

حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال بر روی محور استوانه‌ای چرخان*حمید محمدیون^(۱)

چکیده در این مقاله جریان سکون شعاعی نانوسیال، بر روی یک استوانه نامحدود به صورت پایا مورد بررسی قرار گرفته است. جریان آزاد نیز پایا است و قدرت اولیه جریان \bar{k} می‌باشد و محور با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخش است. حل تشابهی معادلات ناویراستوکس و معادله انرژی در این تحقیق ارائه شده است. این معادلات، با استفاده از تبدیلات مناسبی که در این تحقیق معرفی شده است ساده‌سازی شده‌اند. برای همه اعداد رینولدز، با افزایش کسر حجمی، مؤلفه‌های شعاعی و محوری میدان سرعت و نیز مؤلفه محوری تنش برشی کاهش می‌یابد و در مقابل، مؤلفه‌های زاویه‌ای میدان سرعت، مؤلفه زاویه‌ای تنش برشی و عدد ناسلت جریان افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی نانوسیال، جریان سکون، انتقال حرارت، معادلات کاملاً تشابهی، کسر جرمی، سرعت زاویه‌ای ثابت.

Similarity Solution of Axisymmetric Stagnation Point Flow of Nanofluid on Rotating Cylinder

H. Mohammadiun

Abstract In this paper the steady state radial stagnation point flow impinging on an infinite cylinder has been investigated. The impinging free stream is steady with a constant strain rate \bar{k} and axis is rotating with constant angular velocity. Similarity solution of the Navier-Stokes and energy equations is presented in this research. A reduced form of these equations are obtained by using appropriate transformations introduced in this study. For all Reynolds numbers, as the particle fraction increases, fluid velocity component in radial and axial directions and axial component of shear-stresses decrease and in the contrary the angular component of shear stress and velocity field and Nusselt number increase.

Key Words Nanofluid, Stagnation point flow, Heat transfer, Similarity solution, Particle fraction, Constant angular velocity

* تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۱/۱۱ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۱۱/۱۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.62224

(۱) استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، ایران. hmohammadiun@iau-shahrood.ac.ir

مقدمه

نانوسیال، نامی است که اولین بار توسط چویی [1]، به کار گرفته شد و به سیالاتی گفته می شود که حاوی نانوذرات جامد معلق با اندازه کوچک تر از ۱۰۰ nm و با کسر حجمی کمتر از ۵ درصد باشند. نانوسیال می تواند باعث بهبود انتقال حرارت در مقایسه با مایعات خالص شود. از نانوسیالات می توان برای بهبود سیستم مدیریت حرارتی در کاربردهای مهندسی، از جمله انتقال حرارت، میکرومکانیک، سیستم های HVAC و تجهیزات سرمایشی استفاده کرد. در سال های اخیر، محققان به مطالعه تجربی و عددی انتقال حرارت جابه جایی نانوسیالات در هندسه های مختلف پرداخته اند (میگا و همکاران [2]، هریس و همکاران [3]، وانگ و ایسز و همکاران [4]، سانترا و همکاران [5] و نوین و همکاران [6]).

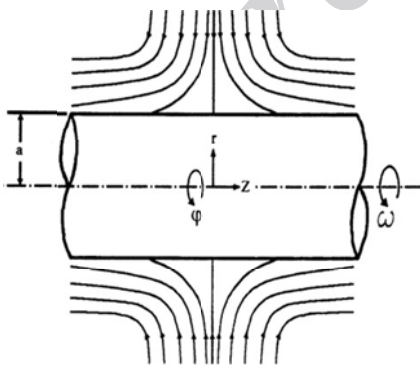
نیلد و کوزنتسو، انتقال حرارت جابه جایی آزاد در لایه مرزی جریان آرام یک نانوسیال را به صورت تحلیلی بررسی کردند [7]. آنها نشان داده اند که مدل به کاررفته برای نانوسیال با تأثیرات حرکت براونی تلفیق می شود. در پژوهش دیگری، نیلدو کوزنتسو [8]، ناپایداری حرارتی در یک لایه مرزی متخلخل اشباع شده با یک نانوسیال را بررسی کردند. اخیراً، خان و پاپ، جریان لایه مرزی یک نانوسیال را که از روی یک سطح گسترش یافته عبور کرده است، مورد مطالعه قرار داده اند [9]. به طور کلی یافتن حل های دقیق معادلات ناویراستوکس دارای پیچیدگی های ریاضی بسیاری است. این امر ناشی از غیرخطی بودن این معادلات است، به طوری که اصل برهم نهی که در جریان پتانسیل کارساز است، دیگر قابل اعمال نیست؛ با این حال در مواردی خاص، می توان حل های دقیق برای معادلات ناویراستوکس یافت؛ ولی اغلب این حل ها مربوط به حالاتی است که جمالات جابه جایی که جمالاتی غیرخطی هستند، به طور طبیعی حذف شوند.

اولین حل دقیق مسئله جریان سکون توسط هایمنز [10] ارائه گردید. در این حل، جریان سکون دوبعدی در مقابل صفحه تخت بررسی شد. هایمنز جریان روی صفحه تخت ساکن را، به صورت آرام، غیر قابل تراکم و پایدار فرض کرد. وی همچنین با اختیار متغیری مناسب و نیز تبدیل مؤلفه های سرعت به یک تابع تشابهی، به یک معادله دیفرانسیل معمولی دست یافت و با حل آن، میدان سرعت و در نتیجه میدان فشار را در نزدیکی صفحه تخت به دست آورد.

پس از هایمنز، هومان [11] یک حل دقیق برای حالت سه بعدی معادلات ناویراستوکس از جریان سکون متقارن محوری در مقابل یک صفحه تخت به دست آورد. او نیز با تعریف تغییر متغیری مناسب و تبدیل مؤلفه های سرعت به یک تابع تشابهی، یک معادله دیفرانسیل معمولی برای تابع تشابهی به دست آورد و حل آن را به صورت یک سری توانی ارائه داد. هوارث [12] و دیوی [13] جریان سکون سه بعدی در مقابل یک صفحه تخت را برای حالت های غیر متقارن بررسی کردند و نتایج خود را منتشر نمودند. اولین حل دقیق برای جریان سکون متقارن محوری بر روی یک استوانه نامحدود، توسط وانگ [14] ارائه شد. در این حل فرض شده است که استوانه ساکن است و هیچ گونه حرکت چرخشی یا محوری ندارد، استوانه نیز بدون عبور جریان از سطح خود و فاقد دمش یا مکش سطحی می باشد. ضمناً به دلیل تقارن جریان آزاد نسبت به محور استوانه و دائمی بودن جریان، کلیه مشتقات نسبت به ϕ (جهت زاویه ای) و t (زمان)، صفر است و معادلات ناویراستوکس در مختصات استوانه ای به شکل ساده تری تبدیل می شوند. گورلا [15-19] در مجموعه ای از مقالات، جریان سکون متقارن محوری اطراف استوانه را مورد بررسی قرار داد، که جریان به صورت آرام در حالت های دائم و

اکسید آلومینیوم پرداخته‌اند که در این تحقیق از آشفته‌ساز نوار مارپیچ در رژیم جریان مغشوش استفاده شده است. فریدون مهر و رحیمی [33] به حل مسئله تولید آنتروپی در جریان آرام نانوسیال هیدرومغناطیسی بر روی صفحه تخت پرداختند. در این تحقیق فرض شده است که سطح، تحت تأثیر مکش و دمش سطحی یکنواخت قرار دارد. منصور و همکاران [34] با استفاده از روش حل تشابهی به بررسی تولید آنتروپی در لایه مرزی جریان هیدرومغناطیسی سیال غیرنیوتنی بر روی صفحه تخت، با استفاده از مدل کیسون پرداختند.

در تحقیق حاضر، حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال و انتقال حرارت آن بر روی استوانه همراه با حرکت چرخشی یکنواخت، برای اولین بار ارائه شده است. همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود جریان در مختصات استوانه‌ای (r, φ, z) با اجزای سرعت متناظر (u, v, w) در نظر گرفته شده است. استوانه دارای طول نامحدود و شعاع a است و این استوانه دارای حرکت چرخشی با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌باشد. مسئله در شرایطی بررسی می‌شود که دمای دیواره استوانه ثابت است یا دیواره استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابتی قرار دارد.



شکل ۱ شماتیک جریان سکون شعاعی بر روی استوانه همراه با حرکت چرخشی

گذرا در نظر گرفته شده بود. در این مقالات اثر حرکت محوری یکنواخت و نیز حرکت محوری هارمونیک استوانه مورد بررسی قرار گرفته است. کانینگ و همکارانش [20]، اثر چرخش استوانه با سرعت دورانی ثابت را برای جریان سکون بر روی استوانه مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق همچنین اثر مکش و دمش یکنواخت جریان، روی سطح استوانه در نظر گرفته شده است. به دلیل چرخش استوانه، جریان کاملاً سه‌بعدی است و سرعت در جهت φ نیز وجود دارد. تاخار و همکاران [21]، اثر غیردائمی بودن جریان سکون شعاعی متقارن محوری بر روی استوانه را همراه با اثر حرکت محوری استوانه با سرعت متغیر مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مقاله، تابع تغییرات زمانی جریان سکون آزاد و همچنین تابع تغییرات زمانی سرعت محوری استوانه برای به دست آوردن حل کاملاً تشابهی، یکسان و به صورت عکس تابع خطی نسبت به زمان در نظر گرفته شده است. صالح و رحیمی [22] و رحیمی و صالح [23-24] حل‌های دقیقی برای جریان سکون متقارن محوری بر روی استوانه نامحدود و نیز انتقال حرارت آن، برای حالت‌هایی که استوانه دارای حرکت محوری و چرخشی تابع زمان می‌باشد به دست آورده‌اند. همچنین شکرگزار عباسی و همکاران [25-28] حل‌های دقیقی برای جریان سکون سه‌بعدی و انتقال حرارت سیال لزج تراکم‌ناپذیر در حالت گذار، در برخورد با صفحه تخت ارائه داده‌اند. محمدیون و همکاران نیز [29-31] در مجموعه‌ای از مقالات، حل‌های کاملاً تشابهی به منظور تحلیل جریان سکون متقارن محوری و انتقال آن بر روی محور استوانه‌ای با در نظر گرفتن اثرات تراکم‌پذیری جریان در حالت پایا ارائه داده‌اند. همچنین محمدیون و همکاران [32] به بررسی آزمایشگاهی بهبود انتقال حرارت در مبدل حرارت دولوله‌ای در حضور نانوسیال اتیلن گلیکول-

در رابطه بالا اندیس های n, f, p به ترتیب معرف نانوسیال، سیال پایه و ذرات اکسید آلومینیوم می باشد و ϕ_v معرف کسر حجمی ذرات معلق در سیال است.

لزجت دینامیکی نانوسیال

لزجت دینامیکی نانوسیال را می توان با روابط موجود، برای مخلوط های دوفازی برآورد کرد. یکی از جامع ترین روابط برای محاسبه لزجت سینماتیکی نانوسیالات رابطه ای است که توسط میسون کرچونیه به صورت زیر ارائه شده است [35]:

$$\frac{\mu_n}{\mu} = \frac{1}{1 - 34.87 \left(\frac{d_p}{d_f}\right)^{-0.3} \phi_v^{1.03}} \quad (2)$$

در رابطه بالا d_f ، قطر معادل یک مولکول سیال پایه است، که با استفاده از رابطه زیر به دست می آید:

$$d_f = 0.1 \left(\frac{6M}{N\pi\rho_{f0}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

که در آن M وزن مولکولی سیال پایه، N عدد آووگادرو و ρ_{f0} چگالی سیال پایه محاسبه شده در دمای $T_0 = 293k$ است. در تحقیق حاضر، فرمول کرچونیه برای محاسبه لزجت سیال و بازنویسی معادلات ناویر-استوکس حاکم بر نانوسیال و نیز معادله انرژی استفاده شده است.

ضریب هدایت حرارتی نانوسیال

رابطه زیر برای محاسبه ضریب هدایت حرارتی نانوسیال پیشنهاد شده است [35]:

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = 1 + 4.4 \text{Re}_p^{0.4} \text{Pr}_{bf}^{0.66} \left(\frac{T}{T_{ff}}\right)^{10} \left(\frac{k_p}{k_f}\right)^{0.03} \phi_v^{0.66} \quad (4)$$

از موارد زیر می توان به عنوان برخی از کاربردهای حالت های جریان سکون بر روی استوانه نام برد: تحلیل حرکت ماشین های ساتریفیوژ، پروسه های تولید در کارخانجات صنایع شیمیایی، پتروشیمی و سیمان، فرایندهای سرمایش و گرمایش، فازهای شتاب گیری موتورهای راکت، مراحل راه اندازی و ازکاراندازی ماشین های صنعتی، مخلوط کننده های صنعتی، الک های صنعتی و سایر ماشین های نوسان کننده صنعتی.

خواص نانوسیال

نانوذرات اکسید آلومینیوم ($\gamma\text{Al}_2\text{O}_3$) که در پژوهش حاضر به کار رفته اند ویژگی های زیر را دارا می باشد: چگالی $\rho_m = 3600 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ ، قطر میانگین ذره 44 nm سایر خواص نیز در جدول (۱) فهرست شده است.

جدول ۱ خواص مربوط به سیال پایه و نانوسیال

پارامتر	مقدار
ضریب هدایت حرارتی سیال پایه، k_f	0.6316 [W/m-K]
ضریب هدایت حرارتی نانو ذره، k_p	40 [W/m-K]
ظرفیت گرمایی ویژه سیال پایه، $C_{p,f}$	4.181 [kJ/kg-K]
ظرفیت گرمایی ویژه نانوذرات، $C_{p,p}$	0.765 [kJ/kg-K]
چگالی سیال پایه، ρ_f	987.6 [kg/m ³]
چگالی نانو ذرات، ρ_p	3600 [kg/m ³]
لزجت دینامیکی سیال پایه، μ_f	0.000538 [kg/m-s]
قطر نانوذرات، d_p	44 nm
قطر مولکول سیال پایه، d_f	0.384 nm

چگالی نانوسیال

در این تحقیق فرض شده است که چگالی نانوذرات اکسید آلومینیوم در کل دامنه دمایی مورد نظر ثابت باشد و از رابطه زیر برای محاسبه چگالی نانوسیال استفاده شده است:

$$\rho_n = (1 - \phi_v)\rho_f + \phi_v\rho_p \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = v_n \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (9)$$

در رابطه بالا Re_p و Pr_{bf} به صورت زیر معرفی می شوند:

$$Re_p = \frac{2\rho_{bf} k_b T}{\pi \mu_{bf}^2 d_p} \quad \& \quad Pr_{bf} = \frac{\mu_{bf} (c_p)_{bf}}{k_{bf}} \quad (5)$$

معادله انرژی:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk_{eff} \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_{eff} \frac{\partial T}{\partial z}) = (\rho c_p)_n \left[u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (10)$$

شرایط مرزی معادلات بالا عبارتند از:

$$r = a: \quad u = 0, \quad v = a\omega, \quad w = 0 \quad (11)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad u = -\bar{k} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\bar{k}, \quad (12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (rv) = 0, \quad w = 2\bar{k}z$$

رابطه (۱۱) همان شرط عدم لغزش سیال لزج می باشد. روابط (۱۲) براساس حل غیرلزج به دست آمده اند، به این شکل که اولی بیانگر این موضوع است که شیب تغییرات سرعت u در دوردست با شیب آن در حل غیرلزج یکسان است و عبارت سوم نیز بیانگر این موضوع است که اگر به حد کافی از دیواره استوانه دور شویم، آن گاه سرعت w سیال لزج همان سرعت w سیال غیرلزج می شود.

شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادله انرژی به صورت زیر بیان می شود:

الف) حالت دیواره با دمای معلوم

$$r = a: \quad T = T_w \quad (13)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad T = T_\infty$$

معادلات حاکم

همان طور که در شکل (۱) نشان داده شده است جریان در مختصات استوانه ای (r, φ, z) با اجزای سرعت متناظر (u, v, w) در نظر گرفته شده است. جریان تراکم ناپذیر است و در حالت پایا بررسی می شود. با فرض تقارن محوری معادلات حاکم در مختصات استوانه ای به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

معادله اندازه حرکت راستای r :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial P}{\partial r} + v_n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

معادله اندازه حرکت راستای z :

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial P}{\partial z} + v_n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

معادله اندازه حرکت راستای φ :

$$(\eta + 1)f''' + f'' + \text{Re}_n [1 - (f')^2 + f f''] = 0$$

$$(\eta + 1)G'' + \text{Re}_n f G' = 0 \quad (17)$$

در رابطه بالا عدد رینولدز نانوسیال به صورت زیر معرفی می شود:

$$\text{Re}_n = \beta \frac{\bar{k} a^2}{2\nu_f} \quad (18)$$

$$\beta = [1 - 34.87 \left(\frac{d_p}{d_f}\right)^{-0.3} \phi_v^{1.03}] (1 - \phi_v + \phi_v \frac{\rho_p}{\rho_f}) \quad (19)$$

با استفاده از روابط (۱۱ و ۱۲)، شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادلات (۱۷) به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad G = \frac{a^2 \omega}{2\nu \text{Re}} \\ \eta \rightarrow \infty: \quad f' = 1, \quad G = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

به منظور انتقال معادله انرژی از متغیر بی بعد $\theta(\eta)$ در دو حالت دیواره با دمای ثابت و شار حرارتی ثابت به صورت زیر استفاده می شود:

الف) حالت دیواره با دمای معلوم

در این حالت متغیر جدید θ که بیانگر دمای بی بعد است، به صورت زیر معرفی می شود:

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (21)$$

در این حالت، شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۱۵) به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad \theta = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: \quad \theta = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

در رابطه فوق T_w بیانگر دمای دیواره می باشد که دارای مقدار ثابت است. همچنین T_∞ بیانگر دمای جریان آزاد یا همان دمای سیال دور از دیواره می باشد.

ب) حالت دیواره با شار حرارتی معلوم

$$r = a: \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_w}{k} \quad (14)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad T = T_\infty$$

در روابط فوق k ضریب هدایت حرارتی سیال و q_w شار حرارتی معلوم دیواره استوانه می باشد که مقدار آن ثابت است. همان طور که از روابط فوق مشهود است، شرط مرزی دوم در هر دو حالت یکسان است و فرض شده است که T_∞ ثابت باشد. با استفاده از متغیرهای تشابهی مناسب می توان تعداد متغیرهای موجود در معادلات حاکم را کاهش داد. با الگو برداری از حل های غیرلزج ارائه شده در رابطه (۱۲) و با ضرب این روابط در توابع تبدیل مناسب و فرض جریان پایا، روابط زیر برای کاستن معادلات ناویراستوکس به معادلات تشابهی بی بعد ارائه شده است [23]:

$$\begin{aligned} u = -\bar{k} \frac{a}{\sqrt{\eta+1}} f(\eta), \quad v = \bar{k} \frac{a}{\sqrt{\eta+1}} G(\eta), \\ w = 2\bar{k} f'(\eta) z, \quad P = \rho_n \bar{k}^2 a^2 p \end{aligned} \quad (15)$$

که در روابط بالا () معرف مشتق نسبت به متغیر تشابهی η می باشد که به صورت زیر معرفی می شود:

$$\eta = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1 \quad (16)$$

روابط (۱۵)، معادله پیوستگی را خودبه خود ارضا می کند و پس از جایگزینی این روابط در معادلات اندازه حرکت راستاهای z ، ϕ و r ، یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی برای تعیین f و G به صورت زیر به دست می آید:

$$h = \frac{-k_{nf} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a}}{T_w - T_\infty} = \frac{-k_{nf} \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \Big|_{\eta=0}}{T_w - T_\infty} \quad (27)$$

$$= \frac{-k_{nf} \Big|_{T=T_w} (T_w - T_\infty) \theta'(0) \frac{2}{a}}{T_w - T_\infty}$$

از رابطه بالا نتیجه زیر به دست می آید:

$$ha = -2k_{nf} \Big|_{T=T_w} \theta'(0) = -2k_{bf} [1 + 4.4 \text{Re}_p]^{0.4} \text{Pr}_{bf}^{0.66} \left(\frac{T_w}{T_{fr}}\right)^{10} \left(\frac{k_p}{k_f}\right)^{0.03} \phi^{0.66} \theta'(0) \quad (28)$$

معادلات دیفرانسیل (۱۷ و ۲۳ و ۲۶) به همراه شرایط مرزی ارائه شده، باروش تفاضل محدود و با استفاده از الگوریتم ماتریس سه قطری (TDMA) به طور هم زمان حل می شود. نتایج حاصل از حل این معادلات در بخش های بعد ارائه شده است.

محاسبه تنش برشی در سطح

برای محاسبه تنش برشی مؤثر بر سطح استوانه رابطه زیر مورد استفاده قرار گرفته است:

$$\sigma = \sigma_\phi \hat{e}_\phi + \sigma_z \hat{e}_z = \mu_n \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \hat{e}_\phi + \frac{\partial w}{\partial r} \hat{e}_z \right]_{r=a} \quad (29)$$

به منظور محاسبه تنش برشی، ابتدا با مشتق گیری زنجیره ای، جمله $\frac{\partial w}{\partial r}$ به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = (2\bar{k} f'' z) \frac{2r}{a^2} \quad (30)$$

باتوجه به این که در $r=a$ ، داریم $\eta=0$ رابطه مربوط به محاسبه تنش برشی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\sigma = \mu_n [2\bar{k} f''(0) z] \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{\sigma a}{4\mu_n \bar{k} z} = f''(0) \quad (31)$$

با فرض $\Gamma = 4.4 \left(\frac{2\rho_{bf} K_b}{\pi \mu_{bf}^2 d_p} \right)^{0.4} \frac{1}{T_{fr}^{10}} \left(\frac{k_p}{k_f} \right)^{0.03}$ معادله انرژی پس از ساده سازی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left\{ 1 + \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} [T_\infty + (T_w - T_\infty) \theta]^{10.4} \right\} [(\eta + 1) \theta'' + \theta'] + 10.4 [T_\infty + (T_w - T_\infty) \theta]^{9.4} (T_w - T_\infty) \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} (\eta + 1) (\theta')^2 \quad (23)$$

$$+ \left\{ 1 - \phi_v + \phi_v \left[\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f} \right] \right\} \text{Re}_{bf} \text{Pr}_{bf} f \theta' = 0$$

ب) حالت دیواره با شار حرارتی معلوم

در شرایطی که دیواره استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابت q_w قرار دارد دمای بی بعد $\theta(\eta)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{\frac{aq_w}{2k_{bf}}} \quad (24)$$

در این حالت، شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۱۳) به صورت زیر تبدیل می شوند:

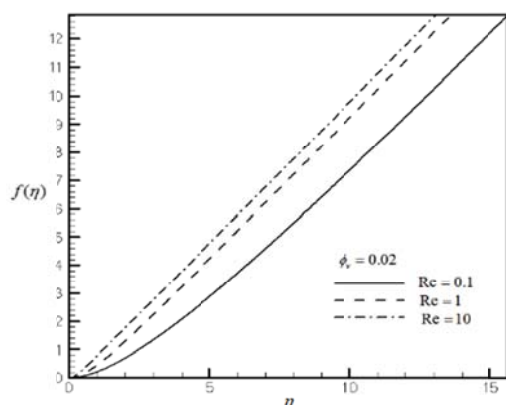
$$\eta = 0: \quad -\frac{k_{nf}}{k_{bf}} \theta'(0) = 1 \quad (25)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \theta = 0$$

با استفاده از رابطه (۲۴) و پس از ساده سازی، معادله انرژی به صورت زیر تبدیل می شود:

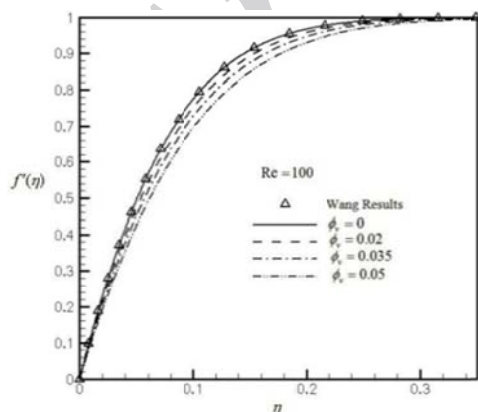
$$\left\{ 1 + \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} \left[T_\infty + \frac{aq_w}{2k_{bf}} \theta \right]^{10.4} \right\} [(\eta + 1) \theta'' + \theta'] + 10.4 \left[T_\infty + \frac{aq_w}{2k_{bf}} \theta \right]^{9.4} \frac{aq_w}{2k_{bf}} \Gamma \phi_v^{0.66} \text{Pr}_{bf}^{0.66} (\eta + 1) (\theta')^2 + \left\{ 1 - \phi_v + \phi_v \left[\frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f} \right] \right\} \text{Re}_{bf} \text{Pr}_{bf} f \theta' = 0 \quad (26)$$

ضریب انتقال حرارت جابه جایی به صورت زیر محاسبه می شود:



شکل ۲ منحنی تغییرات $f(\eta)$ برحسب η در $\phi_v = 0.02$ به ازای اعداد رینولدز مختلف

اثر تغییر کسر حجمی نانوذرات بر تابع $f'(\eta)$ در $Re = 100$ در شکل (۳) نمایش داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود نتایج حل حاضر در $\phi_v = 0$ (برای سیال پایه) بر نتایج حل Wang مرجع [14] منطبق می باشد. با افزایش کسر حجمی نانوذرات، عمق نفوذ مؤلفه محوری میدان سرعت سیال کاهش می یابد. به عبارت دیگر تزریق نانوذرات در سیال پایه، باعث کاهش اینرسی حرکتی سیال می شود و با کاهش اندازه حرکت محوری سیال، سرعت محوری آن کاهش می یابد. نتایج نشان می دهند، بیشترین مؤلفه محوری، مربوط به سیال پایه می باشد.



شکل ۳ منحنی تغییرات $f'(\eta)$ برحسب η در $Re = 100$

همچنین برای محاسبه σ_ϕ داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = -\frac{2\bar{k}a^2}{r^2} \frac{G(\eta)}{c(\eta)} + 2\bar{k} \left[G'(\eta) - \frac{G(\eta)c'(\eta)}{c(\eta)} \right] \quad (32)$$

از آنجاکه در سطح استوانه $\eta = 0$ می باشد، σ_ϕ به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_\phi = 2\bar{k}\mu_n \left[-\frac{G(0)}{c(0)} + G'(0) - \frac{G(0)c'(0)}{c(0)} \right] \rightarrow \frac{\sigma_\phi}{2\bar{k}\mu_n} = -\frac{G(0)}{c(0)} + G'(0) - \frac{G(0)c'(0)}{c(0)} \quad (33)$$

باتوجه به این که $\frac{G(0)}{c(0)} = \frac{a^2 \omega}{2\nu Re}$ ، رابطه بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{\sigma_\phi}{2\bar{k}\mu_n \omega} = -[1 + c'(0)] + \frac{\bar{k} G'(0)}{\omega} \quad (34)$$

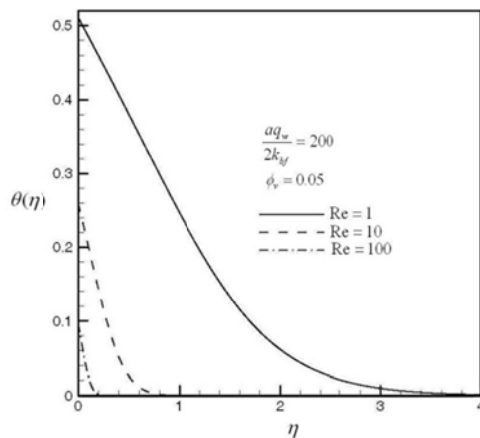
نتایج

در این قسمت نتایج حاصل از حل معادلات دیفرانسیل (۱۷ و ۲۳ و ۲۶) به همراه تنش برشی در سطح و عدد ناسلت در محدوده اعداد رینولدز مختلف و به ازای کسر حجمی های انتخابی ارائه شده است.

در شکل (۲) نمونه ای از منحنی های $f(\eta)$ برحسب η برای کسر حجمی $\phi_v = 0.02$ و اعداد رینولدز انتخابی ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش عدد رینولدز عمق نفوذ مؤلفه شعاعی میدان سرعت سیال افزایش می یابد؛ زیرا با افزایش عدد رینولدز اینرسی حرکتی شعاعی سیال بیشتر می شود، به عبارت دیگر با نفوذ هر چه بیشتر ممتوم شعاعی سیال، مؤلفه شعاعی میدان جریان نیز افزایش می یابد.

نانوذرات ترسیم شده‌اند. باتوجه به منحنی‌های ارائه شده، می‌توان نتیجه گرفت که افزایش کسر حجمی نانوذرات، تنش برشی در سطح را کاهش می‌دهد، زیرا افزایش کسر حجمی نانوذرات باعث کاهش شیب نیم‌رخ‌های توزیع سرعت می‌شود و به عبارت دیگر گرادیان سرعت در سطح کاهش می‌یابد و این موضوع باعث کاهش تنش برشی در سطح استوانه می‌شود.

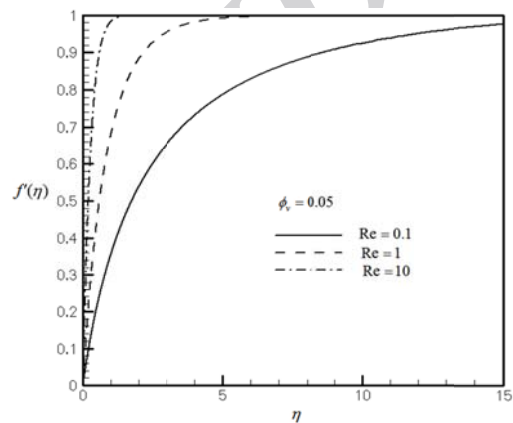
در شکل (۶) نمونه‌ای از منحنی‌های توزیع دمای بی‌بعد θ برحسب η نمایش داده شده است. این منحنی‌ها در شرایطی ترسیم شده‌اند که دیواره دیواره تحت تأثیر شار حرارتی یکنواخت قرار دارد. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش عدد رینولدز جریان اندازه حرکت سیال افزایش می‌یابد و با افزایش عمق نفوذ ممتوم سیال نه تنها ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش می‌یابد بلکه دمای بی‌بعد در سطح نیز کمتر می‌شود.



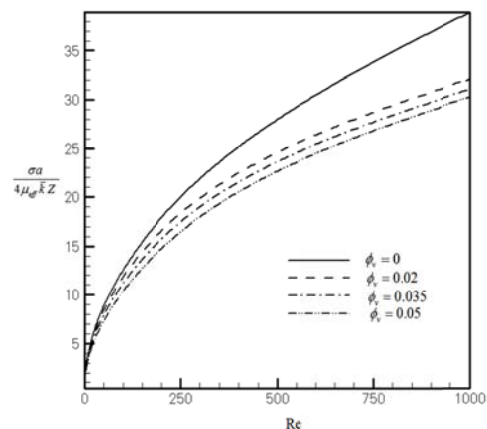
شکل ۶ اثر کسر حجمی نانوذرات بر منحنی‌های دمای بی‌بعد θ در شرایط شار حرارتی ثابت دیواره در $Re=10$

در شکل (۷) تأثیر کسر حجمی ϕ_v بر منحنی‌های دمای بی‌بعد نشان داده شده است. این نتایج در دمای دیواره $T_w=450K$ ترسیم شده‌اند. همان‌طور که انتظار می‌رود، برخلاف منحنی‌های دمای بی‌بعد شار ثابت در این حالت تمام منحنی‌ها از نقطه $\theta=1$ شروع می‌شوند و با افزایش کسر حجمی نانوذرات شیب منحنی‌ها کاهش می‌یابد و این به معنی افزایش ضخامت

در شکل (۸) نمونه‌ای از منحنی‌های $f'(\eta)$ برحسب η برای $\phi_v = 0.05$ و اعداد رینولدز انتخابی نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش عدد رینولدز، ضخامت لایه مرزی سرعت کاهش می‌یابد که منجر به افزایش شیب نیم‌رخ‌های توزیع سرعت در $\eta=0$ می‌شود و بنابراین گرادیان سرعت در سطح استوانه افزایش می‌یابد. می‌توان نشان داد برای سایر مقادیر کسر حجمی نانوذرات نیز نتایج مشابهی استخراج می‌شود.



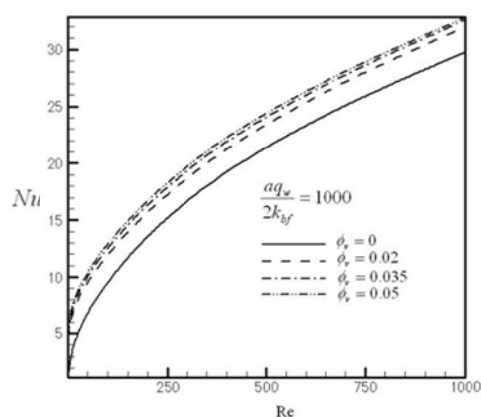
شکل ۸ منحنی تغییرات $f'(\eta)$ برحسب η در $\phi_v = 0.05$ به‌ازای اعداد رینولدز مختلف



شکل ۹ منحنی تغییرات تنش برشی در سطح استوانه برحسب عدد رینولدز، به‌ازای کسر حجمی‌های مختلف نانوذرات

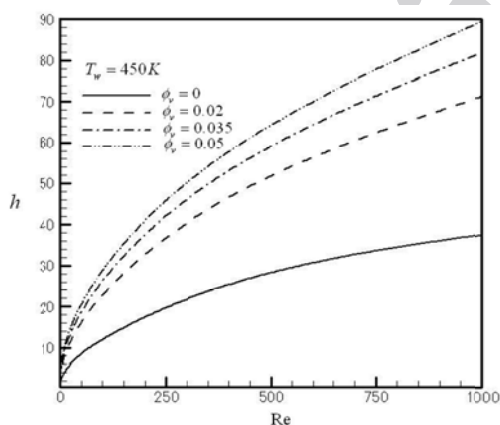
در شکل (۵) مؤلفه محوری تنش برشی دیواره، برحسب عدد رینولدز در کسر حجمی‌های مختلف

به‌ازای کسر حجمی‌های متفاوت ترسیم شده است. با افزایش کسر حجمی‌های نانوذرات که منجر به افزایش ضریب هدایت حرارتی سیال می‌شود ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، افزایش می‌یابد و همان‌طور که ملاحظه می‌شود کمترین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی مربوط به سیال پایه ($\phi_v = 0$) می‌باشد.



شکل ۸ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر روی عدد ناسلت در

$$\frac{aq_w}{2k_{bf}} = 1000 \text{ شرایط}$$

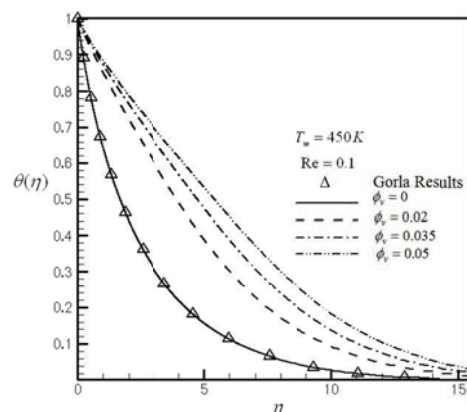


شکل ۹ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر ضریب انتقال حرارت

$$T_w = 450 \text{ k دردمای دیواره}$$

اثر کسر حجمی نانوذرات بر تابع $G(\eta) = \frac{2vRe}{a^2\omega}$ برحسب η به‌ازای اعداد رینولدز مختلف در شکل‌های (۱۰-۱۲) نمایش داده شده است. با افزایش کسر حجمی نانوذرات، به‌ازای هر مقدار عدد رینولدز

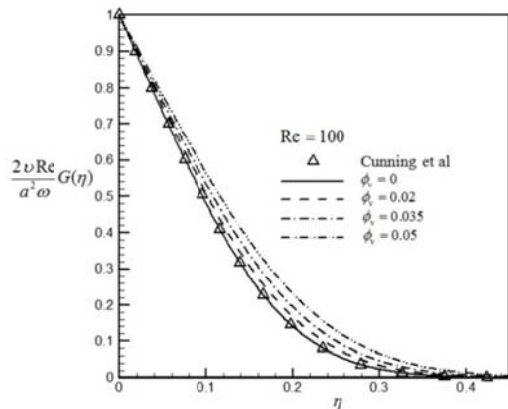
لایه مرزی حرارتی می‌باشد. هر چند افزایش نانوذرات به سیال، منجر به کاهش گرادیان دمای بی‌بعد در سطح استوانه می‌شود، اما شدت افزایش ضریب هدایت حرارتی آن‌قدر قابل‌توجه است که افزایش نرخ انتقال حرارت را به‌همراه دارد.



شکل ۱۰ تأثیر کسر حجمی ϕ_v بر منحنی‌های دمای بی‌بعد در $Re = 0.1$ و $T_w = 450K$

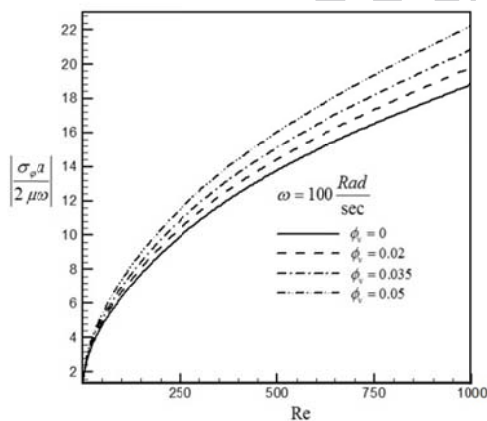
تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر روی عدد ناسلت در شرایطی که دیواره استوانه تحت تأثیر شار حرارتی ثابت قرار دارد در منحنی‌های شکل (۸) نمایش داده شده است. در این منحنی‌ها عدد ناسلت برحسب عدد رینولدز به‌ازای کسر حجمی‌های مختلف ترسیم شده است. نتیجه قابل‌توجه این است که با افزایش کسر حجمی نانوذرات عمق نفوذ حرارت افزایش می‌یابد و ضخامت لایه مرزی حرارتی بیشتر می‌شود. همان‌طور که این منحنی‌ها نشان می‌دهند افزایش عدد رینولدز جریان باعث افزایش عدد ناسلت می‌شود که این به‌معنی بهبود انتقال حرارت است. همچنین افزایش کسر حجمی نانوذرات تأثیر محسوسی بر افزایش عدد ناسلت جریان دارد و بهبود انتقال حرارت را به‌همراه می‌آورد.

در شکل (۹) ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) برحسب عدد رینولدز در دمای دیواره $T_w = 450 \text{ k}$



شکل ۱۲ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت در $Re=100$

شکل (۱۳) به منظور بررسی اثر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفه زاویه‌ای تنش برشی سیال در سطح استوانه ترسیم شده است. نتایج به‌ازای $\omega = 100 \frac{rad}{sec}$ ارائه شده است و نتیجه جالب توجه این است که با افزایش کسر حجمی نانوذرات، مؤلفه زاویه‌ای تنش برشی در سطح استوانه افزایش می‌یابد و کمترین مؤلفه زاویه‌ای تنش برشی مربوط به سیال پایه می‌باشد.

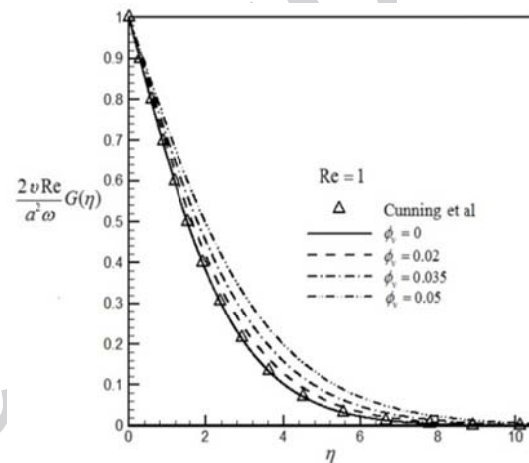


شکل ۱۳ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفه زاویه‌ای تنش برشی

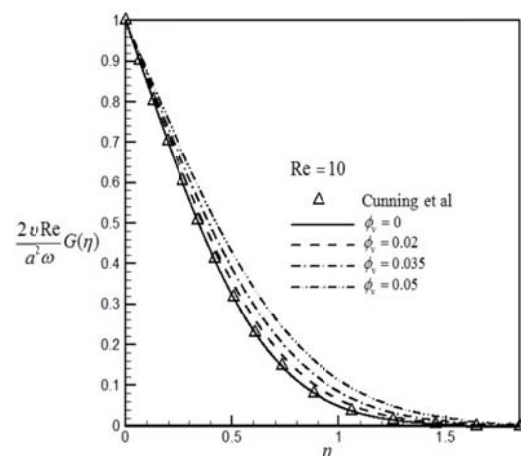
نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر حل تشابهی جریان سکون متقارن محوری نانوسیال بر روی استوانه چرخان و انتقال

انتخابی، مقدار تابع $\frac{2\nu Re}{a^2\omega} G(\eta)$ افزایش می‌یابد و افزایش مقدار این تابع به معنی افزایش مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت سیال است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در تمام اعداد رینولدز، کمترین مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت سیال متعلق به سیال پایه است. در تمام موارد نتایج حاصل، به‌ازای $\phi_v = 0$ (برای سیال پایه) بر نتایج Cuning مرجع [19] منطبق است که این انطباق نتایج صحت روش حل را تأیید می‌کند.



شکل ۱۰ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت در $Re=1$



شکل ۱۱ تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت در $Re=10$

عدد رینولدز سیال پایه	Re	حرارت آن، در شرایطی که استوانه با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد، ارائه شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با استفاده از متغیر تشابهی و توابع تبدیل مناسبی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و حل شده‌اند. همه این نتایج در محدوده اعداد رینولدز ۰/۱ تا ۱۰۰۰ و به‌ازای مقادیر مختلف کسر حجمی نانوذرات ($\phi_v = 0.02, 0.035, 0.05$) ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد افزایش کسر حجمی نانوذرات، باعث کاهش مؤلفه شعاعی میدان سرعت و مؤلفه محوری تنش برشی مؤثر بر دیواره استوانه می‌شود درحالی‌که ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، عدد ناسلت، مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت و مؤلفه زاویه‌ای تنش برشی در سطح استوانه افزایش می‌یابد.
قدرت چشمه جریان	\bar{k}	
شعاع استوانه	a	
مؤلفه‌های مختصات استوانه‌ای	r, ϕ, z	
لزجت سینماتیکی سیال پایه	ν_f	
مؤلفه شعاعی میدان سرعت	u	
مؤلفه محوری میدان سرعت	w	
مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت	v	
تنش برشی	σ	
فشار	p	
فشار بی‌بعد	P	
تابع بی‌بعد مرتبط با مؤلفه شعاعی میدان سرعت	f	
تابع بی‌بعد مرتبط با مؤلفه زاویه‌ای میدان سرعت	G	
لزجت سینماتیکی نانوسیال	ν_n	
ضریب هدایت حرارتی نانوسیال	k_{eff}	
دمای انجماد سیال پایه	T_{ff}	
عدد رینولدز نانوذرات	Re_p	
عدد پراتل سیال پایه	Pr_b	
عدد ناسلت	Nu	
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی	h	
		فهرست علائم
		ρ_n چگالی نانوسیال
		ϕ_v کسر حجمی
		ρ_f چگالی سیال پایه
		ρ_p چگالی نانوذرات
		d_f قطر معادل مولکول‌های سیال پایه
		d_p قطر معادل مولکول‌های نانوذرات
		μ_n لزجت دینامیکی نانوسیال
		μ لزجت دینامیکی سیال پایه
		η متغیر تشابهی
		Re_n عدد رینولدز نانوسیال

مراجع

- Choi, S.U.S, "Enhancing thermal conductivity of fluid with nanoparticles", *Dev. Appl Non-Newtonian Flows*, Vol. 66, pp. 99–105, (1995).
- Maiga, S.E.B., Nguyen, C.T., Galanis, N. and Roy, G., "Heat transfer behaviors of nanofluid in a uniformly heated tube", *Superlattices Microstruct.*, Vol. 35, No. 3-6, pp. 453–462, (2004).
- Heris, S.Z., Etemad, S.Gh. and Esfahani, M.N., "Experimental investigation of oxide nanofluid laminar forced flow convective heat transfer", *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, Vol. 33, No. 4, pp. 529–535, (2006).

4. Duangthongsuk, W. and Wongwises, S., "Heat transfer enhancement and pressure drop characteristics of TiO₂-water nanofluid in a double-tube counter flow heat exchangers", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 52, No. 7-8, pp. 2059–2067, (2009).
5. Santra, A.K., Sen, S. and Chkroborty, M., "Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through two isothermally heated parallel plates", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, No. 1, pp. 391–400, (2009).
6. Nguyen, C.T., Galanis, N., Polidori, G., Fohanno, S., Pota, C.V. and Beche, A.L., "An experimental study of confined and submerged impinging jet heat transfer using Al₂O₃-water nanofluid", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, No. 2, pp. 401–411, (2009).
7. Kuznetsov, A.V. and Nield, D.A., "Natural convection boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 49, No. 2, pp. 243–247 (2010).
8. Kuznetsov, A.V. and Nield, D.A., "Thermal instability in a porous medium layer saturated by a nanofluid: Brinkman model", *Transp. Porous Med.*, Vol. 81, No. 3, pp. 409–422, (2010).
9. Khan, W.A. and Pop, I., "Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 53, No. 11-12, pp. 2477–2483, (2010).
10. Hiemenz, K., "Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden", *Kreiszyylinder. Dingers Polytech. J.*, Vol. 326, pp. 321-410, (1911).
11. Homann, F.Z., "Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel", *Zeitsch. Angew. Math. Mech.*, 16153-164, (1936)
12. Howarth, L., "The boundary layer in three dimensional flow. Part II. The flow near a stagnation point", *Phil. Mag.*, Vol. 42, No. 7, pp. 1433-1440, (1951).
13. Davey, A., "Boundary layer flow at a saddle point of attachment", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 10, No. 4, pp. 593-610, (1951).
14. Wang, C., "Axisymmetric stagnation flow on a cylinder", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 2, pp. 207-213, (1974).
15. Gorla, R.S.R., "Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder", *Dev. Mec*, Vol. 9, pp.286-288, (1977).
16. Gorla, R.S.R., "Nonsimilar axisymmetric stagnation flow on a moving cylinder", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 16, No. 6, pp. 397-400, (1978).
17. Gorla, R.S.R., "Transient response behaviour of an axisymmetric stagnation flow on a circular cylinder due to time dependent free stream velocity", *Int. J. Engineering science*, Vol. 16, No. 7, pp. 493- 502, (1978).
18. Gorla, R.S.R., "Unsteady viscous flow in the vicinity of an axisymmetric stagnation-point on a cylinder", *Int. J. Engineering Science*, Vol. 17, No. 1, pp. 87-93, (1979).
19. Gorla, R.S.R., "Heat transfer in axisymmetric stagnation flow on a cylinder", *Applied Scientific Research J.*, Vol. 32, No. 5, pp. 541-553, (1976).
20. Cunning, G.M., Davis, A.M.J. and Weidman, P.D., "Radial stagnation flow on a rotating cylinder with uniform transpiration", *Journal of Engineering mathematics*, Vol. 33, No. 2, pp. 113-128, (1998).
21. Takhar, H.S., Chamkha, A.J. and Nath, G., "Unsteady axisymmetric stagnation-point flow of a viscous fluid on a cylinder", *Int. Journal of Engineering Science*, Vol. 37, No. 15, pp. 1943-1957, (1999).
22. Saleh, R. and Rahimi, A.B., "Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous Fluid on a Moving Cylinder with Time- Dependent Axial Velocity and Uniform Transpiration", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, No. 6, pp. 997–1005, (2004).
23. Rahimi, A.B. and Saleh, R., "Axisymmetric Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous

- Fluid on a Rotating Cylinder With Time- Dependent Angular Velocity and Uniform Transpiration", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, No. 1, pp. 107–115 (2007).
24. Rahimi, A.B. and Saleh, R., "Similarity Solution of Unaxisymmetric Heat Transfer in Stagnation-Point Flow on a Cylinder with Simultaneous Axial and Rotational Movements", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 130, No. 5, pp. 054502-1–054502-5, (2008).
 25. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Non-Axisymmetric Three- Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 131, No. 7, pp. 074501.1–074501.5, (2009).
 26. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Three-Dimensional Stagnation- Point Flow and Heat Transfer on a Flat Plate with Transpiration", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 23, No. 3, pp. 513–521, (2009).
 27. Abbasi, A.S., Rahimi, A.B. and Niazmand, H., "Exact Solution of Three-Dimensional Unsteady Stagnation Flow on a Heated Plate", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 25, No. 1, pp. 55–58, (2011).
 28. Abbasi, A.S. and Rahimi, A.B., "Investigation of Two-Dimensional Stagnation-Point Flow and Heat Transfer Impinging on a Flat Plate", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 134, No. 6, pp. 064501-06450, (2012).
 29. Mohammadiun, H. and Rahimi, A.B., "Stagnation-Point Flow and Heat Transfer of a Viscous, Compressible Fluid on a Cylinder", *Journal of Thermo physics and Heat Transfer*, Vol. 26, No. 3, pp. 494-502, (2012).
 30. Mohammadiun, H., Rahimi, A.B. and Kianifar, A., "Axisymmetric stagnation-point flow and heat transfer of a viscous, compressible fluid on a cylinder with constant heat flux", *Scientia Iranica B*, Vol. 20, No. 1, pp. 185–194, (2013).
 31. Rahimi, A.B., Mohammadiun, H. and Mohammadiun, M., "Axisymmetric stagnation flow and heat transfer of a compressible fluid impinging on a cylinder moving axially", *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 138, No. 2, pp. 022201-1-022201-9, (2016).
 32. Mohammadiun, H., Mohammadiun, M., Hazbehian.M. and Maddah, H., "Experimental study of ethylene glycol-based Al_2O_3 nanofluid turbulent heat transfer enhancement in the corrugated tube with twisted tapes", *Heat Mass Transfer*, Vol. 52, No. 1, pp. 141–151, (2016).
 33. Freidoonimehr, N. and Rahimi, A.B., "Exact-solution of entropy generation for MHD nanofluid flow induced by a stretching/shrinking sheet with transpiration: Dual solution", *Advanced Powder Technology*, Vol. 28, No. 22, pp. 671-685, (2017).
 34. Mansour, M.A., Mahdy, A.S., Ahmed, S.E. and Mohamed, S.S., "Entropy Analysis for Unsteady MHD Boundary Layer Flow and Heat Transfer of Casson Fluid over a Stretching Sheet", *Walailak J Sci & Tech*, Vol. 14, No. 2, pp. 169-187, (2017).
 35. Corcione, M., "Empirical correlating equations for predicting the effective thermal conductivity and dynamic viscosity of nanofluids", *Ene. Convers. Manage*, Vol. 52, No. 1, pp. 789-793, (2011).