



مجله علوم و تکنولوژی پلیمر،

سال بیست و دوم، شماره ۱،

صفحه ۷۳-۶۳، ۱۳۸۸

ISSN : 1016-3255

## بررسی شکست در مواد پلیمری ترد دارای شیار V شکل در بارگذاری برشی خالص

مجیدرضا آیت الهی\*، علیرضا ترابی

تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶

دریافت: ۸۷/۱۰/۱۴، پذیرش: ۸۷/۱۲/۱۷

پدیده شکست مکانیکی در مواد پلیمری ترد به طور ناگهانی و بدون هشدار قبلی رخ می دهد. در قطعات صنعتی ساخته شده از پلیمرهای تردی مانند پلکسی گلاس، گاهی شیارهایی ایجاد می شود. این شیارها مکان های مستعدی برای شکل گیری ترک و در نهایت شکست ترد در این ماده پلیمری هستند. در این پژوهش، شیار موجود در یک قطعه آزمایشگاهی از جنس پلکسی گلاس زیر بارگذاری برش خالص قرار گرفت و مقدار چقرمگی شکست شیار و زاویه شروع شکست قطعه از راه آزمایش به دست آمد. قطعات آزمایشگاهی دارای شیار V شکل با نوک گرد بوده و در آنها زاویه شیار و شعاع نوک آن تغییر می کرد. سپس، نتایج حاصل از آزمایش به کمک معیاری که برای پیش بینی شکست در قطعات ترد دارای شیار V شکل با نوک گرد و زیر بارگذاری برشی خالص پیشنهاد شده، مطالعه شد. نتایج به دست آمده بیانگر تطابق خوب معیار نظری و نتایج تجربی است.

### واژه های کلیدی

پلیمر ترد،

شکست ترد، پلکسی گلاس،

شیار V شکل، شیوه II خالص

\* مسئول مکاتبات، پیام نگار:

[m.ayat@iust.ac.ir](mailto:m.ayat@iust.ac.ir)

## Investigation of Fracture in V-notched Brittle Polymers under Pure Shear Loading

M.R. Ayatollahi\* and A.R. Torabi

Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology,

P.O. Box: 16846-13114, Tehran, Iran

Received 3 January 2009, accepted 7 March 2009

### Abstract

Sudden fracture is one of the major failure modes in brittle materials. Plexiglass (polymethyl methacrylate) is a well known brittle polymer, widely used in various industries. Many types of notches, particularly V-shaped notches, are sometimes used in the components made of plexiglass. These notches can dramatically decrease the load bearing capacity of components due to the concentration of stress at the vicinity of their tips. The stress concentration may result in the crack nucleation and fracture from the tip of a V-notch. In the present paper, a set of notched specimens of plexiglass are subjected to pure mode II loading, in order to determine the mode II fracture toughness and the fracture initiation angle experimentally. These specimens contain rounded-tip V-notches with variable notch opening angles and different notch radii. The experimental results are then predicted by using a failure criterion, suggested for estimating brittle fracture in rounded-tip V-notches under pure shear deformation. A good agreement is shown to exist between the theoretical predictions and the experimental results.

### Key Words

brittle polymer,

brittle fracture, plexiglass,

V-notch, pure mode II

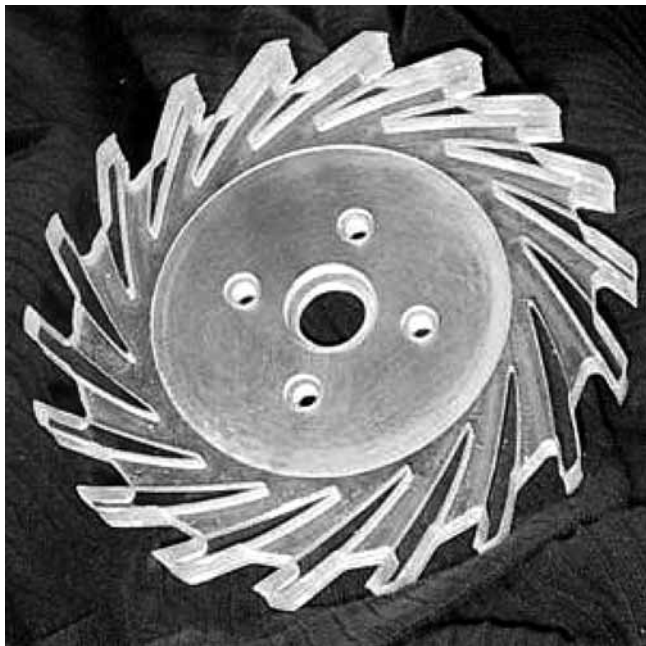
(\* ) To whom correspondence should be addressed.

E-mail: [m.ayat@iust.ac.ir](mailto:m.ayat@iust.ac.ir)

## مقدمه

مواد پلیمری از نقطه نظر واماندگی مکانیکی، به طور عمده به دو نوع کلی دسته بندی می شوند. نوع اول، پلیمرهایی هستند که رفتار نرم دارند و پس از تغییر شکل های برشی و جذب انرژی زیاد دچار واماندگی می شوند. پلیمرهای نوع دوم رفتار ترد دارند و ساز و کار واماندگی مکانیکی در آنها از نوع ترک برداری مویی (crazing) است [۱-۳] که در نهایت می تواند به شکست ترد منتهی شود. ترک مویی ناحیه ای بسیار کوچک در نزدیکی نوک ترک یا نوک شیار است که در اثر اعمال بار دچار تخریب موضعی شده و سبب تضعیف ماده پلیمری در این ناحیه نسبت به بخش های سالم ماده می شود. در نتیجه، ترک مویی مسیری مساعد برای جوانه زنی و گسترش ترک از محل نوک شیار را فراهم می کند. از این رو، در بسیاری از پلیمرهای ترد وقتی که تنش بیشینه اصلی موجود در نوک ترک یا نوک شیار به حالت کششی باشد، شکست ترد به واسطه پاره شدن و گسیختگی ترک های مویی، جوانه زنی ترک از نوک شیار و سپس رشد آن به وجود می آید [۴]. شیارها و به ویژه شیارهای V شکل به دلیل کاربردهای متنوع، به طور گسترده در قطعات و سازه های مهندسی استفاده می شوند. وجود شیار V شکل در قطعه موجب تمرکز شدید تنش در نزدیکی نوک آن شده و استحکام قطعه شیاردار در برابر شکست را به مقدار قابل توجهی کاهش می دهد. چنانچه قطعه شیاردار V شکل از جنس ماده ترد ساخته شده باشد، وقوع شکست ترد در قطعه از محل نوک شیار V شکل بسیار محتمل است. در میان مواد ترد مورد استفاده در صنعت، پلیمرهای ترد جایگاه ویژه ای دارند. از جمله پلیمرهای ترد پر کاربرد در صنایع مختلف به ویژه صنایع هوافضا و خودرو، می توان از پلیکسی گلاس با نام علمی پلی متیل متاکریلات (PMMA) نام برد که پلیمری شفاف است و در قطعات مختلف به کار گرفته می شود. از موارد کاربرد این ماده پلیمری در صنعت که دارای شیار V شکل نوک گرد هستند، می توان به پیچ ها و چرخ دنده های پلیمری اشاره کرد. در شکل ۱ نمایی از چرخ دنده ای از جنس پلیکسی گلاس، که برای انتقال قدرت استفاده می شود، نشان داده شده است.

همان طور که در شکل ۱ ملاحظه می شود، شکل تقریبی گوشه های دندانه های چرخ دنده، شبیه به شیارهای V شکل است که تحلیل مقاومت این دندانه ها در برابر شکست ترد، زیر بارهای متنوع اعمال شده به آنها امری ضروری است. با توجه به این که تمرکز تنش در اطراف شیارهای V شکل نوک تیز بسیار زیاد و احتمال شکست آنها زیر بارهای اعمالی زیاد است، بنابراین به منظور کاهش تمرکز تنش و در نتیجه افزایش مقاومت این قطعات در برابر شکست ترد، معمولاً از شیارهای

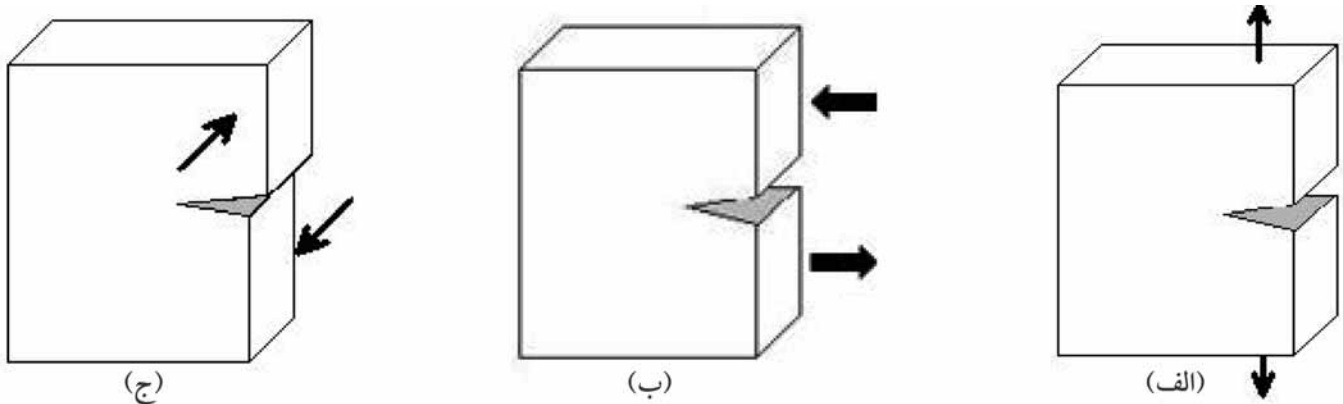


شکل ۱ - نمایی از چرخ دنده ای از جنس PMMA مورد استفاده در یک ساز و کار انتقال قدرت [۵].

V شکل با نوک گرد استفاده می شود.

به طور کلی در کاربردهای عملی، شیارهای V شکل زیر بارهای مختلفی قرار می گیرند. این بارگذاری ها به طور عمده به سه گروه کلی دسته بندی می شوند. در بارگذاری نوع اول که به بارگذاری شیوه I موسوم است، لبه های شیار V شکل نسبت به یکدیگر فقط باز می شوند. در بارگذاری نوع دوم که به نام شیوه II خوانده می شود، لبه های شیار به شکل داخل صفحه ای در راستای نیم ساز شیار فقط نسبت به یکدیگر می لغزند و هیچ نوع بازشدگی نسبت به یکدیگر ندارند. در نوع سوم که بارگذاری شیوه III نامیده می شود، لبه های شیار به شکل خارج صفحه ای نسبت به یکدیگر می لغزند. چنانچه قطعه دارای شیار V شکل، هم زمان زیر دو یا سه نوع بارگذاری یاد شده قرار گیرد، بارگذاری به شیوه ترکیبی است. شکل ۲ نمایی از شیوه های بارگذاری در شیارهای V شکل را به شکل طرح دار نشان می دهد.

با توجه به اهمیت شکست ترد در شیارهای V شکل، ارائه معیاری برای پیش بینی چقرمگی شکست (مقاومت در برابر شکست) در این شیارها امری ضروری است. تاکنون، معیارهای متفاوتی برای پیش بینی شکست ترد در شیارهای V شکل با نوک گرد زیر بارگذاری شیوه I خالص ارائه شده است. از آن جمله می توان به معیارهای Gomez & Elices [۶، ۷] و Leguillon & Yosibash [۸] اشاره کرد. برای بررسی رفتار شکست ترد در قطعات دارای شیار V شکل نوک گرد زیر بارهای شیوه ترکیبی I/II

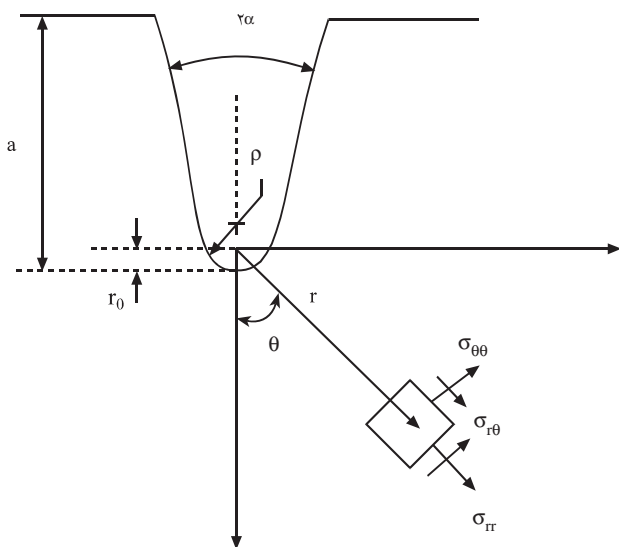


شکل ۲- نمایی از شیوه‌های بارگذاری در قطعات دارای شیار V شکل: (الف) شیوه I، (ب) شیوه II و (ج) شیوه III.

مربوط به آن نشان می‌دهد.

توزیع تنش در اطراف یک شیار V شکل با نوک گرد، زیر بارگذاری شیوه ترکیبی I/II به ترتیب زیر نوشته می‌شود [۱۱]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I^{V,p}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_1}}} \begin{Bmatrix} m_{\theta\theta}(\theta) \\ m_{rr}(\theta) \\ m_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^{(I)} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} \begin{Bmatrix} n_{\theta\theta}(\theta) \\ n_{rr}(\theta) \\ n_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^{(I)} + \frac{K_{II}^{V,p}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_2}}} \begin{Bmatrix} m_{\theta\theta}(\theta) \\ m_{rr}(\theta) \\ m_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^{(II)} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2} \begin{Bmatrix} n_{\theta\theta}(\theta) \\ n_{rr}(\theta) \\ n_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix}^{(II)} \quad (1)$$



شکل ۳- هندسه شیار V شکل با نوک گرد در حالت کلی به همراه دستگاه مختصات قطبی مربوط به آن.

تاکنون تنها یک معیار ارائه شده است که فقط قابلیت پیش بینی شکست در شیارهای V شکل با شعاع‌های نوک شیار خیلی کوچک را دارند [۹]. هم‌چنین، معیار مزبور قابلیت پیش‌بینی شکست زیر بارهای شیوه II خالص را ندارد. با توجه به این که بارگذاری برشی، یکی از بارگذاری‌های پرکاربرد در قطعات شیاردار V شکل است، بنابراین ارائه معیاری برای پیش‌بینی شکست در این شیارها، زیر بارگذاری شیوه II خالص امری ضروری به نظر می‌رسد.

در این پژوهش، معیاری موسوم به RV-MTS برای پیش‌بینی چقرمگی شکست و زاویه شروع شکست در شیارهای V شکل با نوک گرد، زیر بارگذاری برشی خالص ارائه شده و به کمک نتایج آزمون‌های شکست انجام شده توسط نویسندگان مقاله روی نمونه‌های آزمایشگاهی از جنس پلکسی گلاس (PMMA) ارزیابی شده است. اساس این معیار بر پایه معیار بیشینه تنش محیطی است که پیش از این برای بررسی شکست شیوه ترکیبی و شیوه II خالص در قطعات ترک‌دار ترد، پیشنهاد شده و مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰].

در بخش بعد، ابتدا میدان تنش در اطراف شیارهای V شکل با نوک گرد ارائه می‌شود، سپس جزئیات معیار RV-MTS و نتایج به دست آمده از آن در ارتباط با پیش‌بینی شکست در شیارهای V شکل از جنس پلکسی گلاس ارائه می‌شود.

### توزیع تنش در اطراف نوک شیارهای V شکل زیر بارگذاری مرکب داخل صفحه‌ای

توزیع تنش در اطراف نوک شیارهای V شکل زیر بارگذاری ترکیبی داخل صفحه‌ای، به شکل مدون و در قالب یک فرمول‌بندی تقریبی توسط Filippi و همکاران [۱۱] ارائه شده است. شکل ۳ هندسه شیار V شکل با نوک گرد را در حالت کلی به همراه دستگاه مختصات قطبی

جدول ۱- پارامترهای مهم در معادله‌های میدان تنش به همراه علامت‌های اختصاری آنها.

پارامتر	علامت اختصاری
$1-\lambda_1$	S
$1+\lambda_1$	R
$1-\lambda_2$	U
$1+\lambda_2$	T
$1-\mu_1$	W
$1+\mu_1$	V
$1-\mu_2$	Y
$1+\mu_2$	X
$\mu_1-\lambda_1$	P
$\mu_2-\lambda_2$	Q
$r_{c,v} / r_0$	H
$\frac{1}{[1+\lambda_1+\chi_{b1}(1-\lambda_1)]}$	L
$\frac{q}{4(q-1)[1+\lambda_1+\chi_{b1}(1-\lambda_1)]}$	M
$\frac{1}{[1-\lambda_2+\chi_{b2}(1+\lambda_2)]}$	N
$\frac{q}{4(\mu_2-1)[1-\lambda_2+\chi_{b2}(1+\lambda_2)]}$	O

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_I^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r} S} \left[ \begin{array}{l} L(R \cos S\theta + \chi_{b1} S \cos R\theta) \\ + \left(\frac{r}{r_0}\right)^P M(\chi_{d1} V \cos W\theta + \chi_{c1} \cos V\theta) \end{array} \right] + \frac{K_{II}^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r} U} \left[ \begin{array}{l} N(T \sin U\theta + \chi_{b2} T \sin T\theta) \\ + \left(\frac{r}{r_0}\right)^Q O(\chi_{d2} X \sin Y\theta - \chi_{c2} \sin X\theta) \end{array} \right] \quad (6)$$

در شرایط بارگذاری شیوه II خالص، مقدار  $K_I^{V,\rho}$  برابر با صفر است و تنش محیطی به شکل زیر ساده می شود:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_{II}^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r} U} \left[ \begin{array}{l} N(T \sin U\theta + \chi_{b2} T \sin T\theta) \\ + \left(\frac{r}{r_0}\right)^Q O(\chi_{d2} X \sin Y\theta - \chi_{c2} \sin X\theta) \end{array} \right] \quad (7)$$

در این معادله  $K_I^{V,\rho}$  و  $K_{II}^{V,\rho}$  ضرایب شدت تنش شیار در حالت شیوه‌های I و II خالص و  $r_0$  فاصله نوک شیار از مبدأ مختصات قطبی است که مقدار آن از معادله (۲) معین می شود. توابع  $m_{ij}$  و  $n_{ij}$  بر حسب زاویه  $\theta$  در مرجع [۱۲] موجود هستند.  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  مقادیر ویژه هستند که مقدار عددی این پارامترها وابسته به زاویه دهانه شیار است و در مرجع [۱۱] داده شده اند.

معادله (۲) برای شیارهای V شکل نوک گرد برقرار است [۱۱]:

$$r_0 = \frac{q-1}{q} \rho, \quad q = \frac{2\pi-2\alpha}{\pi} \quad (2)$$

در معادله (۲)،  $2\alpha$  زاویه دهانه شیار و  $\rho$  شعاع گردشدگی نوک شیار است. مقدار ضرایب شدت تنش شیار را می توان از معادلات زیر به دست آورد [۱۲، ۱۳]:

$$K_I^{V,\rho} = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_0, 0) r_0^{1-\lambda_1}}{1+\omega_1} \quad (3)$$

$$K_{II}^{V,\rho} = \lim_{r \rightarrow r_0} \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_{r\theta}(r, 0) r^{1-\lambda_2}}{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2 - \lambda_2}} \quad (4)$$

مقادیر  $\omega_1$  که وابسته به زاویه دهانه شیار است، در مرجع [۱۱] داده شده است. به کمک معادلات (۳) و (۴) می توان مقدار ضرایب شدت تنش شیار را به ازای زوایای مختلف دهانه شیار و شعاع گرد شدگی نوک شیار به دست آورد. مطابق با معادله (۱)، تنش محیطی در اطراف نوک شیارهای V شکل با نوک گرد را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_I^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r}^{1-\lambda_1}} \left[ m_{\theta\theta}(\theta)^{(I)} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1 - \lambda_1} n_{\theta\theta}(\theta)^{(I)} \right] + \frac{K_{II}^{V,\rho}}{\sqrt{2\pi r}^{1-\lambda_2}} \left[ m_{\theta\theta}(\theta)^{(II)} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2 - \lambda_2} n_{\theta\theta}(\theta)^{(II)} \right] \quad (5)$$

به منظور ساده سازی معادله‌های میدان تنش و استخراج معادله‌های مربوط به معیار شکست به شکل ساده تر، پارامترهای مهم در این معادله‌ها در قالب علائم در جدول ۱ نشان داده شده اند.

پارامترهای  $X_{b1}$  و  $X_{b2}$  وابسته به زاویه دهانه شیار هستند و در مرجع [۱۱] داده شده اند.

با استفاده از معادله (۵) و به کمک جدول ۱ می توان تنش محیطی را در اطراف نوک شیارهای V شکل با نوک گرد به شکل زیر نوشت:

$$(\sigma_{\theta\theta})_c = \frac{K_{IIc}^{V,P}}{\sqrt{2\pi}(r_{c,V})^U} \left[ \frac{N(T \sin U\theta_0 + \chi_{b_2} T \sin T\theta_0)}{+ \left(\frac{r_{c,V}}{r_0}\right)^Q O(\chi_{d_2} X \sin Y\theta_0 - \chi_{c_2} \sin X\theta_0)} \right] \quad (10)$$

معادله (۱۰)، معادله حاکم بر شکست قطعه شیاردار V شکل با نوک گرد، در شرایط بارگذاری شیوه II خالص است. از آن جا که در مراجع قبلی، اطلاعات گسترده‌ای از چقرمگی شکست شیارها در بارگذاری شیوه I موجود است، ترجیح داده می‌شود که مقدار  $K_{IIc}^{V,P}$  برحسب مقدار متناظر آن در شیوه I یعنی  $K_{Ic}^{V,P}$  نمایش داده شود. در این حالت می‌توان از آزمایش‌های جدید و مجزا برای شیوه II پرهیز کرد. بنابراین، در ادامه نحوه محاسبه  $K_{IIc}^{V,P} / K_{Ic}^{V,P}$  شرح داده می‌شود.

در شرایط بارگذاری شیوه I خالص، شکست قطعه شیاردار V شکل با نوک گرد هنگامی رخ می‌دهد که مقدار ضریب شدت تنش شیار به مقداری بحرانی به نام چقرمگی شکست شیوه I شیار  $K_{Ic}^{V,P}$  برسد [۷]. این پارامتر بستگی به جنس ماده، زاویه دهانه شیار و شعاع نوک شیار داشته و به کمک آزمایش قابل تعیین است. بنابراین، پارامتر مزبور جزء خواص ثابت ماده نیست و به هندسه شیار نیز بستگی دارد. شرایط حاکم بر شکست قطعه شیاردار V شکل در حالت شیوه I خالص عبارتند از:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0 \\ K_I^{V,P} &= K_{Ic}^{V,P} \\ K_{II}^{V,P} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= (\sigma_{\theta\theta})_c \end{aligned} \quad (11)$$

با جای گذاری معادله (۱۱) در معادله (۶)، در شرایط شیوه I خالص می‌توان نوشت:

$$(\sigma_{\theta\theta})_c = \frac{K_{Ic}^{V,P}}{\sqrt{2\pi}(r_{c,V})^S} \left[ L(R + \chi_{b_1} S) + H^P M(\chi_{d_1} V + \chi_{c_1}) \right] \quad (12)$$

با برقراری تساوی بین معادله‌های (۱۰) و (۱۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{K_{IIc}^{V,P}}{K_{Ic}^{V,P}} = r_{c,V}^{(U-S)} \frac{L(R + \chi_{b_1} S) + H^P M(\chi_{d_1} V + \chi_{c_1})}{N(T \sin U\theta_{0II} + \chi_{b_2} T \sin T\theta_{0II}) + H^Q O(\chi_{d_2} X \sin Y\theta_{0II} - \chi_{c_2} \sin X\theta_{0II})} \quad (13)$$

عبارت  $K_{IIc}^{V,P} / K_{Ic}^{V,P}$  نسبت چقرمگی شکست شیار نامیده می‌شود. بنابراین، می‌توان از معیار RV-MTS (معادله ۱۳) برای پیش‌بینی

## معیار شکست برای شیارهای V شکل با نوک گرد زیر بارگذاری شیوه II خالص

معیار بیشینه تنش محیطی (MTS) معیاری معروف و متداول برای بررسی شکست ترد در قطعات ترک دار زیر بارگذاری‌های شیوه ترکیبی I/II است [۱۰]. طبق معیار بیشینه تنش محیطی، شکست در قطعه دارای ترک نوک تیز هنگامی اتفاق می‌افتد که مقدار تنش محیطی در فاصله بحرانی  $r_c$  از نوک ترک به مقدار بحرانی  $(\sigma_{\theta\theta})_c$  برسد. در این مقاله، معیار MTS به حوزه شیارهای V شکل با نوک گرد تعمیم داده شده (معیار RV-MTS) و از آن برای بررسی شکست این شیارها زیر بارگذاری شیوه II خالص استفاده می‌شود.

برای محاسبه زاویه شروع شکست شیارهای V شکل نوک گرد زیر بارگذاری برشی خالص، طبق معیار MTS ضروری است که مشتق اول تنش محیطی نسبت به پارامتر  $\theta$  برابر با صفر باشد. زاویه شکست، زاویه‌ای است که در ازای آن  $\sigma_{\theta\theta}$  بیشینه است و با  $\theta_0$  نشان داده شده و هم‌چنین در لحظه شکست، پارامتر  $r$  برابر با فاصله بحرانی شیار  $(r_{c,V})$  است.  $r_{c,V}$  فاصله بحرانی برای شیارهای V شکل با نوک گرد است که از مبدا مختصات قطبی (شکل ۳) و نه از نوک شیار اندازه‌گیری می‌شود. این پارامتر علاوه بر خواص ماده، به هندسه شیار نیز بستگی دارد. بنابراین:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{r=r_{c,V}} = 0 \quad (8)$$

با جای گذاری معادله (۷) در معادله (۸) معادله (۹) حاصل می‌شود:

$$\left[ \frac{N(TU \cos U\theta_0 + \chi_{b_2} T^2 \cos T\theta_0)}{+ \left(\frac{r_{c,V}}{r_0}\right)^Q O(\chi_{d_2} XY \cos Y\theta_0 - \chi_{c_2} X \cos X\theta_0)} \right] = 0 \Rightarrow \theta_0 = \theta_{0II} \quad (9)$$

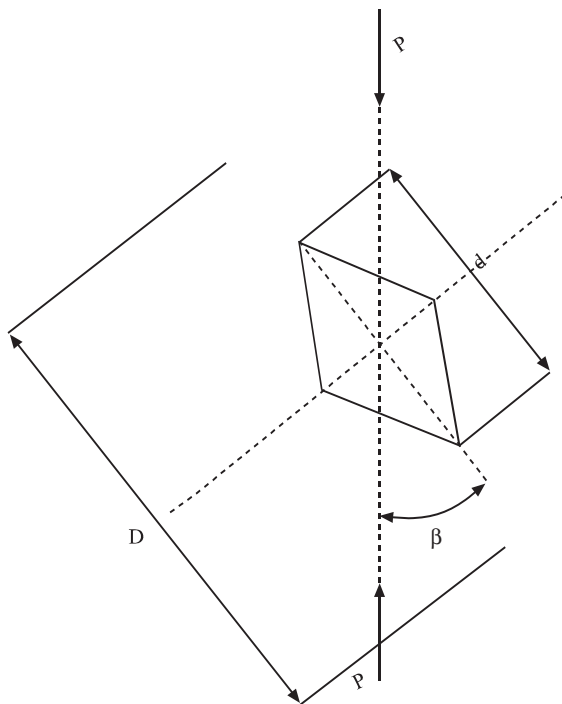
بر اساس این معادله، در حالت بارگذاری شیوه II خالص، شکست در امتداد  $\theta_0 = \theta_{0II}$  از نوک شیار شروع می‌شود که مقدار  $\theta_{0II}$  از حل معادله (۹) به دست آمده و بستگی به فاصله بحرانی شیار  $a(r_{c,V})$ ، زاویه دهانه و شعاع نوک آن دارد. طبق معیار MTS، شکست هنگامی رخ می‌دهد که تنش محیطی در فاصله  $r = r_{c,V}$  از مبدا مختصات شیار به مقدار بحرانی  $(\sigma_{\theta\theta})_c$  برسد. هم‌چنین، در لحظه شکست مقدار ضریب شدت تنش شیوه II شیار، به مقدار بحرانی  $(K_{IIc}^{V,P})$  می‌رسد. پارامتر  $K_{IIc}^{V,P}$  اصطلاحاً چقرمگی شکست قطعه شیاردار زیر بارگذاری شیوه II خالص نامیده می‌شود. بنابراین، در شرایط شکست می‌توان معادله (۷) را به شکل زیر نوشت:



شیارهای V شکل نوک گرد استفاده شده است. شکل ۴ نمایی از این نمونه آزمایشگاهی را نشان می دهد.

در این شکل، D و d به ترتیب بیان گر قطر صفحه و قطر بزرگ تر شیار و P نشان دهنده بار فشاری اعمال شده به نمونه است. در شرایطی که راستای نیم ساز شیار در امتداد بار اعمالی است (بارگذاری با زاویه  $\beta = 0$ ) به علت تقارن هندسه و بارگذاری، تغییر شکل در شیار به صورت شیوه I خالص است. با تغییر زاویه نیم ساز شیار نسبت به راستای بارگذاری ( $\beta$ )، به تدریج آثار شیوه II ظاهر می شود و بارگذاری به شکل شیوه ترکیبی I/II خواهد بود. با افزایش این زاویه به تدریج از آثار شیوه I کاسته می شود، تا جایی که به ازای زاویه خاص  $\beta$  می توان به بارگذاری شیوه II خالص دست یافت.

برای محاسبه زاویه متناظر با تغییر شکل شیوه II خالص در نمونه ها (زاویه  $\beta_{II}$ )، زاویه محور نیم ساز شیار نسبت به راستای بارگذاری مرتباً تغییر کرده و هر بار مقدار تنش محیطی روی نیم ساز شیار به کمک روش اجزای محدود محاسبه می شود. در نهایت با افزایش زاویه بارگذاری، می توان به زاویه ای دست یافت که به ازای آن، مقدار تنش محیطی روی نوک شیار برابر با صفر شده و بنابراین مقدار ضریب شدت تنش شیار شیوه I ( $K_I^{V,P}$ ) بر اساس معادله (۳) برابر با صفر می شود. در این حالت تغییر شکل در نوک شیار به شکل شیوه II خالص است. به منظور تعیین زاویه  $\beta_{II}$  بر حسب زوایای مختلف دهانه شیار، صفحه برزلی نشان داده



شکل ۴- نمای کلی از نمونه صفحه برزلی دارای شیار V شکل (RV-BD).

چقرمگی شکست قطعات شیاردار V شکل با نوک گرد، زیر بارگذاری شیوه II خالص بهره برد.

همان طور که از معادلات ارائه شده مشاهده می شود، برای محاسبه نسبت چقرمگی شکست شیار و زاویه شروع شکست، محاسبه مقدار فاصله بحرانی  $r_{c,v}$  ضروری است. برای محاسبه پارامتر  $r_{c,v}$  می توان از معادله شکست مربوط به بارگذاری شیوه I خالص، که در واقع همان معیار تنش نقطه ای است (معادله ۱۲) استفاده کرد. بنابراین، با استفاده از معادله (۱۲) می توان نوشت:

$$(r_{c,v})^S = \frac{K_{Ic}^{V,P}}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{\theta\theta})_c} \left[ \frac{L(R + \chi_{b1} S)}{+ (\frac{r_{c,v}}{r_0})^P M(\chi_{d1} V + \chi_{c1})} \right] \quad (14)$$

با ساده سازی معادله (۱۴) و در صورت معلوم بودن  $K_{Ic}^{V,P}$  و  $(\sigma_{\theta\theta})_c$ ، می توان مقدار پارامتر  $r_{c,v}$  را از حل معادله (۱۵) به شکل ضمنی به دست آورد:

$$r_{c,v} - \left[ \frac{K_{Ic}^{V,P} \left[ L(R + \chi_{b1} S) + (\frac{r_{c,v}}{r_0})^P M(\chi_{d1} V + \chi_{c1}) \right]}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{\theta\theta})_c} \right]^{\frac{1}{S}} = 0 \quad (15)$$

در معادله (۱۵) مقدار  $r_{c,v}$  بستگی به زاویه دهانه شیار و شعاع نوک آن (از طریق پارامتر) و  $K_{Ic}^{V,P}$  دارد. توجه به این نکته ضروری است که تمام پارامترهای استفاده شده در معادله (۱۵)، برای یک قطعه شیاردار V شکل با زاویه دهانه و شعاع شیار و جنس مشخص، مقادیری معلوم هستند. تنها پارامتر مجهول در این معادله  $r_{c,v}$  است که با حل معادله (۱۵) به دست می آید. محاسبات ریاضی نشان دهنده آن است که این معادله فقط دارای یک جواب حقیقی است. از آن جا که  $r_{c,v}$  پارامتری حقیقی است، در حالتی که معادله (۱۵) دارای جواب های مختلط نیز باشد، این جواب ها قابل قبول نیستند. پارامتر  $(\sigma_{\theta\theta})_c$  جزء خواص ثابت ماده است و برای مواد ترد و شبه ترد به طور کلی برابر با استحکام نهایی قطعه در حالت کشش  $(\sigma_{II})$  در نظر گرفته می شود.

در ادامه ضروری است، از راه آزمایش بررسی شود که آیا معیار پیشنهاد شده در این بخش می تواند تخمین قابل قبولی از شکست مواد پلیمری ترد شیاردار زیر بارگذاری شیوه II ارائه دهد یا خیر. به این منظور در بخش بعد، قطعه آزمایشگاهی جدیدی از جنس پلیمر ترد معرفی و پارامترهای شیار برای آن به کمک روش اجزای محدود معین می شود.

### تحلیل اجزای محدود

در این پژوهش، از نمونه های صفحه ای برزلی دارای شیار V شکل

محدود معین می‌شوند. هم‌چنین، آزمون‌های شکست شیوه II خالص بر اساس زوایای خاص  $\beta_{II}$  که قبلاً با روش اجزای محدود به دست آمده‌اند، انجام شده‌اند. زوایای دهانه شیار برابر با  $30^\circ$ ،  $60^\circ$  و  $90^\circ$  درجه در نظر گرفته شده است. برای مطالعه آثار تغییر شعاع نوک شیار  $\rho$  در شکست نمونه‌ها، برای شعاع نوک شیار سه مقدار  $1$ ،  $2$  و  $4$  mm در نظر گرفته شده است که در مجموع ۹ حالت هندسی مختلف برای نمونه‌ها وجود دارد. به ازای هر کدام از شرایط بارگذاری شیوه‌های I و II، ۳ آزمون شکست و در مجموع تعداد ۵۴ آزمون برای ارزیابی معیار RV-MTS انجام شده است.

**شکل ۵** نمایی از نمونه RV-BD را به هنگام آزمایش شکست شیوه II خالص (برش خالص در امتداد نیم‌ساز شیار) نشان می‌دهد. هم‌چنین، در **شکل ۶** نمایی از نمونه‌های شیاردار پس از آزمون شکست شیوه‌های I و II نشان داده شده است.

ذکر این نکته ضروری است که برای هر زاویه دهانه شیار مشخص  $(2\alpha)$ ، مقدار متوسط پارامتر  $K_{IC}^{V,\rho}$  به کمک آزمون شکست شیوه I خالص (زاویه بارگذاری  $\beta = 0^\circ$ ) به دست می‌آید. برای محاسبه مقادیر ضرایب شدت تنش شیار متناظر با بارهای شکست، مطابق با توضیحات ارائه شده در بخش تحلیل اجزای محدود، بارهای بحرانی به دست آمده از آزمون‌های شکست، در راستای معلوم روی مدل اجزای محدود نمونه‌ها اعمال شده و مقادیر  $K_{IC}^{V,\rho}$  و  $K_{IIc}^{V,\rho}$  محاسبه می‌شوند.



شکل ۵ - نمایی از نمونه RV-BD به هنگام آزمایش شکست شیوه II خالص.

شده در **شکل ۴** به کمک نرم‌افزار ABAQUS مدل‌سازی شده و مقدار  $\sigma_{\theta\theta}$  در امتداد نیم‌ساز شیار در زوایای مختلف  $\beta$  مورد مطالعه قرار گرفته است. محاسبات اجزای محدود نشان می‌دهد،  $\beta_{II}$  بستگی چندانی به شعاع نوک شیار ندارد و به طور تقریبی مستقل از این پارامتر است. برای زوایای دهانه شیار  $30^\circ$ ،  $60^\circ$  و  $90^\circ$  درجه، زوایای بارگذاری متناظر با شرایط شیوه II خالص ( $\beta_{II}$ ) به ترتیب برابر با  $25^\circ$ ،  $30^\circ$  و  $35^\circ$  درجه هستند.

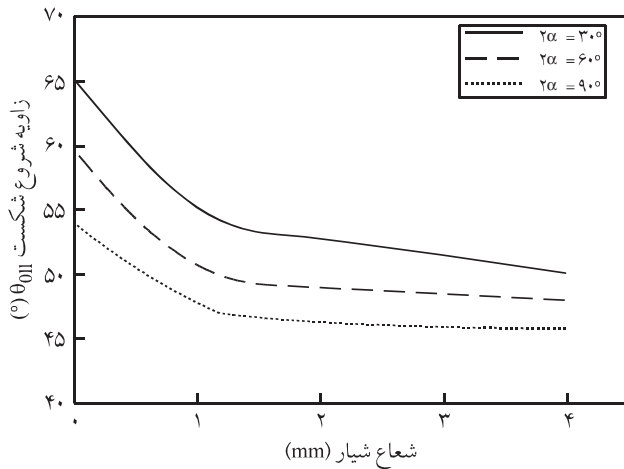
برای محاسبه مقادیر ضرایب شدت تنش شیار، ضروری است تا مدلی از نمونه‌هایی که رفتار شکست آنها بررسی شد، در یک نرم‌افزار اجزای محدود ایجاد شده و بارگذاری مربوط روی نمونه‌ها اعمال شوند. با اعمال بارگذاری روی مدل اجزای محدود نمونه‌ها، برای شرایط شیوه I خالص، مقدار تنش‌های محیطی و برای شرایط شیوه II خالص، تنش‌های برشی  $\sigma_{r\theta}$  در راستای نیم‌ساز شیار به کمک نرم‌افزار اجزای محدود محاسبه می‌شوند. با معلوم بودن تنش‌های محیطی و برشی متناظر با بارگذاری مربوط و با استفاده از معادلات (۳) و (۴)، مقادیر ضرایب شدت تنش شیار محاسبه می‌شوند.

## بررسی تجربی

یکی از نمونه‌های آزمایشگاهی مورد استفاده برای مطالعه تجربی شکست در قطعات ترک‌دار نمونه صفحه برزلی ترک‌دار (BD) است که تاکنون توسط پژوهشگران مختلف استفاده شده است [۱۴، ۱۵]. به منظور ارزیابی دقت معیار RV-MTS، در پژوهش حاضر یک شیار داخلی V شکل جای‌گزین ترک شده و از نمونه‌های صفحه برزلی دارای شیار V شکل (RV-BD) استفاده شده است. نمونه‌ها از جنس پلکسی‌گلاس با نام علمی پلی‌متیل متاکریلات (PMMA) است که پلیمری شفاف، نسبتاً همگن و همسان‌گرد است و برای مطالعه شکست ترد، مناسب است. آزمایش‌ها در دمای محیط انجام شده‌اند. خواص مکانیکی PMMA استفاده شده در این آزمایش‌ها، در دمای محیط به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}\sigma_u &= 70.5 \text{ MPa} \\ K_{IC} &= 1.96 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} \\ E &= 2963 \text{ MPa} \\ \nu &= 0.38\end{aligned}\quad (16)$$

در تمام نمونه‌ها، قطر نمونه (D) برابر با  $80$  mm، قطر شیار (d) برابر با  $40$  mm و ضخامت نمونه  $10$  mm است. در این آزمایش بار به شکل متمرکز و فشاری از بالا و پایین به نمونه اعمال می‌شود. همان‌طور که قبلاً گفته شد، مقادیر  $K_{IIc}^{V,\rho}$  و  $K_{Ic}^{V,\rho}$  به کمک تحلیل‌های اجزای

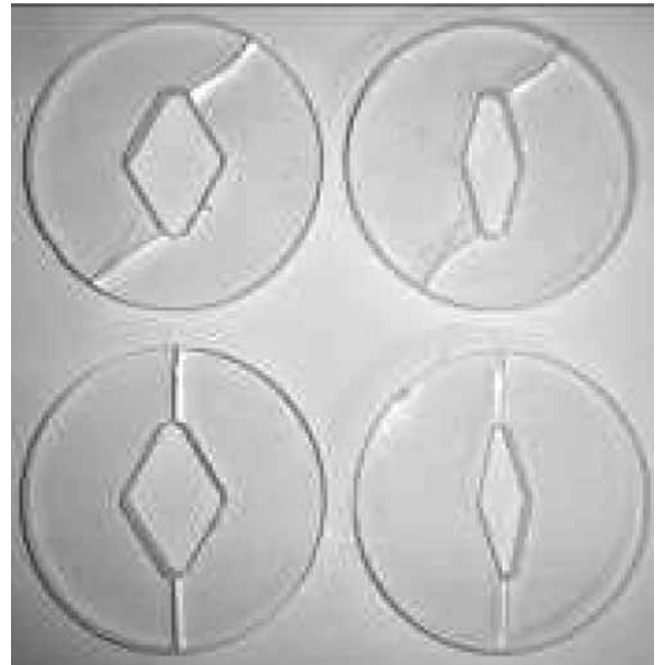


شکل ۷- پیش بینی معیار RV-MTS در ارتباط با تغییرات زاویه شروع شکست برای نمونه‌های PMMA در دمای محیط بر حسب تغییرات شعاع نوک شیار برای زوایای مختلف دهانه شیار.

شعاع‌های مختلف نوک آن به دست آورد. در شکل ۷ پیش بینی معیار RV-MTS در ارتباط با تغییرات زاویه شروع شکست برای نمونه‌های PMMA در دمای محیط بر حسب تغییرات شعاع نوک شیار، برای زوایای مختلف دهانه شیار نشان داده شده است.

در شکل‌های ۸ تا ۱۰، تغییرات زاویه شروع شکست به ازای تغییرات شعاع نوک شیار برای زوایای دهانه شیار ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه به همراه نتایج آزمایشگاهی نشان داده شده‌اند.

پس از محاسبه زوایای شروع شکست نمونه‌ها ( $\theta_{0II}$ )، می‌توان به کمک معادله (۱۳) مقدار نسبت چقرمگی شکست شیار را زیر بارگذاری شیوه II خالص، به ازای زوایای مختلف دهانه شیار و شعاع‌های مختلف نوک شیار به دست آورد. در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ منحنی‌های پیش‌بینی معیار RV-MTS درباره تغییرات نسبت چقرمگی شکست شیار، برای نمونه‌های PMMA در دمای محیط بر حسب



شکل ۶- نمایی از قطعات RV-BD پس از شکست زیر بارگذاری‌های شیوه‌های خالص I و II.

## نتایج و بحث

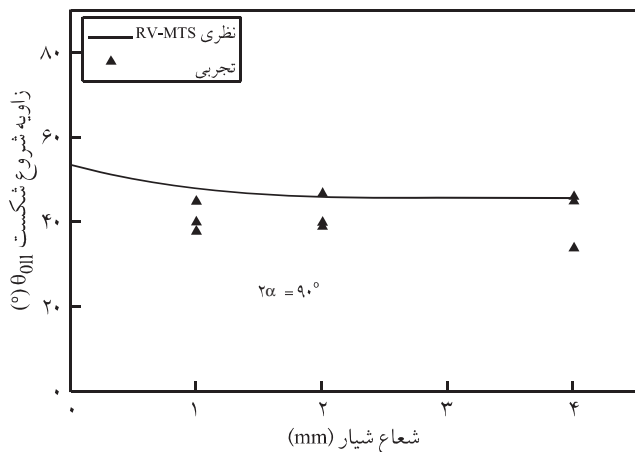
همان‌طور که قبلاً گفته شد، مطابق با معادله (۱۳)، برای تعیین نسبت چقرمگی شکست در شیارهای V شکل با نوک گرد ضروری است که پارامتر  $r_{c,v}$  به کمک معادله (۱۵) معین شود. این پارامتر بستگی به  $\rho$ ،  $\sigma_u$  دارد و مقدار آن در جدول ۲ برای شیارهای مختلف ذکر شده است.

با معلوم بودن مقدار پارامتر  $r_{c,v}$  و هم‌چنین سایر پارامترهای معرفی شده در جدول ۱، می‌توان با حل معادله (۹) زاویه شروع شکست متناظر با بارگذاری شیوه II خالص را به ازای زوایای مختلف دهانه شیار و

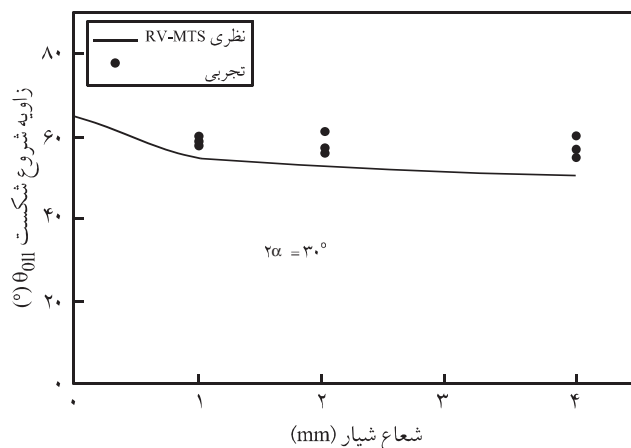
جدول ۲- مقادیر پارامترهای  $r_{c,v}$  و  $K_{IC}^{V,P}$  به ازای زوایای دهانه و شعاع‌های نوک شیار مختلف.

$2\alpha = 90^\circ$			$2\alpha = 60^\circ$			$2\alpha = 30^\circ$			پارامتر
$\rho$ (mm)									
۴	۲	۱	۴	۲	۱	۴	۲	۱	
۴/۱۸۵	۳/۶۰	۲/۶۵	۳/۵۲	۲/۹۳	۲/۲	۳/۲	۲/۵	۲/۰۵	$K_{IC}^{V,P}$ (MPa $m^{(1-\lambda_1)}$ ) (مقدار متوسط)
۰/۴۹۸	۰/۸۷۰	۱/۵۷۰	۰/۴۴۹	۰/۸۵۱	۱/۴۳۳	۰/۳۴۸	۰/۶۸۶	۱/۳۳۶	$r_{c,v}$ و معادله (۱۵) (mm)





شکل ۱۰ - تغییرات زاویه شروع شکست به ازای تغییرات شعاع نوک شیار برای زاویه دهانه شیار ۹۰ درجه.

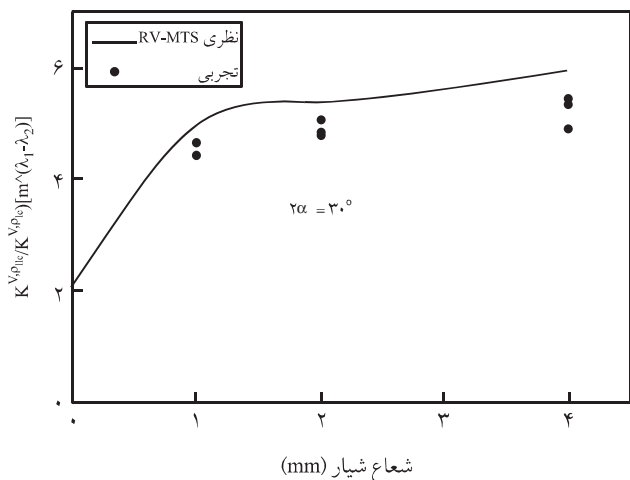


شکل ۸ - تغییرات زاویه شروع شکست به ازای تغییرات شعاع نوک شیار برای زاویه دهانه شیار ۳۰ درجه.

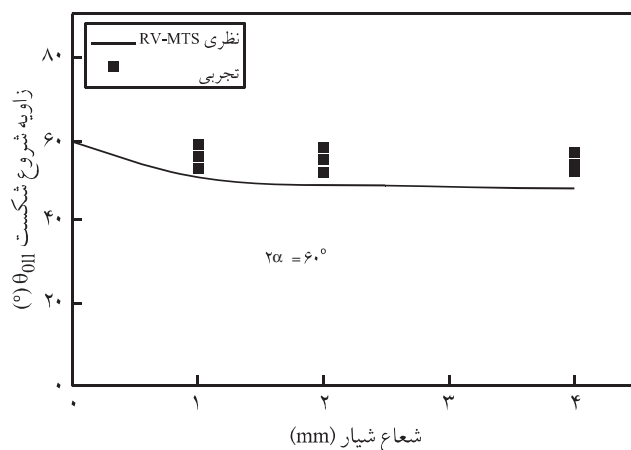
کمتر از پیش بینی های نظری است. در شکل های ۱۱ تا ۱۳ مشاهده می شود که با افزایش زاویه دهانه شیار، مقدار عددی پارامتر نسبت چقرمگی شکست شیار افزایش می یابد. علت آن است که با افزایش زاویه دهانه شیار، مقدار عددی چقرمگی شکست شیار زیر بارگذاری شیوه II خالص ( $K_{Ic}^{V,0,P}$ ) به شکل فزاینده ای افزایش می یابد که می تواند به دلیل رشد سریع پارامتر  $r^{1-\lambda_2}$  در معادله (۴) باشد. هم چنین مشاهده می شود، با افزایش شعاع نوک شیار، مقدار پارامتر نسبت چقرمگی شکست افزایش می یابد. علت این پدیده مربوط به کاهش تمرکز تنش در نزدیکی نوک شیار است. محاسبات انجام شده نشان می دهد که متوسط اختلاف موجود بین

تغییرات شعاع نوک شیار نشان داده شده اند. این شکل ها به ترتیب مربوط به زوایای دهانه شیار ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه بوده و نتایج تجربی نیز در آنها ارائه شده است.

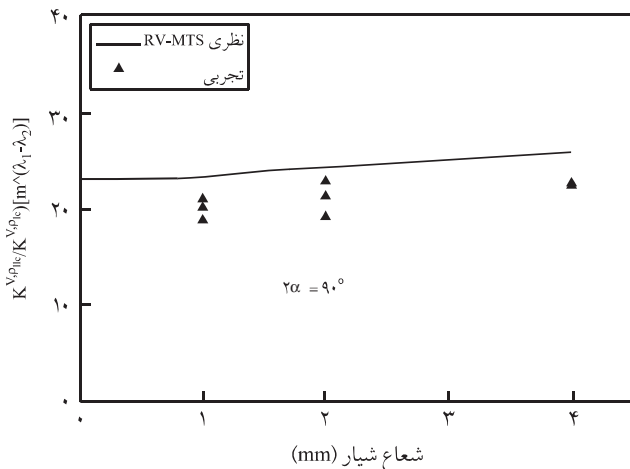
شکل ۷ نشان می دهد که افزایش دو پارامتر زاویه دهانه شیار و شعاع نوک شیار موجب کاهش زاویه شروع شکست زیر بارگذاری شیوه II خالص ( $\theta_{0II}$ ) می شود. هم چنین، در شکل های ۸ و ۹ مشاهده می شود، برای زوایای دهانه شیار ۳۰ و ۶۰ درجه، به ازای تمام شعاع های نوک شیار، مقادیر تجربی زاویه شروع شکست، کمی بیش از مقادیر مربوط به پیش بینی نظری RV-MTS هستند. شکل ۱۰ نیز نشان می دهد، به ازای زاویه دهانه شیار ۹۰ درجه، متوسط مقادیر تجربی زاویه شروع شکست،



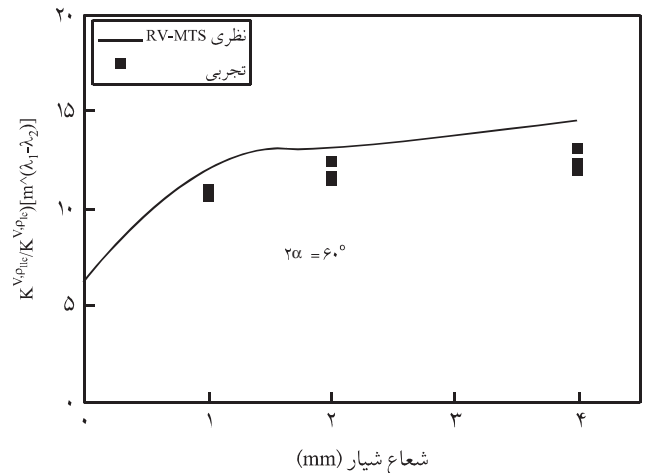
شکل ۱۱ - تغییرات نسبت چقرمگی شکست شیار به ازای تغییرات شعاع نوک شیار، برای زاویه دهانه شیار ۳۰ درجه.



شکل ۹ - تغییرات زاویه شروع شکست به ازای تغییرات شعاع نوک شیار برای زاویه دهانه شیار ۶۰ درجه.



شکل ۱۳ - تغییرات نسبت چقرمگی شکست شیار به ازای تغییرات شعاع نوک شیار، برای زاویه دهانه شیار ۹۰ درجه.



شکل ۱۲ - تغییرات نسبت چقرمگی شکست شیار به ازای تغییرات شعاع نوک شیار، برای زاویه دهانه شیار ۶۰ درجه.

طور گسترده در صنایع مختلف به ویژه صنایع هوافضا و خودرو استفاده می شود. به دلایل خاص کاربردی، این ماده در قطعات مختلف می تواند دارای شیارهایی از قبیل شیارهای V شکل باشد. از آن جا که پلکسی گلاس ماده ای ترد است و شکست در آن اغلب به طور ناگهانی و بدون هشدار قبلی رخ می دهد. بنابراین، پیش بینی چقرمگی شکست قطعات دارای شیار V شکل ساخته شده از این ماده، در برابر بارهای وارد شده به آن، به کمک معیارهای شکست مناسب امری ضروری است. در این پژوهش، نشان داده شد که معیار RV-MTS می تواند تخمین قابل قبولی از بار شکست در شیار V شکل و در حالت برش خالص ارائه دهد. اما، در مواردی که پلکسی گلاس شیاردار در دمای محیط استفاده شود، پیشنهاد می شود که ضریب اطمینانی حداقل معادل ۷۱ در محاسبات شکست قطعه لحاظ شود تا آثار تغییر شکل های پلاستیک در اطراف شیار نیز در رفتار شکست پلکسی گلاس شیاردار لحاظ شود.

### نتیجه گیری

در این پژوهش، معیار MTS کلاسیک که پیش تر برای پیش بینی چقرمگی شکست و زاویه شروع شکست در قطعات ترک دار، زیر بارگذاری های شیوه II خالص و شیوه ترکیبی I/II ارائه و استفاده شد، به حوزه قطعات شیاردار V شکل با نوک گرد تعمیم داده شده و برای پیش بینی شکست ماده پلیمری پلکسی گلاس استفاده شد. درباره قطعات ترک دار، مطابق معیار MTS، مقادیر پارامترهای نسبت چقرمگی شکست  $(K_{IIc}^{V,p} / K_{Ic}^{V,p})$  و زاویه شروع شکست زیر بارگذاری شیوه II

نتایج تجربی و نتایج معیار RV-MTS در مقدار پارامتر نسبت چقرمگی شکست شیار برای زوایای دهانه شیار ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه به ترتیب برابر با ۹، ۱۰ و ۱۳ درصد است. در ارتباط با زاویه شروع شکست زیر بارگذاری شیوه II خالص نیز متوسط اختلاف به ترتیب برابر با ۵، ۸ و ۱۲ درصد است که این امر به مفهوم دقت قابل قبول معیار RV-MTS است. شکل های ۱۱ تا ۱۳ نشان می دهند، پیش بینی معیار RV-MTS درباره پارامتر نسبت چقرمگی شکست شیار، در تمام زوایای دهانه شیار و به ازای تمام شعاع های نوک شیار، اندکی بیش از مقادیر متناظر تجربی است. صرف نظر از پراکندگی موجود در نتایج تجربی که برای مواد ترد امری طبیعی به شمار می رود، علت این موضوع می تواند به دلیل وجود اندکی تغییر شکل پلاستیک پلکسی گلاس در نزدیکی نوک شیار، در دمای محیط باشد. هم چنین، ملاحظه می شود که با افزایش شعاع نوک شیار، مقدار اختلاف نتایج نظری و تجربی افزایش می یابد. برای این موضوع حداقل دو دلیل می توان ذکر کرد. یک دلیل این که با افزایش شعاع نوک شیار و با توجه به ثابت بودن طول شیار در تمام نمونه ها، دقت میدان تنش استفاده شده برای استخراج معیار RV-MTS کاهش می یابد [۱۱]. دلیل دوم این که با افزایش شعاع نوک شیار، گرادیان تنش در نزدیکی نوک شیار کاهش یافته و بنابراین ناحیه پلاستیک در اطراف نوک شیار از حالت موضعی خارج شده و بزرگ تر می شود. با توجه به این که معادلات معیار RV-MTS با فرض میدان تنش کشسان خطی استخراج شده است، بدیهی است که با بزرگ تر شدن ناحیه پلاستیک، اختلاف نتایج نظری با نتایج تجربی افزایش می یابد.

با توجه به استحکام خوب و وزن کم پلکسی گلاس و هم چنین قابلیت مناسب این ماده برای انجام عملیات ماشین کاری، از این ماده به

شعاع‌های نوک شیار اندکی بیش از مقادیر متناظر تجربی است. این موضوع می‌تواند مربوط به آثار تغییر شکل پلاستیک پلکسی گلاس در نزدیکی نوک شیار، در دمای محیط باشد. نمونه صفحه برزیلی دارای شیار V شکل با نوک گرد (RV-BD)، نمونه‌ای مناسب برای انجام آزمون‌های شکست در قطعات شیاردار V شکل با نوک گرد، به ویژه در بارگذاری شیوه II خالص و برای پلکسی گلاس است.

خالص، ثابت و به ترتیب برابر با  $0/866$  و  $70/51$ - درجه است. اما، برای قطعات شیاردار V شکل با نوک گرد، مقادیر این دو پارامتر ثابت نیست و بستگی به زاویه دهانه شیار، شعاع نوک آن و چقرمگی شکست شیوه I خالص شیار ( $K_{IC}^{V,P}$ ) دارند. به طور کلی در بارگذاری شیوه II خالص، مطابقت خوبی بین نتایج تجربی و نتایج حاصل از معیار RV-MTS در تخمین زاویه شروع شکست و نسبت چقرمگی شکست قطعات پلکسی گلاس شیاردار مشاهده شد. پیش‌بینی معیار RV-MTS در باره نسبت چقرمگی شکست شیار در تمام زوایای دهانه شیار و به ازای تمام

## مراجع

1. Tijssens M.G.A., Van der Giessen E., and Sluys L.J., Modeling of Craze Using a Cohesive Surface Methodology, *Mech. Mater.*, **32**, 19-35, 2000.
2. Gearing B.P. and Anand L., On Modeling the Deformation and Fracture Response of Glassy Polymers due to Shear-yielding and Craze, *Int. J. Solid. Struct.*, **41**, 3125-3150, 2004.
3. Maccagno T.M. and Knott J.F., Fracture Behavior of PMMA in Mixed Modes I and II, *Eng. Fract. Mech.*, **34**, 65-86, 1989.
4. Kambour R.P., A Review of Craze and Fracture in Thermoplastics, *J. Polym. Sci.*, **7**, 1-154, 1973.
5. Cartertools, <http://www.cartertools.com/tei01.jpg>, available in 20 December 2008.
6. Gomez F.J. and Elices M., Fracture of Components with V-Shaped Notches, *Eng. Fract. Mech.*, **70**, 1913-1927, 2003.
7. Gomez F.J. and Elices M., A Fracture Criterion for Blunted V-Notched Samples, *Int. J. Fract.*, **127**, 239-264, 2004.
8. Leguillon D., Strength or toughness? A Criterion for Crack Onset at a Notch, *Eur. J. Mechanic. A, Solids*, **21**, 61-72, 2002.
9. Priel E., Yosibash Z., and Leguillon D., Failure Initiation at a Blunt V-Notch Tip under Mixed Mode Loading, *Int. J. Fract.*, **149**, 143-173, 2008.
10. Erdogan F. and Sih G.C., On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, **85**, 525-527, 1963.
11. Filippi S., Lazzarin P., and Tovo R., Developments of Some Explicit Formulas Useful to Describe Elastic Stress Fields Ahead of Notches in Plates, *Int. J. Solid. Struct.*, **39**, 4543- 4565, 2002.
12. Gomez F.J., Elices M., Berto F., and Lazzarin P., Local Strain Energy to Assess the Static Failure of U-Notches in Plates under Mixed Mode Loading, *Int. J. Fract.*, **145**, 29-45, 2007.
13. Lazzarin P. and Filippi S., A Generalized Stress Intensity Factor to be Applied to Rounded V-Shaped Notches, *Int. J. Solid. Struct.*, **43**, 2461-2478, 2006.
14. Ayatollahi M.R. and Aliha M.R.M., Cracked Brazilian Disc Specimen Subjected to Mode II Deformation, *Eng. Fract. Mech.*, **72**, 493-503, 2005.
15. Ayatollahi M.R. and Aliha M.R.M., Fracture Toughness Evaluation for Brittle Polymers under Combined Tensile-shear Loading, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **21**, 107-117, 2008.