوری معادل دو برابر بار طراحی خود طرح شوند. حذف ستون در طبقات بالاتر منجر به تغییر مکان بیشتری می‌شود زیرا تعداد طبقات کمتری در استهلاک انرژی مشارکت می‌کنند.

محمد [۱۲] با تحلیل قاب سه‌بعدی بتنی، به بررسی تنش‌های برشی ناشی از پیچش در تیرهای متصل به ستون کناری حذف شده پرداخت. این تنش‌ها باعث شکست ترد تیر می‌شوند. کاستی مدل‌های دوبعدی این است که این تنش‌ها در مدل‌های دو بعدی وارد محاسبات نمی‌شود.

Ruth و همکاران [۱۳] با انجام تحلیل دینامیکی غیرخطی و استاتیکی غیرخطی با اعمال ضریب بارهای دینامیکی مختلف بین یک و دو بر روی قاب‌های ۲ و ۳ بعدی و مقایسه مجموع چرخش مفصل‌های خمیری، ماکزیمم چرخش مفصل‌های خمیری و حداکثر خیز نقطه بالای ستون حذف شده دریافتند که استفاده از ضریب بار دینامیکی ۱/۵ در تحلیل استاتیکی غیرخطی، پاسخ‌هایی مشابه تحلیل دینامیکی غیرخطی می‌دهد.

Powel [۱۴] به مقایسه روش‌های LS، NLS و NLD پرداخت و به این نتیجه رسید که ضریب بار ۲ در تحلیل‌های استاتیکی باعث پاسخ‌های بسیار محافظه کارانه‌ای نسبت به تحلیل دینامیکی می‌شود.

Lin و Tsai [۱۵] با بررسی قاب‌های بتنی مقاوم در برابر زلزله دریافتند که تحلیل غیرخطی استاتیکی، ظرفیت سازه را

حذف شده، برابر ۲ و برای بقیه تیرهای قاب، برابر ۱ است. دستورالعمل GSA معیار خرابی را DCR (نسبت نیروی داخلی موجود به مقاومت عضو) دانسته است:

$$DCR = \frac{Q_{UD}}{Q_{CE}} \quad (۳)$$

که در آن Q_{UD} نیرویی است (لنگر، نیروی محوری، برش، ...) که از تحلیل استاتیکی خطی در عضو تحت بار با رابطه (۱) یا (۲) ایجاد می‌شود و Q_{CE} ظرفیت نهایی مورد انتظار عضو است. برای تمامی اعضا باید $DCR \leq 3$ باشد. با کمی توجه در می‌یابیم که به عضو اجازه تغییر شکل‌های غیرارتجاعی داده شده است.

براساس دستورالعمل DOD مقاومت طراحی عضو ضربدر ضریب افزایش مقاومت ۱/۱ باید از نیروی داخلی عضو تحت بار رابطه (۲) بیشتر باشد.

در روش استاتیکی غیرخطی بار وارده بر سازه مشابه روش استاتیکی خطی است اما در روش دینامیکی غیرخطی ضریب α برای تمام تیرهای قاب ۱ است. معیار خرابی عضو در روش استاتیکی غیرخطی و دینامیکی غیرخطی، براساس میزان چرخش محور تیر ($\theta \leq 12^\circ$) و شکل‌پذیری عضو ($\mu \leq 20$) است. چرخش محور تیر، نسبت تغییرمکان قائم نهایی نقطه بالای ستون حذف شده به طول تیر است. شکل‌پذیری، نسبت تغییرمکان قائم نهایی نقطه بالای ستون حذف شده به تغییرمکان قائم حد ارتجاعی همان نقطه است. بنابراین در تحلیل‌های غیرخطی هدف محاسبه تغییر مکان سازه در محل حذف ستون است.

از میان ۳ روش معرفی شده، روش دینامیکی غیرخطی منجر به پاسخ‌های دقیق‌تری می‌شود [۱۵-۱۰]. به دلیل زمان‌بر بودن تحلیل دینامیکی غیرخطی یک قاب ۳ بعدی، بیشتر پژوهش‌ها بر روی قاب‌های دو بعدی انجام شده است [۱۹-۱۶]. با وجودی که در حال حاضر با توجه به پیشرفت نرم افزارهای تجاری و غیرتجاری، تا حدودی مشکل زمان‌بر بودن تحلیل دینامیکی غیرخطی برطرف شده است، اما باز هم انجام درست و دقیق این گونه تحلیل‌ها، علاوه بر مهارت محاسب، نیاز به اطلاعاتی دارد که ممکن است در دسترس نباشد. به همین دلیل توصیه شده است که برای بررسی مقاومت یک سازه در برابر خرابی پیشرونده از تحلیل پیشرونده استفاده شود. در این راهکار ابتدا از تحلیل‌های استاتیکی استفاده می‌شود و در صورت

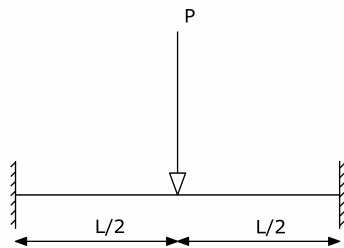
استفاده شود. هرچند دقت پاسخها مناسب است اما دلیل منطقی برای استفاده از درونمایی خطی ارائه نشده است. همچنین اثر دوران تیرها و ستونهای مجاور که باعث نرم تر شدن سازه می شوند وارد مدل سازی نشده است.

در این مقاله به رابطه سازی یک مدل ساده و تقریبی برای محاسبه تغییر مکان نقطه بالای ستون حذف شده در تحلیل خرابی پیشرونده پرداخته شده است. سعی شده است تا مدل پیشنهادی در عین دقت مناسب، ساده نیز باشد به طوری که به کمک محاسبات دستی نیز در زمانی اندک به پاسخ برسد. در این روش سعی شده است که برخی از کاستیهای روشهای دیگران برطرف شود. به عنوان نمونه، برای رسیدن به پاسخ مناسب، برخلاف روش Izzuddin و همکاران [۲۲، ۲۳]، نیازی به حالت های مختلف ساده سازی و استفاده از ضریب سازگاری تغییر شکلها بین مدل ساده شده و سازه اصلی نیست. همچنین برخلاف مدل Lee و همکاران [۲۴]، اثر دوران تیرها و ستونهای مجاور وارد رابطه سازی شده است.

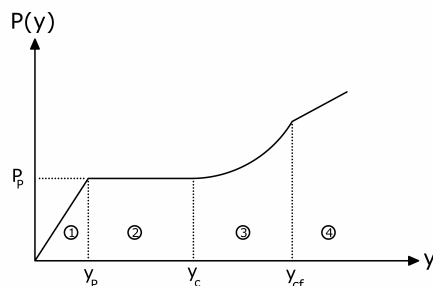
۴- رابطه سازی اولیه

الف- حذف ستون میانی

تیر دو سر گیردار **شکل (۱)** را در نظر بگیرید که یک بار متمرکز در وسط آن قرار دارد. منحنی بار - تغییر مکان این تیر تحت بار وارده مطابق **شکل (۲)** دارای ۴ ناحیه است.



شکل ۱- تیر دو سر گیردار زیر بار متمرکز



شکل ۲- منحنی بار - تغییر مکان تیر دوسر گیردار زیر بار متمرکز

بیشتر از تحلیل دینامیکی غیرخطی محاسبه می کند. همچنین ضریب بار دینامیکی با افزایش تغییر مکان نقطه متصل به ستون حذف شده، کاهش می یابد.

Sucuoglu و همکاران [۱۶] دریافتند که قابهای در برگیرنده ستون حذف شده بیشتر بار ناشی از حذف ستون را جذب می کنند. در نتیجه برای محاسبه خیز، نحوه توزیع مفصلهای خمیری و بررسی DCR اعضا در یک سازه ۳ بعدی، کافی است قابهای دو بعدی شامل ستون حذف شده بررسی شوند.

Kim و Kim [۱۷] با تحلیل قابهای دو بعدی مختلف به دو روش استاتیکی خطی و دینامیکی غیرخطی دریافتند که هرچند تحلیل استاتیکی، تغییر مکانهای کمتری نسبت به تحلیل دینامیکی غیرخطی به دست می دهد اما مقاومت سازه را بسیار کمتر محاسبه می کند.

Khandelwal و همکاران [۱۸] با بررسی قابهای طراحی شده با مهاربند دریافتند که قابهای با مهاربند واگرا نسبت به قابهای با مهاربند همگرا در مقابل خرابی پیشرونده مقاومتر هستند.

Kim و Dawoon [۱۹] به بررسی اثر کابلی (catenary action) در قابهای فولادی پرداختند. با افزایش تعداد دهانه ها، پاسخها با وارد کردن اثر کابلی، تفاوت زیادی با پاسخهای بدون در نظر گرفتن این اثر می کند. افزایش تعداد طبقات اثری بر روی پاسخها ندارد.

Grierson و همکاران [۲۱] به ارائه یک روش ساده برای تحلیل استاتیکی خطی پرداختند. در این روش سختی کاهش یافته بر اثر خرابی پیشرونده با فنر معادل مدل شد.

Izzuddin و همکاران [۲۲، ۲۳] با استفاده از یک مدل ساده شونده به تحلیل استاتیکی غیرخطی ساختمانهای چند طبقه پرداختند. در این پژوهش، چهار حالت ساده سازی قاب، معرفی شده است. از ضریب سازگاری تغییر شکلها برای ارتباط بین تغییر مکان مدل ساده شونده و سازه اصلی استفاده شده است. کاستی این روش در این است که این ضریب سازگاری را نمی توان به سادگی و با دقت مناسب محاسبه نمود.

Lee و همکاران [۲۴] با ساده سازی منحنی بار - تغییر مکان تیر متصل به ستون حذف شده با یک مدل سه خطی به محاسبه دوران تیر پرداختند. پاسخها به طور مستقیم به نسبت طول تیر (1) به ارتفاع مقطع تیر (D) بستگی دارند. رابطه بار - تغییر مکان برای سه نسبت I/D مساوی با ۱۰، ۱۵ و ۲۰ محاسبه شده است و پیشنهاد شده است که برای سایر نسبتها از درونمایی خطی

ناحیه ۲: در این حالت تیر وارد رفتار خمیری شده و مطابق شکل (۲) رابطه بار - تغییر مکان به صورت یک خط افقی است. در این حالت می توان نوشت:

$$P(y) = \frac{8M_p}{L} \quad (۹)$$

این رفتار تا تغییر مکان y_c ادامه می یابد به طوری که [۲۵]:

$$y_c = \max(y_p, r_p) \quad (۱۰)$$

که در آن r_p شعاع اندرکنش خمیری است که برای تیرهای I شکل تقریباً برابر نصف ارتفاع مقطع ($r_p = \frac{D}{2}$) است.

با رسیدن به تغییر مکان y_c رفتار تیر وارد ناحیه ۳ می شود.

ناحیه ۳: در این ناحیه رفتار کابلی فعال می شود. رابطه بار - تغییر مکان به صورت زیر است [۲۵]:

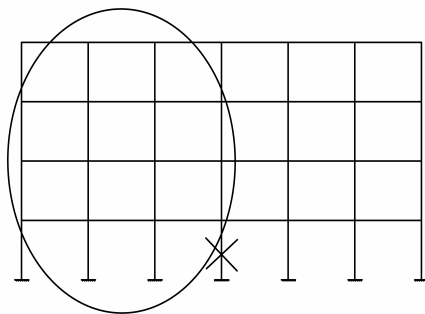
$$P(y) = \frac{8}{L} [M_p + K_e \frac{2(y-y_c)(y+y_c-2r_p)(y-y_p)}{L}] \quad (۱۱)$$

که در آن K_e از رابطه $\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_{hr}} + \frac{L}{EA} + \frac{1}{K_{hl}}$ بدست می آید

که A سطح مقطع تیر است. $\frac{L}{EA}$ سختی محوری تیر متصل به

ستون حذف شده و K_{hr} و K_{hl} به ترتیب سختی قاب های سمت راست و سمت چپ دهانه مورد نظر است. به عنوان مثال شکل (۴) را در نظر بگیرید. برای محاسبه سختی قاب سمت چپ (شکل (۴)، داخل منحنی) در حقیقت باید سختی قاب شکل (۵) را محاسبه نمود.

برای محاسبه سختی این قاب می توان قاب شکل (۶) را در نظر گرفت:



شکل ۴- قاب سمت چپ دهانه با ستون حذف شده

ناحیه ۱: تیر دارای رفتار ارتجاعی است و مطابق شکل (۲) رابطه بار - تغییر مکان بصورت خطی است. در این حالت می توان نوشت:

$$P(y) = Ky \quad (۴)$$

$$K = \frac{192EI}{L^3} \quad (۵)$$

در این رابطه L, I, E, K و y به ترتیب سختی خمشی، ضریب ارتجاعی، لنگر لختی، طول دهانه تیر و تغییر مکان وسط تیر Lee است.

با افزایش بار P ، لنگر خمشی وارد بر تیر افزایش می یابد تا جایی که در بار P_p تیر به حداکثر مقاومت خمشی خود رسیده و مفصل خمیری شکل می گیرد. در این حالت مطابق شکل (۳) و با نوشتن رابطه تعادل داریم:

$$\sum M_o = 0 \rightarrow \frac{P_p}{2} \times \frac{L}{2} = 2M_p \rightarrow P_p = \frac{8M_p}{L} \quad (۶)$$

به طوری که M_p لنگر خمیری تیر است.

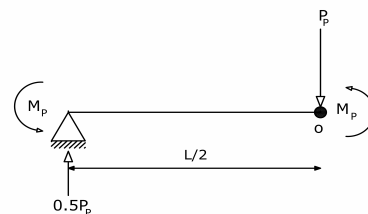
با توجه به رابطه (۱) و شکل (۲) داریم:

$$P(y_p) = Ky_p \quad (۷)$$

که در نهایت تغییر مکان تیر در انتهای این ناحیه از رابطه زیر به دست می آید:

$$y_p = \frac{M_p L^2}{24EI} \quad (۸)$$

لازم به یادآوری است که هرچند لنگر در انتهای رفتار ارتجاعی دارای مقدار $M_y = SF_y$ است که با لنگر خمیری کامل $M_p = ZF_y$ تفاوت دارد، اما به دلیل تفاوت اندک این دو مقدار ($Z \approx 1.2S$)، مانند بسیاری از پژوهش ها [۱۰، ۱۳، ۱۷، ۲۲، ۲۴، ۲۶] از سختی دورانی مفصل های خمیری صرف نظر شده و لنگر در انتهای رفتار ارتجاعی M_p در نظر گرفته شده است.



شکل ۳- تشکیل مفصل خمیری در اثر افزایش بار

که در آن F_p نیروی محوری کششی خمیری مقطع است که با فرض اندرکنش خطی بین لنگر و نیروی محوری از رابطه

$$F_p = \frac{M_p}{r_p} \text{ به دست می‌آید.}$$

ناحیه ۴: پس از تغییر مکان y_{ef} تیر به حداکثر مقاومت محوری خود می‌رسد و رفتار تیر مستقل از ظرفیت خمشی آن است. رابطه بار- تغییر مکان به صورت زیر است [۲۵]:

$$P(y) = \frac{8F_p y}{L} \quad (14)$$

با استفاده از رفتار تیر به صورت منفرد، مطابق آنچه در بالا آمد می‌توان به رابطه‌سازی رفتار تیر در یک قاب پرداخت. قاب شکل (۸) را تحت بارگذاری نشان داده شده در نظر بگیرید.

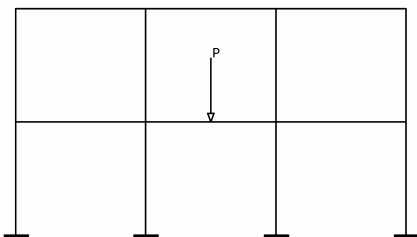
اگر اثر تغییرشکل تیرها و ستون‌های مجاور تیر را در نظر نگیریم (مطابق شکل (۱)) می‌توان برای بررسی رفتار تیر از رابطه‌های ارائه شده بالا استفاده نمود. هرچند باید توجه داشت که ساده کردن قاب به صورت تیر شکل (۱) رفتار سازه را سخت‌تر از رفتار واقعی آن در نظر می‌گیرد. اگر ستون‌های قاب دارای نقطه عطف در وسط باشند (فقط ستون‌های طبقه اول و آخر دارای این شرط نیستند) می‌توان رابطه بار- تغییر مکان تیر در ناحیه اول (رفتار ارتجاعی) را به صورت زیر اصلاح نمود [۲۶]:

$$P(y) = \frac{192EI}{L^3(1+3R_b)} y \quad (15)$$

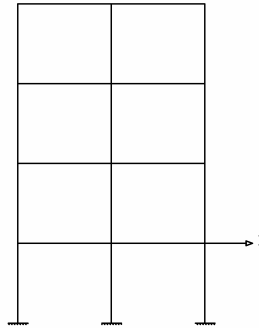
$$y_p = \frac{M_p L^2 (1+3R_b)}{24EI} \quad (16)$$

که در آن R_b برابر است با:

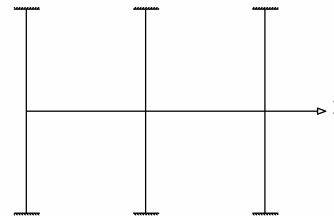
$$R_b = \frac{I}{I + 4I_{ab} + 6I_c} \frac{L}{H} \quad (17)$$



شکل ۸- قاب زیر بار متمرکز

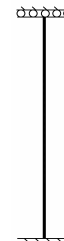


شکل ۵- محاسبه سختی قاب سمت چپ



شکل ۶- مدل ساده تر برای محاسبه سختی

شرایط تکیه گاهی هر یک از ستون‌ها به مانند شکل (۷) است:



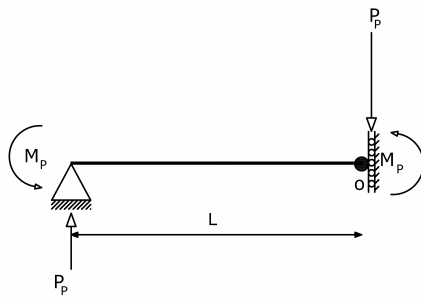
شکل ۷- ساده کردن مدل به چند تیر گیردار

با توجه به اینکه سختی این ستون $\frac{12EI}{L^3}$ است، برای حالت کلی که در هر طرف n ستون وجود داشته باشد، سختی از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$K_{hr,t} = \frac{24nEI}{L^3} \quad (12)$$

این رفتار تا تغییر مکان y_{ef} ادامه می‌یابد به طوری که [۲۵]:

$$y_{ef} = y_c + \sqrt{(y_c - r_p)^2 + \frac{F_p L}{2K_e}} \quad (13)$$



شکل ۱۰- تشکیل مفصل خمیری در اثر افزایش بار

تغییر مکان تا مقدار y_c در رابطه (۱۰) ادامه می‌یابد و با توجه به اینکه برای این تیر رفتار کابلی فعال نمی‌شود y_c تغییر مکان نهایی این تیر است.

با توجه به دوران تکیه‌گاهی، رابطه بار- تغییر مکان در ناحیه رفتار ارتجاعی را می‌توان به صورت زیر اصلاح نمود:

$$P(y) = \frac{24EI}{L^3(2+3R_b)} y \quad (21)$$

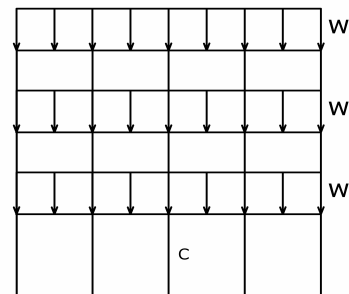
$$y_p = \frac{M_p L^2 (2+3R_b)}{12EI} \quad (22)$$

که در آن R_b برابر است با:

$$R_b = \frac{I}{I + 4I_{ab} + 12I_c \frac{L}{H}} \quad (23)$$

۵- رابطه‌سازی خرابی پیشرونده

قاب شکل (۱۱) را در نظر بگیرید. در ستون C این قاب در اثر بارهای وارده نیروی محوری R ایجاد می‌شود. بنابراین رفتار این قاب مشابه قاب شکل (۱۲) است. حذف ستون C را می‌توان با وارد کردن یک بار R مطابق شکل (۱۳) مدل نمود.



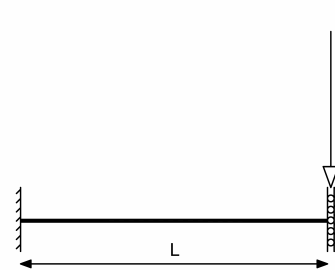
شکل ۱۱- قاب زیر بار گسترده

به طوری که I_{ab} لنگر لختی تیر مجاور و I_c و H به ترتیب لنگر لختی و ارتفاع ستون مجاور هستند.

در این پژوهش فرض بر این است که اتصالات به اندازه‌ای قوی هستند که گسیختگی اتصال باعث واژگونی تیر نمی‌شود. همچنین ماکزیمم جابجایی نقطه میانی تیر نیز به اندازه y_{cf} در نظر گرفته شده است بنابراین فرض شده که تیر وارد ناحیه رفتاری ۴ نمی‌شود.

ب- حذف ستون گوشه

تیر با شرایط تکیه‌گاهی و تحت بار زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۹- تیر با یک تکیه‌گاه گیردار و یک تکیه‌گاه گیردار

غلطکی زیر بار متمرکز

تفاوت منحنی بار- تغییر مکان این تیر با شکل (۲) در این است که این تیر فقط مقاومت خمشی داشته و وارد رفتار کابلی نمی‌شود. با افزایش بار P و تشکیل مفصل‌های خمیری در دو انتهای تیر، با توجه به شکل (۱۰) می‌توان نوشت:

$$\sum M_o = 0 \rightarrow P_p \times L = 2M_p \rightarrow P_p = \frac{2M_p}{L} \quad (18)$$

به طوری که M_p لنگر خمیری تیر است.

با توجه به اینکه سختی این تیر در مرحله ارتجاعی $K = \frac{12EI}{L^3}$ است، تغییر مکان در انتهای رفتار ارتجاعی از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$y_p = \frac{M_p L^2}{6EI} \quad (19)$$

در انتهای رفتار ارتجاعی، تیر وارد رفتار خمیری شده و می‌توان نوشت:

$$P(y) = \frac{2M_p}{L} \quad (20)$$