SID

فیلم های آموزشی
عضویت در خبرنامه
بلاگ مرکز اطلاعات علمی
کارگاه های آموزشی
سرویس ترجمه تخصصی
سرویس های ویژه

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی

کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترفند های جستجو

کارگاه آنلاین
روش تحقیق و مقاله نویسی علوم انسانی

کارگاه آنلاین
پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی

Archive of SID

دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸–۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نقطه ثابت مشترک در فضاهای $b-$ متریک کامل به روش کرک[1]

موسی آور[1]، خدیجه جاهدی[2*]، محمد جواد مهدی پور[3]

(۱ و ۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد شیراز، دانشگاه آزد اسلامی، شیراز، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۸/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۳

چکیده

در این مقاله، مفهوم خودنگاشت‌های سازگار و به طور ضعیف سازگار را برای فضای $b-$ متریک تعریف می‌کنیم و با الهام از روش کرک و همکاران، به معرفی شرایطی جدید و تعدیل‌یافته جهت وجود نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر بفرد برای خانواده‌ای با تعداد زوج از خود نگاشت‌ها و دو خود نگاشت دیگر بر روی فضای $b-$ متریک کامل می‌پردازیم. همچنین به تعمیم قضیه نقطه ثابت مشترک برای یک دنباله و یک خانواده با تعدادی زوج از خود نگاشت‌ها روی فضای $b-$ متریک کامل می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: فضای $b-$ متریک، نقطه ثابت مشترک، خودنگاشت‌های سازگار، خودنگاشت‌های به طور ضعیف سازگار.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mjahedi80@yahoo.com

1. Ciric

www.SID.ir

Archive of SID

۱. تاریخچه و مقدمه

بورباکی[1] [۱] و باختین[2] [۲] اولین کسانی بودند که ایده فضای $b-$ متریک را مطرح کردند. چرویک[3] [۳] در سال ۱۹۹۸ با ضعیف‌تر کردن خاصیت نامساوی مثلثی در فضای متریک معمولی به معرفی یک فضای متریک تعمیم‌یافته پرداخت و آن را $b-$ متریک نامید.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی باشد و $b \geq ۱$ یک عدد حقیقی باشد، تابع $d: X \times X \to [۰,\infty)$ را یک $b-$ متریک گوییم اگر برای هر $x,y,z \in X$ داشته باشیم

۱) $x = y$ اگر و فقط اگر $d(x,y) = ۰$.

۲) $d(x,y) = d(y,x)$.

۳) $d(x,y) \leq b[d(x,z) + d(z,y)]$.

زوج (X,d) را یک فضای $b-$متریک روی یک مجموعه غیرتهی X گوییم.

در حالت خاص $b = ۱$، فضای $b-$متریک، همان فضای متریک معمولی است.

مثال ۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک معمولی و $p > ۱$ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت (X,d^p) یک $b-$متریک با ضریب $b = ۲^{p-۱}$ می‌باشد.

$$d^p(x,y) = (d(x,y))^p.$$

اگر در حالت خاص، $p = ۲$ برای متر استاندارد روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، واضح است که برای هر $x,y \in \mathbb{R}$،

$$d^2(x,y) = (d(x,y))^۲ = (x-y)^۲$$

یک $b-$متریک روی $\mathbb{R}$، با $b = ۲$ است ولی یک متریک معمولی روی $\mathbb{R}$ نیست.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای $b-$متریک باشد. در این صورت دنباله $\{x_n\}$ در X:

۱. همگرا است اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $d(x_n,x) \to ۰$ وقتی $n \to \infty$ و در این حالت می‌نویسیم $lim_{n\to\infty} x_n = x$.

۲. کوشی است اگر $d(x_n,x_m) \to ۰$ وقتی $n,m \to \infty$.

۳. فضای $b-$متریک (X,d) کامل است اگر هر دنباله کوشی در X، همگرا باشد.

۴. خودنگاشت $T: X \to X$ را پیوسته گوییم، هرگاه برای دنباله $\{x_n\}$ از X که، $lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = ۰$ داشته باشیم $lim_{n\to\infty} d(Tx_n,Tx) = ۰$.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای $b-$متریک و f و g دو خود نگاشت بر X باشند آن‌گاه:

۱. زوج $\{f,g\}$ را سازگار گوییم اگر $lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = ۰$، هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به‌طوریکه برای یک $t \in X$، $lim_{n\to\infty} fx_n = lim_{n\to\infty} gx_n = t$.

۲. زوج $\{f,g\}$ را به طور ضعیف سازگار گوییم اگر در نقاط انطباق خود با یکدیگر جابه‌جا شوند. یعنی اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $fx = gx$ آنگاه داریم:

$$gfx = fgx.$$

در فضای $b-$متریک (X,d)، هر دنباله همگرا دارای حد منحصر بفرد بوده و کوشی نیز می‌باشد اما هر $b-$متریک لزوماً پیوسته نیست. برای دیدن مثال به [۴] مراجعه شود.

بسیاری از محققین قضایای نقطه ثابت و نقطه‌ی ثابت مشترک را برای عملگرهای تک مقداری و چند مقداری روی فضای $b-$متریک مورد بررسی قرار داده‌اند. اطلاعات بیشتر در [۱۴-۵] است. در این مقاله با الهام از روش کرک و همکاران [۱۴] به اثبات وجود نقطه‌ی ثابت مشترک برای یک خانواده به تعداد زوج دلخواه و دو خود نگاشت دیگر در فضای متریک، بدون نیاز به پیوستگی $b-$متریک می‌پردازیم. در نهایت به تعمیم مطلب فوق برای یک دنباله دلخواه به همراه یک دسته زوج از خود نگاشت‌ها خواهیم پرداخت. با توجه به عدم پیوستگی $b-$متریک، نیاز به لم‌های زیر در مورد

1. *Bourbaki*
2. *Bakhtin*
3. *Czerwik*

www.SID.ir

Archive of SID

دنباله های $b-$ همگرا داریم.

لم ۵.۱. ([۲]) فرض کنیم (X,d) یک فضای $b-$ متریک با $b \geq ۱$ باشد. فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب به x و y، $b-$ همگرا باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{۱}{b^{۲}}\, d(x,y) &\leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n,y_n)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n,y_n)\\ &\leq b^{۲} d(x,y)\end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $x=y$، آن‌گاه داریم $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\circ$. علاوه بر این برای هر $z \epsilon X$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{b}\, d(x,z) &\leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n,z)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n,z)\\ &\leq b\, d(x,z).\end{aligned}$$

لم ۶.۱. فرض (X,d) یک فضای $b-$ متریک باشد. اگر وجود داشته باشند دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به طوری که $lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\circ$، هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوری که $lim_{n\to\infty} x_n = t$ برای بعضی $t \epsilon X$، آن‌گاه $lim_{n\to\infty} y_n = t$.

اثبات: با توجه به نامساوی مثلثی در فضای $b-$ متریک داریم:

$$d(y_n,t) \leq b\,[d(y_n,x_n)+d(x_n,t)].$$

حال با در نظر گرفتن حد بالایی وقتی که $n\to\infty$ در نامساوی فوق داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup d(y_n,t)\\ &\leq b\left[\lim_{n\to\infty} \sup d(x_n,y_n)\right.\\ &\left.+\lim_{n\to\infty} \sup d(x_n,t)\right]\\ &= \circ\,.\end{aligned}$$

بنابراین $lim_{n\to\infty} y_n = t$.

۲. نتایج اصلی

همانگونه که مطرح شد در اکثر قضایای نقطه ثابت مشترک، پیوستگی متر داده شده از ارکان حل مساله بود، در این قسمت بدون نیاز به پیوستگی $b-$ متریک به اثبات وجود نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد برای خود نگاشت‌های سازگار و به طور ضعیف سازگار که در شرایط انقباض تعمیم‌یافته با قدری تعدیل در روش کرک و همکاران در فضای $b-$ متریک با $b \geq 1$ صدق می‌کنند، می‌پردازیم.

در ابتدا شرایط قضیه نقطه‌ی ثابت مشترک بر روی فضای $b-$ متریک (X,d) با ضریب $b>۱$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور فرض می‌کنیم Φ گردایه‌ای از نگاشت‌های $\varphi:[\circ,\infty)\to[\circ,\infty)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. φ روی $[\circ,\infty)$ پیوسته است.

۲. به ازای هر $t>\circ$، $\varphi(t)<t$ و $\varphi(\circ)=\circ$.

همانگونه که دیده می‌شود، بدون نیاز به فرض غیرنزولی بودن φ در روش کرک و همکاران، مساله را روی فضای $b-$ متریک کامل اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $P_{۲n_\circ}$ و ... و $P_{۲}$ و $P_{۱}$ و $Q_{۱}$ و $Q_\circ$ خودنگاشت‌هایی روی فضای $b-$متریک کامل (X,d) با ضریب $b>۱$ باشند به طوری که شرایط زیر برقرار باشند.

۱.

$$\begin{aligned}Q_{۱}(X) &\subseteq P_{۲}P_{۴}\ldots P_{۲n_\circ}(X) \text{و} Q_\circ(X)\\ &\subseteq P_{۱}P_{۳}\ldots P_{۲n_\circ-۱}(X);\end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}&P_{۲}(P_{۴}\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_{۴}\ldots P_{۲n_\circ})P_{۲};\\ &P_{۲}P_{۴}(P_{۶}\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_{۶}\ldots P_{۲n_\circ})P_{۲}P_{۴};\\ &\vdots\\ &P_{۲}P_{۴}\ldots P_{۲n_\circ-۲}(P_{۲n_\circ})\\ &\qquad = (P_{۲n_\circ})P_{۲}P_{۴}\ldots P_{۲n_\circ-۲};\\ &Q_\circ(P_{۴}\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_{۴}\ldots P_{۲n_\circ})Q_\circ;\\ &Q_\circ(P_{۶}\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_{۶}\ldots P_{۲n_\circ})Q_\circ;\\ &\vdots\\ &Q_\circ(P_{۲n_\circ}) = (P_{۲n_\circ})Q_\circ;\\ &P_{۱}(P_{۳}\ldots P_{۲n_\circ-۱}) = (P_{۳}\ldots P_{۲n_\circ-۱})P_{۱};\end{aligned}$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$P_1P_3(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})P_1P_3;$$
$$\vdots$$
$$P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}(P_{2n_0-1}) = (P_{2n_0-1})P_1P_3 \dots P_{2n_0-3};$$
$$Q_1(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})Q_1;$$
$$Q_1(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})Q_1;$$
$$\vdots$$
$$Q_1(P_{2n_0-1}) = (P_{2n_0-1})Q_1;$$

۳. $P_2P_4 \dots P_{2n_0}$ یا Q_0 پیوسته باشند.

۴. زوج $(Q_0, P_2P_4 \dots P_{2n_0})$ سازگار و زوج $(Q_1, P_1 \dots P_{2n_0-1})$ به طور ضعیف سازگار باشند.

۵. $\varphi \in \phi$ وجود داشته باشد به گونه‌ای به ازای هر $u, v \in X$،

$$d(Q_0u, Q_1v) \leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0}u, Q_0u)), \varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}v, Q_1v)), \varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0}u, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}v)), \varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}v, Q_0u) + d(P_2P_4 \dots P_{2n_0}u, Q_1v)])\}.$$

در این صورت $Q_0, Q_1, P_1, P_2, \dots, P_{2n_0}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر بفرد در X دارند.

اثبات: فرض کنیم $x_0 \in X$. بنابر شرط (۱) وجود دارند $x_1, x_2 \in X$ به طوری که

$$Q_0(x_0) = P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}\left(x_1\right) = y_0$$

و

$$Q_1(x_1) = P_2P_4 \dots P_{2n_0}(x_2) = y_1 \text{ ..}$$

برای هر $n \in N$، دنباله $\{y_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم.

$$Q_0(x_{2n}) = P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}(x_{2n+1}) = y_{2n}$$

و

$$Q_1(x_{2n+1}) = P_2P_4 \dots P_{2n_0}(x_{2n+2}) = y_{2n+1}.$$

حال نشان می‌دهیم که $\{y_n\}$ دنباله کوشی است.

در شرط (۵) قرار می‌دهیم،

$$u = x_{2n}, v = x_{2n+1},$$

از این پس برای راحتی از نماد زیر استفاده می‌کنیم

$P_1' = P_2P_4 \dots P_{2n_0}$ و $P_2' = P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}$

بنابراین

$$d(Q_0x_{2n}, Q_1x_{2n+1}) \leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_1'x_{2n}, Q_0x_{2n})), \varphi(d(P_2'x_{2n+1}, Q_1x_{2n+1})), \varphi(d(P_1'x_{2n}, P_2'x_{2n+1})), \varphi(\frac{1}{2}[d(P_2'x_{2n+1}, Q_0x_{2n}) + d(P_1'x_{2n}, Q_1x_{2n+1})])\}.$$

بنابراین

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(\frac{1}{2}[d(y_{2n}, y_{2n}) + d(y_{2n-1}, y_{2n+1})])\}$$

$$= \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(\frac{1}{2}[dy_{2n-1}, y_{2n+1}))\}$$

$$\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} \max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(\frac{b}{2}[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})])\}$$

$$\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(bmax[d(y_{2n-1}, y_{2n}),$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$d(y_{2n}, y_{2n+1})]\}) \quad (1)$$
$$< \frac{1}{b^{2n_0+1}} max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\}$$

اگر برای بعضی از nها،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) > d(y_{2n-1}, y_{2n})$$

آن‌گاه از نابرابری (۱) نتیجه می‌شود
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \le \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{2n}, y_{2n+1}) \le d(y_{2n}, y_{2n+1}) ,$$

بنابراین نتیجه می‌شود،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) < d(y_{2n}, y_{2n+1}).$$

و این تناقض است. لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \le d(y_{2n-1}, y_{2n}).$$

از این رو طبق نامساوی (۱) داریم،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \le \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{2n-1}, y_{2n}) \quad (2)$$

و به طور مشابه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ،
$$d(y_{2n-1}, y_{2n}) \le \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \quad (3)$$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم
$$d(y_n, y_{n-1}) < \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{n-1}, y_{n-2}) .$$

قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{1}{b^{2n_0+1}}$ و $n \ge 2$، بنابراین برای هر $n \ge 2$ رابطه زیر به دست می‌آید.
$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n-1}) &< \lambda\, d(y_{n-1}, y_{n-2}) \\ &< \lambda^2 d(y_{n-2}, y_{n-3}) \\ &< \lambda^{n-1} d(y_1, y_0). \end{aligned}$$

به عبارت دیگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ،
$$d(y_n, y_{n-1}) < \lambda^{n-1} d(y_1, y_0). \quad (4)$$

پس برای هر $n > m,\ m, n \in \mathbb{N}$ ،
$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) \le\ & bd\left(y_m, y_{m+1}\right) \\ &+ b^2 d\left(y_{m+1}, y_{m+2}\right) + \cdots \\ &+ b^{n-m-1} d\left(y_{n-1}, y_n\right) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

حال با استفاده از (۴) و از آن‌جا که $b\lambda < 1$،
$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\le (b\lambda^m + b^2\lambda^{m+1} + \cdots \\ &\quad + b^{n-m-1}\lambda^{n-1} \\ &\quad + \cdots) d(y_1, y_0) \\ &\le b\lambda^m [1 + b\lambda + (b\lambda)^2 \\ &\quad + \cdots] d(y_1, y_0) \\ &= \frac{b\lambda^m}{1 - b\lambda} d(y_1, y_0). \end{aligned}$$

بنابراین،
$$\lim_{m, n\to\infty} d(y_n, y_m) = 0 \quad .$$

در نتیجه $\{y_n\}$ یک دنباله $b-$ کوشی در فضای $b-$ متریک کامل است. پس $z\epsilon X$ وجود دارد به طوری که،
$$\lim_{n\to\infty} y_n = z.$$

در حقیقت
$$\lim_{n\to\infty} Q_0 x_{2n} = \lim_{n\to\infty} Q_1 x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P'_2 x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P'_1 x_{2n} = z \quad (5)$$

حال نشان می‌دهیم z یک نقطه ثابت مشترک نگاشت‌های Q_1 و Q_0 و P_1 و P_2 و ... و P_{2n_0} است. بدین جهت، حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $P'_1 = P_2 P_4 \ldots P_{2n_0}$ پیوسته است. پس،
$$\lim_{n\to\infty} P'_1 P'_1 x_{2n} = P'_1 z$$

www.SID.ir

Archive of SID

و

$$\lim_{n\to\infty} P'_۱\, Q_۰\, x_{۲n} = P'_۱ z\,.$$

از این‌که $\{Q_۰\,,\, P'_۱\}$ سازگارند، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} d(P'_۱ Q_۰ x_{۲n}\;, Q_۰ P'_۱\, x_{۲n}) = ۰\,.$$

بنابراین با استفاده از لم ۶.۱ داریم

$$\lim_{n\to\infty} Q_۰ P'_۱\, x_{۲n} = P'_۱ z\,.$$

الف: فرض کنیم $d(P'_۱z,z) \neq ۰$. اگر در شرط (۵) قضیه قرار دهیم $u = P'_۱x_{۲n}$ و $v = x_{۲n+۱}$،

$$\begin{aligned}
&d(Q_۰ P'_۱x_{۲n}, Q_۱x_{۲n+۱})\\
&\le \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}}\, max\{\varphi(d(P'_۱P'_۱x_{۲n}, Q_۰ P'_۱\, x_{۲n})),\\
&\varphi(d(P'_۲x_{۲n+۱}, Q_۱x_{۲n+۱})), \varphi(d(P'_۱P'_۱x_{۲n}, P'_۲x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[d(P'_۲x_{۲n+۱}, Q_۰ P'_۱\, x_{۲n})\\
&+ d(P'_۱P'_۱x_{۲n}, Q_۱x_{۲n+۱})])\}\,.
\end{aligned}$$

با استفاده از پیوستگی و خواص φ و نیز لم ۵.۱ در نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{b^۲} d(P'_۱z,z)\\
&\le \lim_{n\to\infty} sup\, d(Q_۰ P'_۱\, x_{۲n}, Q_۱x_{۲n+۱})\\
&\le \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} max\{\,\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۱P'_۱x_{۲n}, Q_۰ P'_۱x_{۲n})),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۲x_{۲n+۱}, Q_۱x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۱P'_۱x_{۲n}, P'_۲x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۲x_{۲n+۱}, Q_۰ P'_۱x_{۲n})\\
&+ \lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۱P'_۱x_{۲n}, Q_۱x_{۲n+۱})])\}\\
&\le \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} max\{\varphi(b^۲ d(P'_۱z, P'_۱z)), \varphi(b^۲ d(z,z)),\\
&\varphi(b^۲ d(P'_۱z,z)), \varphi(\frac{b^۲}{۲}[d(z,P'_۱z)\\
&+ d(P'_۱z,z)])\}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{b^۲}\, d(P'_۱z,z)\\
&\le \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}}\varphi(b^۲ d(P'_۱z,z))\\
&< \frac{۱}{b^{۲n_۰}} d(P'_۱z,z).
\end{aligned}$$

از این رو

$$d(P'_۱z,z) \le \frac{۱}{b^{۲n_۰-۲}}\; d(P'_۱z,z).$$

در نتیجه $d(P'_۱z,z) < d(P'_۱z,z)$ و این تناقض است. پس

$$d(P'_۱z,z) = ۰.$$

بنابراین $P'_۱z = z$.

ب: فرض کنیم $d(Q_۰z,z) \neq ۰$. در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = z$ و $v = x_{۲n+۱}$. با استفاده از لم ۵.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{b^۲} d(Q_۰z,z)\\
&\le \lim_{n\to\infty} sup\;\; d(Q_۰z, Q_۱x_{۲n+۱})\\
&\le \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} max\{\,\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۱z, Q_۰z)),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۲x_{۲n+۱}, Q_۱x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۱z, P'_۲x_{۲n+۱})),\\
&\varphi(\frac{۱}{۲}[\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_۲x_{۲n+۱}, Q_۰z)\\
&+ lim_{n\to\infty}\, sup\, d(P'_۱z, Q_۱x_{۲n+۱})])\}.
\end{aligned}$$

www.SID.ir

Archive of SID

با استفاده از خاصیت (۲) در تعریف φ داریم،

$$\frac{1}{b^2}d(Q_0 z,z) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(b^2 d(z,Q_0 z)), \varphi(b^2 d(z,z)),\varphi(b^2 d(z,z)), \varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,Q_0 z)+d(z,z)])\} < \frac{1}{b^{2n_0+2}}(b^2 d(z,Q_0 z)) = \frac{1}{b^{2n_0}}d(z,Q_0 z).$$

در نتیجه با توجه به آن‌که $b>1$،

$$d(Q_0 z,z) < \frac{1}{b^{2n_0-2}}d(z,Q_0 z)$$

از این‌رو $d(Q_0 z,z) < d(z,Q_0 z)$ و این تناقض است. پس

$$d(Q_0 z,z)=0.$$

به عبارت دیگر $Q_0 z = z$.

ج: فرض کنیم $d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z) \neq 0$. در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = P_4 \dots P_{2n_0} z$ و $v = x_{2n+1}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم:

$$\frac{1}{b^2}d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(b^2 d(P_4 \dots P_{2n_0} z,P_4 \dots P_{2n_0} z)), \varphi(b^2 d(z,z)) ,\varphi(b^2 d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)), \varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,P_4 \dots P_{2n_0} z) + d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)])\} < \frac{1}{b^{2n_0+2}}(b^2\, d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)) = \frac{1}{b^{2n_0}}d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z),$$

در نتیجه

$$d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z) < d(P_4 \dots P_{2n_0} z,z)$$

و این تناقض است. بنابراین $P_4 \dots P_{2n_0} z = z$. در این صورت

$$P_2 z = P_2 P_4 \dots P_{2n_0} z = z$$

و

$$P_2 P_4 \dots P_{2n_0} z = P_2 z.$$

با ادامه این مراحل داریم

$$Q_0 z = P_2 z = P_4 z = \cdots = P_{2n_0} z = z.$$

د: چون $Q_0(X) \subseteq P'_2(X)$، عنصر $v \in X$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$z = Q_0 z = P'_2 v\,.$$

با فرض $d(z,Q_1 v) \neq 0$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = x_{2n}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{1}{b^2}d(z,Q_1 v) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}}max\{\varphi(b^2 d(z,z)), \varphi(b^2 d(z,Q_1 v)) ,\varphi(b^2 d(z,z)), \varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,z)+d(z,Q_1 v)])\} < \frac{1}{b^{2n_0+2}}\ (b^2 d(z,Q_1 v)) = \frac{1}{b^{2n_0}}\ d(z,Q_1 v).$$

که نتیجه می‌شود $Q_1 v = z$. بنابراین

$$P_1 P_3 \dots P_{2n_0-1} v = Q_1 v = z.$$

www.SID.ir

Archive of SID

از آن‌جا که $(Q_۱, P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱})$ به طور ضعیف سازگار است، داریم

$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}Q_۱v = Q_۱P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}v.$$

بنابراین

$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = Q_۱z.$$

ر: با فرض $d(Q_۱z, z) \neq ۰$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = x_{۲n}$ و $v = z$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{۱}{b^۲}d(z, Q_۱z)$$
$$\leq \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} max\{\varphi(b^۲d(z,z)),$$
$$\varphi(b^۲d(Q_۱z, Q_۱z)), \varphi(b^۲d(z, Q_۱z)),$$
$$\varphi(\frac{b^۲}{۲}[d(Q_۱z, z) + d(z, Q_۱z)])\}$$
$$< \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} (b^۲d(z, Q_۱z))$$
$$= \frac{۱}{b^{۲n_۰}} d(z, Q_۱z).$$

که نتیجه می‌شود $Q_۱z = z$ و همچنین

$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = Q_۱z = z.$$

ز: با فرض $d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z) \neq ۰$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = x_{۲n}$ و $v = P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{۱}{b^۲}d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)$$
$$\leq \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} max\{\varphi(b^۲d(z,z)),$$
$$\varphi(b^۲d(P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)),$$
$$\varphi(b^۲d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)),$$
$$\varphi(\frac{b^۲}{۲}[d(P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z, z)$$
$$+d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)])\}$$
$$< \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} (b^۲d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z))$$
$$= \frac{۱}{b^{۲n_۰}} d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z).$$

از این‌رو $P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = z$. بنابراین

$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = P_۱z,$$

و

$$P_۱z = P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = z.$$

پس $P_۱z = z$. با ادامه این روش خواهیم داشت

$$Q_۱z = P_۱z = P_۳z = \dots = P_{۲n_۰-۱}z = z.$$

از این‌رو با توجه به قسمت (ج) ثابت کرده‌ایم

$$Q_۰z = Q_۱z = P_۱z = P_۲z = \dots$$
$$= P_{۲n_۰-۱}z = P_{۲n_۰}z = z.$$

به عبارت دیگر z یک نقطه ثابت مشترک خود نگاشت‌های $Q_۰, Q_۱, P_۱, P_۲, \dots, P_{۲n_۰}$ است.

حالت دوم: فرض کنیم $Q_۰$ پیوسته باشد. از طرفی طبق

$$lim_{n\to\infty} P'_۱ x_{۲n} = lim_{n\to\infty} Q_۰ x_{۲n} = z, \quad (۵)$$

نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} Q_۰P'_۱ x_{۲n} = Q_۰z$$

و

$$\lim_{n\to\infty} Q_۰ Q_۰ x_{۲n} = Q_۰z.$$

از آن‌جایی که $\{Q_۰, P'_۱\}$ سازگار است، داریم

$$\lim_{n\to\infty} (P'_۱Q_۰x_{۲n}, Q_۰P'_۱ x_{۲n}) = ۰.$$

بنابراین با استفاده از لم ۶.۱،

$$\lim_{n\to\infty} P'_۱ Q_۰ x_{۲n} = Q_۰z.$$

س: با فرض $d(Q_۰z, z) \neq ۰$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = Q_۰x_{۲n}$ و $v = x_{۲n+۱}$ و با

www.SID.ir

Archive of SID

استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{b^{۲}} d(Q_{۰} z,z)\\ &\le \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(b^{۲}d(Q_{۰} z,Q_{۰} z)),\\ &\varphi(b^{۲}d(z,z)),\varphi(b^{۲}d(Q_{۰} z,z)),\\ &\varphi(\frac{b^{۲}}{۲}[d(z,Q_{۰} z)+d(Q_{۰} z,z)])\}\\ &< \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}}\ (b^{۲}d(Q_{۰} z,z))\\ &= \frac{۱}{b^{۲n_{۰}}} d(Q_{۰} z,z)\ .\end{aligned}$$

در نتیجه $d(Q_{۰} z,z)=۰$. پس $Q_{۰} z=z$. اینک مشابه مراحل (د)، (ر)، (ز) و با ادامه مرحله (ز) در حالت اول داریم:

$$Q_{۱}Z=P_{۱}z=P_{۳}z=\cdots=P_{۲n_{۰}-۱}z=z.$$

ش: با توجه به شرط (۱) قضیه، چون $Q_{۱}(X)\subseteq P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}(X)$، $z\in X$ وجود دارد به طوری که

$$Q_{۱}z\in Q_{۱}(X)\subseteq P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}(X).$$

بنابراین $w\in X$ وجود دارد به طوری که

$$Q_{۱}z=P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}\,w=z.$$

با فرض $d(Q_{۰} w,z)\neq ۰$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=w$ و $v=x_{۲n+۱}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{b^{۲}} d(.Q_{۰} w,z)\\ &\le \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(b^{۲}d(z,Q_{۰} w)),\\ &\varphi(b^{۲}d(z,z)),\varphi(b^{۲}d(z,z)),\\ &\varphi(\frac{b^{۲}}{۲}[d(z,Q_{۰} w)+d(z,z)])\}\\ &< \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}}\ (b^{۲}d(Q_{۰} w,z))\\ &= \frac{۱}{b^{۲n_{۰}}} d(Q_{۰} w,z)\ .\end{aligned}$$

در نتیجه $d(Q_0w,z)=۰$. پس $Q_{۰} w=z$. از این‌رو داریم

$$Q_{۰} w=z=P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}\,w.$$

از آن‌جا که $(Q_0,P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}})$ سازگار است، به طور ضعیف سازگار نیز است. بنابراین

$$Q_{۰} z=P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{۰}}\,z=z.$$

همانند مرحله (ج) می‌توان ثابت کرد که

$$P_{۲}z=P_{۴}z=\cdots=P_{۲n_{۰}}\,z=Q_{۰} z=z.$$

پس z، یک نقطه‌ی ثابت مشترک نگاشت‌های $Q_{۰}, Q_{۱}, P_{۱}, P_{۲},\dots,P_{۲n_{۰}}$ است.

اثبات یکتایی: فرض کنیم که z' یک نقطه ثابت مشترک دیگر از نگاشت‌های $Q_{۰}, Q_{۱}, P_{۱}, P_{۲},\dots,P_{۲n_{۰}}$ باشد، در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=z$ و $v=z'$ در این صورت:

$$\begin{aligned}&d(Q_{۰} z,Q_{۱}z')\\ &\le \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi(d(P'_{۱}z,Q_{۰} z)),\\ &\varphi(d(P'_{۲}z',Q_{۱}z'))\ ,\varphi(d(P'_{۱}z,P'_{۲}z')),\\ &\varphi(\frac{۱}{۲}[d(P'_{۲}z',Q_{۰} z)+d(P'_{۱}z,Q_{۱}z')])\}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&d(z,z')\\ &\le \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}} max\{\varphi\big(d(z,z)\big),\varphi\big(d(z',z')\big),\\ &\varphi\big(d(z,z')\big),\varphi(\frac{۱}{۲}[d(z',z)+d(z,z')])\}\\ &= \frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}}\varphi\big(d(z,z')\big)<\frac{۱}{b^{۲n_{۰}+۲}}d(z,z').\end{aligned}$$

در نتیجه $d(z,z')<d(z,z')$ و این تناقض است.

www.SID.ir

Archive of SID

بنابراین $d(z,z')=۰$ در نتیجه $z=z'$. پس z یک نقطه ثابت منحصر به فرد از خودنگاشت‌های $Q_۰,Q_۱,P_۱,P_۲,\dots,P_{۲n_۰}$ است.

برای $n_۰\in\mathbb{N}$ فرض کنیم $\mathcal{B}_b$ خانواده توابع کراندار مانند β از $[۰,\infty)$ به $[۰,\frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}})$ باشد. با استفاده از $\mathcal{B}_b$ می‌توان به تعمیم دیگری از شرایط انقباض برای اثبات وجود نقطه‌ی ثابت مشترک منحصربفرد برای یک خانواده به تعداد زوج و دو خود نگاشت دیگر در فضای b–متریک کامل، بدون نیاز به پیوستگی b–متریک با $b>1$ می‌پردازیم.

واضح است که $\mathcal{B}_b\neq\emptyset$ کافی است تابع $\beta(t)=\frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}}e^{-t}$ برای $t>۰$ و برای $t=۰$، $\beta(t)\in[۰,\frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}})$ در نظر گیریم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $u,v\in X$ و هر $n_۰\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$\begin{aligned}&d(Q_۰u,Q_۱v)\\&\leq\beta(d(Q_۰u,Q_۱v))max\{d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,Q_۰u),\\&d(P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v,Q_۱v),\\&d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v),\\&\frac{۱}{۲}[d(P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v,Q_۰u)\\&+d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,Q_۱v)]\}.\end{aligned}$$

در این صورت $Q_۰,Q_۱,P_۱,P_۲,\dots,P_{۲n_۰}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

اثبات: با توجه به خاصیت $\beta(t)<\frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}}$ مراحل اثبات به نحو مناسب مشابه اثبات قضیه ۱.۲ می‌باشد.

در زیر نشان می‌دهیم فرض $b>1$ در فضای b–متریک، کمک می‌کند تا بدون وجود خانواده ϕ و تبدیل نامساوی به صورت نامساوی اکید به نتیجه‌ای مشابه قضیه ۱.۲ برسیم.

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $u,v\in X$ و هر $n_۰\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$\begin{aligned}&d(Q_۰u,Q_۱v)\\&<\frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}}max\{d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,Q_۰u),\\&d(P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v,Q_۱v),\\&d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v),\\&\frac{۱}{۲}[d(P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v,Q_۰u)\\&+d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,Q_۱v)]\}.\end{aligned}$$

در این صورت $Q_۰,Q_۱,P_۱,P_۲,\dots,P_{۲n_۰}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $۰<t<۱$ و هر $u,v\in X$ و هر $n_۰\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$\begin{aligned}&d(Q_۰u,Q_۱v)\\&<\frac{t}{b^{۲n_۰+۲}}max\{d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,Q_۰u),\\&d(P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v,Q_۱v),\\&d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v),\\&\frac{۱}{۲}[d(P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}v,Q_۰u)\\&+d(P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}u,Q_۱v)]\}.\end{aligned}$$

در این صورت $Q_۰,Q_۱,P_۱,P_۲,\dots,P_{۲n_۰}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای b–متریک کامل با $b>1$ بوده و J یک مجموعه اندیس‌گذاری دلخواه باشد. اگر $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ و $\{P_i\}_{i=۱}^{۲n_۰}$ دو خانواده از خودنگاشت‌ها روی X باشند، که در شرایط زیر صدق کنند:

۱. برای هر $\alpha\in J$، $T_\alpha(X)\subseteq P_۲P_۴\dots P_{۲n_۰}(X)$.

۲. $\beta\in J$ وجود داشته باشد به طوری که $T_\beta(X)\subseteq P_۱P_۳\dots P_{۲n_۰-۱}(X)$.

۳. روابط زیر برقرار باشند:

www.SID.ir

Archive of SID

$$P_2(P_4 \dots P_{2n_0}) = (P_4 \dots P_{2n_0})P_2;$$
$$P_2P_4(P_6 \dots P_{2n_0}) = (P_6 \dots P_{2n_0})P_2P_4;$$
$$\vdots$$
$$P_2P_4 \dots P_{2n_0-2}\left(P_{2n_0}\right) = (P_{2n_0})P_2P_4 \dots P_{2n_0-2};$$
$$T_\beta(P_4 \dots P_{2n_0}) = (P_4 \dots P_{2n_0})T_\beta;$$
$$T_\beta(P_6 \dots P_{2n_0}) = (P_6 \dots P_{2n_0})T_\beta;$$
$$\vdots$$
$$T_\beta P_{2n_0} = P_{2n_0} T_\beta;$$
$$P_1(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})P_1;$$
$$P_1P_3(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})P_1P_3;$$
$$\vdots$$
$$P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}\left(P_{2n_0-1}\right) = (P_{2n_0-1})P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}$$
$$T_\alpha(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})T_\alpha;$$
$$T_\alpha(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})T_\alpha;$$
$$\vdots$$
$$T_\alpha(P_{2n_0-1}) = (P_{2n_0-1})T_\alpha.$$

۴. $P_2P_4 \dots P_{2n_0}$ یا T_β پیوسته باشند.

۵. زوج $(T_\beta, P_2 \dots P_{2n_0})$ سازگار و زوج‌های $(T_\alpha, P_1 \dots P_{2n_0-1})$ برای هر $\alpha \in j$، به طور ضعیف سازگار باشد.

۶. $\varphi \in \phi$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که به ازای هر $u, v \in X$ و $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&d\left(T_\beta u, T_\alpha v\right) \\
&\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, T_\beta u)), \\
&\varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, T_\alpha v)), \\
&\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v)), \\
&\varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, T_\beta u) \\
&+d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, T_\alpha v)])\}.
\end{aligned}$$

در این صورت P_iها برای هر $i = 1, \dots, 2n_0$ و T_αها برای هر $\alpha \in J$، یک نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

اثبات: فرض کنید T_{α_0} یک عنصر ثابت در $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ باشد. در قضیه ۱.۲ قرار می‌دهیم برای یک $\beta \in J$ با شرط (۲) قضیه $Q_0 = T_\beta$ و $Q_1 = T_{\alpha_0}$.

آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که یک $z \in X$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$\begin{aligned}
&T_\beta z = T_{\alpha_0} z = P_2P_4 \dots P_{2n_0} z \\
&= P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z = z.
\end{aligned}$$

فرض کنیم $\alpha \in J$ دلخواه باشد. در این صورت بنا به شرط (۶) قضیه داریم

$$\begin{aligned}
&d\left(T_\beta z, T_\alpha z\right) \\
&\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, T_\beta z)), \\
&\varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z, T_\alpha z)), \\
&\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z)), \\
&\varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z, T_\beta z) \\
&+d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, T_\alpha z)])\}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&d(z, T_\alpha z) \\
&\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi\left(d(z,z)\right), \varphi(d(z, T_\alpha z)), \\
&\varphi\left(d(z,z)\right), \varphi(\frac{1}{2}[d(z,z) + d(z, T_\alpha z)])\} \\
&< \frac{1}{b^{2n_0+2}} d(z, T_\alpha z).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$d(z, T_\alpha z) < d(z, T_\alpha z)$$

و این تناقض است. پس $d(z, T_\alpha z) = 0$. بنابراین به ازای هر $\alpha \in J$، $T_\alpha z = z$. با توجه به شرط (۶) قضیه، P_i ها و T_α ها یک نقطه ثابت مشترک منحصر بفرد در X دارند.

www.SID.ir

Archive of SID

فهرست منابع

[1] Bourbaki, N. Topologic Generale; Herman: Paris, France, (1974).

[2] Bakhtin, I. A., The contraction mapping principle in almost metric spaces, Funct. Anal. 30, (1989), 26–37.

[3] Czerwik, S., Nonlinear set-valued contraction mappings in b−metric spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46(2), (1998), 263–276.

[4] Hussain, N. and Shah, M. H. KKM mappings in cone b−metric spaces, *Comput. Math. Appl.*, 62, (2011), 1677–1684.

[5] Aghajani, A., Abbas, M. and Roshan, J. R., Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces, *Mathematica Slovaca*, 64(4),(2014), 941–960.

[6] Akkouchi, M., Common fixed point theorems for two selfmappings of a b-metric space under an implicit relation, *Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics,* 40(6), (2011), 805-810.

[7] Aydi, H., Bota, M., Karapmar, E., and Mitrović, S., A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications,* (2012): 88: 2012.

[8] Aydi, H., Bota, M., Karapmar, E., Moradi, S., A common fixed point for weak ∅-contractions on b-metric spaces, *Fixed Point Theory,* 13(2), (2012), 337-346.

[9] Boriceanu, M., Strict fixed point theorems for multivalued operators in b−metric spaces, *International Journal of Modern Mathematics*, 4(3), (2009), 285–301.

[10] Boriceanu, M., Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b−metrics, *Studia Univ. "Babes–Bolyai", Mathematica*, Volume LIV, 3, (2009).

[11] Boriceanu, M., Bota, M. and Petrusel, A., Multivalued fractals in b−metric spaces, *Cent. Eur. J. Math*, 8 (2), (2010), 367-377.

[12] Czerwik, S, Dlutek, K. Singh, S. L., Round-off stability of iteration procedures for set-valued operators in b−metric Spaces, *J Nature Phys Sci*., 11, (2007), 87–94.

[13] Hussain, N. Dori´c, D. Kadelburg, Z. and Radenovi´c, S. Suzuki-type fixed point results in metric type spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, (2012).

[14] Ciric, L., Razani, A. Radenovic, S. Ume, J. S., Common fixed point theorems for families of weakly compatible maps, *Comput. Math. Appl.*, 55, (2008), 2533-2543.

www.SID.ir

SID

فیلم های آموزشی
عضویت در خبرنامه
بلاگ مرکز اطلاعات علمی
کارگاه های آموزشی
سرویس ترجمه تخصصی
سرویس های ویژه

کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی

کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترفند های جستجو

کارگاه آنلاین روش تحقیق و مقاله نویسی علوم انسانی

کارگاه آنلاین پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی